UM ESTUDO DA MECÂNICA CLÁSSICA SOB AS PERSPECTIVAS DE NEWTON, LAGRANGE E HAMILTON.

Alessandro Gomes Moraes[1]
Gabriel de Lima e Silva[2]

RESUMO

A mecânica clássica é um ramo da Física que estuda o comportamento Dinâmico do sistema em questão usando princípios formulados pelo físico inglês Isaac Newton. Com base em suas observações e nas de outros cientistas, formulou três princípios, ou leis, fundamentais para o estudo da mecânica. Este artigo tem como objetivo apresentar duas formulações equivalentes às de Newton, para isso, partiremos diretamente das leis do movimento que descrevem a evolução dos sistemas a cada instante de tempo na mecânica newtoniana. Em seguida, abordaremos a mecânica de Lagrange, utilizando o *princípio da mínima Ação* de Hamilton para derivar as equações de movimento no formalismo Lagrangiano, e, posteriormente, obteremos as equações canônicas de Hamilton. Com essas equações, que descrevem a dinâmica do sistema em diferentes formulações, aplicaremos esses conceitos em sistemas conservativos, nesses casos a hamiltoniana do sistema é a energia total. Entre os problemas resolvidos estão o pêndulo elástico, uma partícula em um movimento espiral, caixa deslizando em um plano inclinado sem atrito, e um disco maciço rolando um plano inclinado sem deslizar. Por fim, a ideia central é derivar as equações de movimento desses diferentes sistemas utilizando às mecânicas que serão desenvolvidas neste trabalho a fim de se obter as equações de movimento e verificar se há vantagem em termos de simplicidade.

Palavras chave: Mecânica Clássica, Mecânica de Lagrange, Mecânica de Hamilton.

ABSTRACT

Classical mechanics is a branch of physics that studies the dynamic behavior of physics systems using principles formulated by the English physicist Isaac Newton. Based on his observations and those of other scientists, Newton formulated three fundamental

[1] Graduando em Licenciatura em Física, Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, agm.fis19@uea.edu.br
[2] Doutor em Física, Centro de Estudos Superiores de Tefé, Universidade do Estado do Amazonas, galima@uea.edu.br

principles, or laws, for the study of mechanics. This article aims to present two formulations equivalent to Newton's , to achieve this, we will begin directly from the laws of motion, which describe the evolution of systems at each instant of time in Newtonian mechanics. Subsequently, we will address Lagrangian mechanics, using Hamilton's principle of least action to derive the equations of motion in the Lagrangian formalism, and then obtain Hamilton's canonical equations. With these equations which describe the system's dynamics in different formulations, we will apply these concepts to conservative systems, where the system's Hamiltonian is the total energy. Among the problems solved are the elastic pendulum, a particle in a spiral motion, a box sliding on a frictionless inclined plane, and a massive disk rolling down an inclined plane without sliding. Finally, the central idea is to derive the equations of motion for these different systems using the mechanics developed in this work and verify the advantages to simplicity to use one or others.

Keywords: Classical Mechanics, Lagrangian Mechanics, Hamiltonian Mechanics.

1 INTRODUÇÃO

A teoria quântica e outras áreas, como a mecânica estatística e as teorias de campos das partículas elementares, têm sua fundamentação na mecânica analítica (LEMOS, 2013), assim, pode-se dizer que a mecânica analítica é à base da física teórica. O crescimento das teorias do caos e dos sistemas dinâmicos trouxe um renovado interesse na mecânica clássica, área na qual a mecânica analítica faz parte. Essa área é governada pelas leis de movimento de Newton o que descreve muito bem sistemas com poucos corpos. Porém, sabe-se que a natureza é muito mais complexa que isso, e é provável que existam sistemas com vários corpos que podem tornar difíceis à utilização do formalismo newtoniano[3] (SYMON, 1996).

Além disso, a teoria falha quando considerado corpos com velocidades muito altas (comparáveis com a velocidade da luz). Ainda sim, o fato das leis de movimento propostas por Newton falharem se considerarmos velocidades extremamente altas não descarta a teoria, mas, é apenas uma limitação de onde se pode usá-la. Portanto, um conhecimento sólido em mecânica analítica é essencial para explorar várias áreas da física moderna[4], além de ser

[3] Na prática a maioria dos problemas envolvendo mais de dois corpos interagindo entre si gera equações diferenciais suficientemente complicadas de serem resolvidas.
[4] Um dos conceitos mais importantes da Mecânica Quântica é o conceito de operador energia (Hamiltoniano) de um sistema, que tem a sua formulação própria nesse contexto, mas se baseia na formulação estabelecida na Mecânica Clássica.

fundamental em aplicações na engenharia e na compreensão da mecânica celeste (LEMOS, 2013).

Neste trabalho serão abordados alguns conceitos relativos à mecânica analítica (Clássica) com intuito de resolver sistemas físicos usando mecânica de Lagrange e Hamilton, que são abordagens distintas e equivalentes na mecânica analítica. Como o intuito dessa pesquisa é a aplicação desses métodos (Mecânica de Lagrange e Hamilton) na resolução de sistemas físicos, será feita uma breve introdução sobre as leis de movimento de Newton para deixar claro que não foi preciso criar uma nova teoria da mecânica clássica, apenas foram criados métodos alternativos para casos em que o uso das leis de Newton se torna muito mais complexo. A proposta deste trabalho é explorar integralmente essas ideias, aplicando-o na resolução de sistemas físicos na mecânica clássica. O objetivo é comparar e comprovar que usando ambas as formulações é possível se obter as mesmas equações de movimento, também nos interessa verificar se há alguma vantagem em termos de simplicidade e rapidez na aplicação de um dos métodos em relação aos outros. Isso exigirá um estudo mais aprofundado e diversas aplicações de cada método, a fim de obter uma compreensão melhor para o desempenho na resolução desses sistemas físicos.

Para introduzir os conceitos de Mecânica de Lagrange e Mecânica de Hamilton faremos uso do cálculo das variações, que não será abordado detalhadamente neste trabalho, mas como é a matemática a ser usada para se construir essas formulações, vale ressaltar, que o cálculo das variações ou cálculo variacional, é uma área da matemática que foi desenvolvida por vários estudiosos ao longo do tempo, e diversos problemas foram relacionados a essa nova área de estudo. No século XVII os cientistas possuíam vários exemplos de que a natureza tenta maximizar ou minimizar algumas importantes quantidades (OLIVEIRA, 2007). A título de exemplo podemos citar o problema isoperimétrico ou problema da Rainha de Dido de Cartago (BASSALO e CATTANI, 2011). Diz à lenda que foi oferecida à Dido a extensão de terra que ela pudesse cercar com couro de boi, a Rainha sendo esperta cortou o couro de boi em várias fitas e as ligou nas extremidades de forma a conseguir envolver a área de terra desejada tendo o comprimento dessas fitas como perímetro. Conta a lenda que foi estendido em forma de semicírculo as fitas, e assim obteve a máxima área de terra possível. Desse modo, a Rainha de Dido estabeleceu o Estado de Cartago, em 850 a.C (BASSALO e CATTANI, 2011). Ou exemplo diz respeito ao matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) que enunciou seu hoje famoso *Princípio de Fermat:* – A natureza sempre escolhe menores caminhos. De acordo com esse princípio do tempo mínimo foi observado que a luz leva sempre o menor tempo para seguir sua trajetória (BASSALO e CATTANI, 2011).

Em 1687, o físico e matemático inglês Sir Isaac Newton (1642-1727) publicou seu tratado intitulado "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" composto por três livros. No segundo livro ele propôs o problema da superfície de revolução com resistência mínima: que consiste em calcular a forma de uma superfície de revolução que atravessa uma massa de líquido sofrendo mínima resistência, um problema típico do cálculo variacional. Segundo os historiadores da ciência esse problema de Newton iniciou uma nova área da Matemática conhecida como cálculo das variações (BASSALO e CATTANI, 2011).

Entre muitos contribuintes para este processo, destaca-se a primeira aplicação de um princípio fundamental na Mecânica em 1747 por Maupertuis (1698-1759). Ele introduziu o princípio da mínima ação, afirmando que o movimento dinâmico ocorre com ação mínima. No entanto, o uso de métodos analíticos nos problemas mecânicos foi primeiramente considerado pelo matemático e físico suíço Leonard Euler (1707-1783) e pelo astrônomo e matemático ítalo-francês Joseph-Louis, Conde de Lagrange (1736-1813) (OLIVEIRA, 2007). Embora Euler seja considerado um dos primeiros cientistas a utilizar métodos analíticos em mecânica, o primeiro texto sobre mecânica que recebeu em seu título, especificamente, o termo "analítico", foi o de Lagrange, com seu célebre *"Mécanique Analytique"*, publicado em 1788 (OLIVEIRA, 2007). Lagrange é conhecido por desenvolver a Mecânica Lagrangiana, um formalismo que utiliza uma função escalar chamada Lagrangiana para descrever sistemas em estudo. Por meio das equações de Lagrange, um sistema pode ser expresso por N equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada variável, mantendo-se invariante em transformações de coordenadas. Uma das vantagens distintas desse método em relação à formulação newtoniana é a preservação da forma das equações de movimento e a habilidade de derivar as forças diretamente da função Lagrangiana (CASTEJON, 2011).

Posteriormente, em dois artigos publicados em 1834 e 1835, William Hamilton (1805-1865) introduziu o princípio dinâmico que serve como base para toda a mecânica, conhecido como o princípio de Hamilton, detalhado ao longo deste trabalho. Esse princípio leva às equações de movimento de Lagrange, que são utilizadas como fundamento para as aplicações discutidas neste trabalho, derivadas a partir da formulação das equações de movimento de Lagrange.

2 JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA

Pretende-se abordar como objetivo dessa pesquisa uma forma de escrever soluções de problemas nas perspectivas de Newton, Lagrange e Hamilton. Como se sabe, uma das formas de descrever um sistema mecânico é através das três leis de Newton. Dessa maneira, precisamos conhecer todas as forças que atuam em um sistema (TAYLOR, 2013). Além disso, a mecânica newtoniana faz o uso profundo de uma ferramenta chamada vetores. Ou seja, toda abordagem de Newton é baseada em vetores, o que torna difícil analisar sistemas com N corpos. Diante dessa dificuldade, alguns estudiosos como Leonard Euler e Joseph Lagrange propuseram uma maneira mais versátil de estudar esses sistemas (CASTEJON, 2011). Tanto Euler quanto Lagrange chegaram às mesmas conclusões, porém, usando métodos diferentes. Euler usando o cálculo variacional, princípio da mínima ação e Lagrange usando os deslocamentos virtuais e princípio de d' Alembert (LEMOS, 2013). Com isso, podemos fixar o problema de pesquisa desse trabalho como uma Comparação dos Métodos Clássicos de Mecânica: Um estudo e Aplicação da mecânica de Newton, Lagrange e Hamilton na Resolução de Problemas da Mecânica Clássica (CASTEJON, 2011).

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GERAL

Explorar a aplicação prática dos métodos clássicos da mecânica (Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana) na resolução de problemas em Física da Mecânica, analisando e comparando suas abordagens teóricas e resultados obtidos.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar individualmente cada método clássico Newtoniano, Lagrangiano e Hamiltoniano.
- Aplicar os métodos estudados na resolução de problemas de mecânica clássica e obter as equações de movimento.
- Comparar minuciosamente os resultados obtidos por cada método, evidenciando suas diferenças e vantagens.

4 REFERENCIAL TÉORICO

4.1 PRINCÍPIOS DA MECÂNICA CLÁSSICA

A Mecânica, ao longo da história, destacou-se como o primeiro campo da Física a ser formalizada como uma ciência precisa. Desde o século III a.C., os cientistas gregos já compreendiam os princípios das alavancas e da estática dos fluidos. Contudo, o verdadeiro progresso na compreensão da Física do mundo teve início nos últimos três séculos, com os avanços de Galileu e Newton, que revelaram as leis fundamentais da Mecânica (SYMON, 1996). Estas leis, segundo formulação de Newton, em meados do século XVII, e as leis da eletricidade e magnetismo, segundo James Clerk Maxwell, aproximadamente duzentos anos depois, são as duas teorias básicas da Física Clássica (SYMON, 1996). A Física relativística, que foi iniciada com o trabalho de Einstein em 1905, e a Física Quântica, como fundamentos nos trabalhos de Heisenberg e Schroedinger, em 1925-1926, contribuíram para modificar e reformular a Mecânica e a Eletrodinâmica em termos de novos conceitos. Apesar disso, a Física Moderna foi erguida sobre os fundamentos estabelecidos pela Clássica, sendo preciso conhecer profundamente os princípios da Mecânica e da Eletrodinâmica Clássica para estudar a Física Relativística e Quântica (SYMON, 1996). Além do mais, na maioria das aplicações práticas da Mecânica, em vários ramos da Engenharia e da Astronomia, as leis da Mecânica Clássica ainda são válidas[5]. Da mesma forma, a Mecânica Quântica deve e, de fato está, em conformidade com a Mecânica Clássica, exceto quando é aplicada a sistemas em que a dimensão corresponde à ordem do comprimento de Planck. Na realidade, um dos princípios usados como guia na formulação de novas teorias da Física é a imposição de que elas devam concordar com as teorias antigas quando aplicadas aos fenômenos para os quais as mais antigas fornecem o resultado correto. Entretanto, existem outras maneiras de formular os princípios da Mecânica Clássica, por exemplo, as formulações de Lagrange e de Hamilton (TAYLOR, 2013). Essas duas formulações fazem parte do que é conhecido como Mecânica Analítica, que é uma abordagem particular da Mecânica Clássica. A mesma não se trata de uma teoria nova, pois deriva das leis de Newton. Mas são formas diferentes de expressar a mesma teoria por meio de conceitos matemáticos mais avançados (LEMOS, 2013). Vale ressaltar que a Mecânica Analítica é uma disciplina de caráter eminentemente matemático, e, é o que permite o primeiro contato do estudante com técnicas e conceitos dos mais variados ramos da Física (LEMOS, 2013). Em muitos aspectos, é mais elegante do que a formulação

[5] A exceção ocorre quando são considerados corpos que viajam com velocidades próximas à da luz.

Newtoniana, e, em alguns casos, mais poderosa, porque permite uma solução de alguns problemas que se baseadas diretamente nas leis de Newton, seria muito mais complexa. Segundo Symon (1996)

> Quanto maior o número de maneiras conhecidas para formular uma teoria de Física, melhores serão as oportunidades de aprender a modifica-las, a fim de explicar fenômenos novos, à medida que são descobertos. Está é uma das principais razões para justificar a importância de formulações mais avançadas em Mecânica: elas são os pontos de partida para se chegar às teorias mais recentes da Relatividade e Mecânica Quântica. (SYMON, 1996).

Para isso nesse trabalho faremos um estudo mais aprofundado desses métodos a ser especificados nos tópicos a seguir, partindo do que já é conhecido até chegar às equações de movimento de Lagrange e Hamilton.

4.2 MECÂNICA NEWTONIANA

A mecânica Newtoniana representou um marco fundamental na Física, pois Sir. Isaac Newton demonstrou minuciosamente o comportamento da natureza ao definir cada aspecto do movimento dos corpos celestes e estabelecer leis universais imutáveis. Além disso, ele destacou e expandiu os trabalhos prévios de Galileu, Copérnico e Kepler. A influência duradoura de Newton é evidente até os dias de hoje e serviu como base para formulações de novas teorias. Através de sua lei da gravitação universal, proporcionou aos astrônomos um importante instrumento para suas investigações. O estudo do movimento dos corpos celestes em relação a uma posição específica no espaço remonta as observações de Galileu feitas séculos atrás (TAYLOR, 2013).

De acordo com as leis propostas por Newton, o movimento de um sistema de N partículas com i graus de liberdade é representado pela solução de um sistema de N equações vetoriais do movimento:

$$\vec{F}_{res-i} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i\vec{r}_i)$$

Onde $\vec{F}_{res-i}$ é a força resultante que atua sobre uma i-ésima partícula de massa m, velocidade $\vec{v}$, momento linear $\vec{p}$, em que $\vec{p} = m\vec{v}$.

As equações de movimento são equações diferencias ordinárias (EDO's) de segunda ordem e exigem para sua solução a especificação de duas condições iniciais para cada variável. Como o intuito do trabalho é obter apenas as equações de movimento, não nos preocuparemos em resolver as EDO's.

Em 1687 Sir. Isaac Newton em seu ***Principia***, postulou as três leis do movimento que levam seu nome (As três leis do movimento de Newton):

1ª Lei: Uma partícula que não esteja sujeita a nenhuma interação (partícula livre) só pode estar em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante. Esta lei, também conhecida como "Lei da inércia ou de Galileu", corresponde à apresentação do referencial inercial, que nada mais é do que um referencial para qual a 1ª lei é válida (LEECH, 1971). Segundo Lemos (2013):

> "A existência de um referencial inercial implica a existência de uma infinidade de outros, todos movendo-se entre si em linha reta com velocidade constante. Neste postulado está implícita a noção newtoniana de tempo absoluto, que "flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa" e é o mesmo em todos os referenciais inerciais"

2ª Lei: Quando há interação numa partícula, seu estado de movimento é alterado segundo:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{4.1.1}$$

Onde $\vec{F}_{res}$ é a força resultante que atua sobre a partícula e $\vec{p}$ é seu momento linear. Este postulado pressupõe, explicitamente, que a cada partícula está associada uma constante positiva *m*, denominada massa, que é a mesma em todos os referencias inercias.

3ª Lei: Para essa lei, suponhamos que i e j sejam duas partículas interagentes completamente isoladas de forças externas. De acordo com a segunda lei quando há interação entre partículas vale $\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, logo, podemos concluir que para cada partícula exista um momento linear associado. De forma que podemos definir um momento total que pode ser expresso como:

$$\vec{P}_T = \vec{p}_i + \vec{p}_j \tag{4.1.2}$$

Onde $\vec{p}_i$ e $\vec{p}_j$ são os momentos linear de cada partícula e $\vec{P}_T$ o momento total. Derivando a equação (4.1.2) no tempo, obtemos:

$$\frac{d\vec{P}_T}{dt} = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{p}_j}{dt} \tag{4.1.3}$$

Sendo considerado o sistema isolado onde não se tem forças externas resultantes $\frac{d\vec{P}_T}{dt} = 0$, ou seja, temos a *conservação do momento linear*. Além disso, sabemos que $\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ como já mostrado anteriormente. Então, temos que:

$$0 = \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

$$0 = \vec{F}_{res_i} + \vec{F}_{res_j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{4.1.4}$$

Esse resultado é conhecido como lei da ação e reação, ela diz que quando duas partículas interagem, a força numa delas possui o mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário à força que atua na outra.

Essas três leis governaram por séculos e até hoje ainda são usadas como base para desenvolver novas teorias. Entretanto, quando Newton demostrou matematicamente pela primeira vez como funcionava a mecânica do universo, uma nova visão da Física se abriu, pensava-se que só a ideia de Newton fosse suficiente para explicar e solucionar os problemas sobre a Mecânica (TAYLOR, 2013). Porém, o conhecimento científico está sempre sujeito à mudanças, e uma nova forma de resolver um determinado problema pode surgir, uma nova visão acerca da natureza pode nos elevar a um nível diferente do já conhecido. Isso foi evidente no caso da Mecânica Newtoniana, que eventualmente revelou suas limitações (ROONEY,2011).

4.3 MECÂNICA DE LAGRANGE

No ano de 1788 o matemático francês Joseph-Louis Lagrange apresentou uma síntese abrangente do conhecimento existente até então sobre o formalismo newtoniano. Em vez de aderir à proposta original de Newton e suas leis, Lagrange estabeleceu uma relação entre a energia cinética de um sistema e suas coordenadas generalizadas, considerando forças e tempo. Leonard Euler, outro matemático de importância significativa, ampliou o escopo das leis de Newton de partículas para corpos rígidos e formulou duas novas leis para explicar que as forças internas de um corpo não precisam ser uniformemente distribuídas. Ao longo dos séculos a Mecânica apresentada por Newton foi reformulada. Matemáticos brilhantes como Euler, Lagrange e Hamilton contribuíram para o enriquecimento teórico e rebuscado das ideias de Newton (ROONEY,2011).

Como foi mostrada na seção anterior, a mecânica Newtoniana parte diretamente das leis de Newton para seu desenvolvimento. Agora enunciaremos um novo formalismo mais geral que não mais partirá das leis de Newton e sim do chamado princípio de Hamilton (CASTEJON, 2011). Joseph-Louis Lagrange desenvolveu um formalismo que relaciona a conservação da energia com a conservação do momento linear de um sistema dinâmico. Com este formalismo é possível escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos a partir de uma função escalar que deve ser expressa em termos das coordenadas generalizadas (LEMOS, 2013). Antes de definirmos essa função escalar, faremos uma abordagem a respeito dessas coordenadas que será utilizada daqui em diante.

COORDENADAS GENERALIZADAS

É qualquer coleção de coordenadas independentes q_i que são suficientes para descrever a configuração de um sistema de partículas. O número requerido de coordenadas generalizadas é igual ao número de graus de liberdade do sistema, que são as possibilidades do movimento nas dimensões do espaço considerado, nesse caso é o espaço de configuração. Por exemplo, duas partículas sem vínculos uma com a outra precisam de seis coordenadas para sua descrição, pois o sistema tem seis graus de liberdade, três para cada partícula (CASTEJON, 2011). Admitimos então, que um sistema físico é descrito por N coordenadas generalizadas e seja caracterizado por certa função escalar que foi comentada anteriormente e que depende das coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e pode depender também explicitamente do tempo. Sendo expressa como, $L = L(q_i, \dot{q}_i; t)$ em que ela é chamada de função Lagrangiana do sistema e denota-se por q_i o conjunto de coordenadas $\{q_1, \dots, q_n\}$, equivalentemente com as velocidades generalizadas $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

PRINCÍPIO DE HAMILTON

De todas as formulações da dinâmica clássica, a mais concisa tem a forma de um princípio variacional. É possível reformular lei da dinâmica fundamental como um princípio integral, que leva em conta o movimento completo do sistema no intervalo de tempo finito (LEMOS, 2013). O princípio de Hamilton reduz as leis da mecânica a um enunciado segundo o qual, comparado com todos os movimentos imagináveis, o movimento real é aquele para qual é mínima (mais geralmente estacionária) uma certa quantidade que é definido como ação, cujo valor depende do movimento em sua totalidade (LEMOS, 2013). A formulação, do princípio de Hamilton ou princípio da mínima ação decorre do cálculo variacional que pode ser definido como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

sendo t_1 e t_2 dois instantes quaisquer da evolução do sistema. Vemos que a ação é um funcional[6] das coordenadas e velocidades generalizadas.

O princípio de Hamilton estabelece que essa evolução, da configuração de 1 para 2, se processa com ação mínima (por isso também chamado de mínima ação). Dessa forma, a variação da ação pode ser escrita como

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{4.3.1}$$

Com $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. A generalização para sistemas holônomos[7] com um número qualquer de graus de liberdade é imediata. Seja a *ação* definida por (4.3.2)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{4.3.2}$$

E considere

$$\bar{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t). \tag{4.3.3}$$

Com as variações δq_i independentes entre si e arbitrárias, exceto pelas condições nos extremos $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Destaque-se que é a mútua independência das coordenadas generalizadas que assegura que cada uma delas pode ser variada independentemente das demais (LEMOS, 2013). A variação da ação $S = \int_{t_2}^{t_1} L\, dt$ é dada por

[6] Um funcional é um objeto matemático que associa a cada função um escalar.
[7] Que são vínculos que fornecem relações entre as coordenadas generalizadas de tal forma que podemos eliminar uma, ou mais de uma, dessas coordenadas.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Fazendo uma integração por partes, obtemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \qquad (4.3.4)$$

Levando em consideração que as variações das coordenadas generalizadas se anulam nos pontos extremos, está equação reduz-se a

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \qquad (4.3.5)$$

Impondo $\delta S = 0$, o que obtemos é

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0 \qquad (4.3.6)$$

Uma vez que os δq_s são mutuamente independentes, podemos tomar todos iguais a zero exceto um particular δq_{i_0}. Neste caso, a soma em (4.3.6) reduz-se a um único termo correspondente a $i = i_0$. Mas, como δq_{i_0} é uma função arbitrária, o lema fundamental do cálculo das variações estabelece que o coeficiente de δq_{i_0} em (4.3.6) é identicamente nulo (LEMOS, 2013). E, finalmente com o argumento anterior é aplicável a qualquer i_0, conclui-se que a equação (4.3.6) equivale a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad , \qquad i = 1, \dots, n \qquad (4.3.7)$$

Isto completa a dedução das equações de Lagrange a partir do princípio variacional $\delta S = 0$ para sistemas holônomos. Essas são as equações de Lagrange, que se constituem em equações diferenciais de segunda ordem e permanece invariante sob qualquer transformação de coordenadas. Na abordagem Lagrangiana da mecânica, a trajetória de um sistema de partículas é determinada pela solução da equação de Lagrange, fornecendo-nos a evolução temporal do sistema.

A equação (4.3.7) representa para o formalismo Lagrangiano o que a segunda lei de Newton representa para o formalismo Newtoniano. Para resolver (4.3.7) é necessário conhecer a Lagrangiana de um sistema mecânico. A Lagrangiana de um sistema mecânico é definida como $L = T - V$, onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema.

4.4 MECÂNICA DE HAMILTON

O princípio da mínima ação sofreu uma grande modificação graças aos trabalhos do matemático irlandês Sir Wiliam Rowan Hamilton (1805-1865). Na formulação introduzida por Hamilton as equações de movimento consistem em *2n* equações diferencias ordinárias de primeira ordem em relação ao tempo, para *2n* variáveis independentes. Na mecânica de Hamilton o movimento pode ser representado por uma curva traçada no espaço de fase, em que as coordenadas são as referidas variáveis independentes. O que difere do espaço de configuração, no qual um ponto define apenas a configuração (posição das partículas) do sistema num dado instante. Um ponto do espaço de fase determina o estado do sistema, isto é, sua configuração (posição das partículas) e taxa de variação temporal desta configuração (velocidades das partículas) num dado instante (LEMOS, 2013).

Naturalmente, é possível substituir as equações por um sistema equivalente de equações de primeira ordem, duplicando o número de equações simplesmente introduzindo as variáveis $s_i = \dot{q}_i,\ i = 1, \ldots, n$ e tratando $q_1, \ldots, q_n, s_1, \ldots, s_n$ como um conjunto de $2n$ variáveis independentes (LEMOS, 2013). As equações de movimento seriam

$$\dot{q}_i = s_i \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial s_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \quad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

Onde $L = L(q, s; t)$ é a Lagrangeana do sistema. Estas equações, no entanto, envolvem q_i e s_i de forma assimétrica e não particularmente úteis.

William Rowan Hamilton mostrou, em 1835, que a duplicação simétrica do número de variáveis independentes é conseguida graças à descrição da dinâmica por intermédio das $2n$ quantidades $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ em que p_i é $o\ momento\ canônico\ conjugado$ a q_i definido por (LEMOS, 2013)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \ i = 1, \ldots, n. \qquad (4.4.1)$$

Desse modo, é possível solucionar essas equações para as velocidades generalizadas, o que implica em resolver as n equações para os momentos canônicos conjugados e encontrar as n velocidades generalizadas. A partir desse resultado, a descrição Hamiltoniana envolve a substituição das variáveis $(q, \dot{q})$ por (q, p) em todas as grandezas mecânicas. Essa mudança de descrição realiza-se mediante a uma *transformação de Legendre*, que não abordaremos em detalhe neste trabalho, mas que no presente contexto consiste na substituição de $\dot{q}_i$, pelos p_i denotado como momento canônico conjugado com variáveis básicas, e também a introdução da função de Hamilton ou, simplesmente *hamiltoniana* $H(q, p, t)$ definida por

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}_i, t) \qquad (4.4.2)$$

Nesta equação, as velocidades são expressão na forma $\dot{q}_i = f_i(q,p,t)$ resultante da solução das n equações (4.4.1) para as n velocidades generalizadas (LEMOS, 2013).

Tomando a diferencial da equação (4.4.2):

$$dH(q_i, p_i, t) \;=\; \sum_i^n (p_i\, d\dot{q}_i + \dot{q}_i d\dot{p}_i) \;-\; \sum_i^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4.4.3)$$

De acordo com a definição (4.4.1) temos,

$$dH(q_i, p_i, t) \;=\; \sum_i^n (p_i\, d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) \;-\; \sum_i^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \; p_i d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4.4.4)$$

Ainda sobre a definição (4.41), e escrevendo a equação de Euler-Lagrange como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{d(p_i)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Logo, podemos escrever a equação (4.4.4) como

(4.4.5)

$$dH(q_i,p_i,t) \quad = \quad \sum_i^n \left[(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i) - (\dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt\right]$$

Eliminando os termos semelhantes

$$dH(q_i,p_i,t) \quad = \quad \sum_i^n \left[(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt\right] \qquad (4.4.6)$$

advertindo que, de fato, H só depende dos q_s e p_s. Por outro lado,

$$dH(q_i,p_i,t) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (4.4.7)$$

Comparando as equações (4.4.6) e (4.4.7), temos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4.4.8)$$

além disso,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (4.4.9)$$

As equações (4.4.8) são conhecidas como *equações de Hamilton* ou *equações canônicas de Hamilton*, e formam um conjunto de *2n* equações diferencias de primeira ordem que são equivalentes ao sistema de *n* equações de segunda ordem de Lagrange. As quantidades (q, p) são chamadas de variáveis canônicas e o espaço cartesiano de *2n* dimensões cujos pontos são representados pelas *2n* -uplas. E $(q, p) \equiv (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ é chamado de espaço de fase. (LEMOS, 2013).

5 APLICACÕES DAS MECÂNICAS

Nesta seção serão feitas algumas aplicações das equações desenvolvidas ao longo deste trabalho, relativo à mecânica de Newton, Lagrange e Hamilton. Espera-se que esteja claro que a ideia desse capítulo é obter as equações de movimento para cada sistema estudado, não nos preocuparemos em resolver essas equações diferenciais neste trabalho[8].

---

[8] Todas as equações diferenciais encontradas na solução de problemas usando os métodos da mecânica são equações diferencias ordinárias, cuja solução obedece ao teorema de existência e unicidade, ou seja, uma vez que

-Problema 01: *Considere um bloco de massa m que desliza sem atrito sobre a superfície de um plano inclinado um ângulo θ com a horizontal, sabendo que o bloco parte do repouso na posição $x_0 = 0$ e que sua velocidade inicial é $v_0 = 0$. Determine as equações de movimento.*

Antes de tudo, por uma questão de simplicidade, vamos adotar o eixo *x* paralelo ao plano inclinado e com direção positiva no mesmo sentido que o bloco desliza, e, vamos adotar o eixo *y* perpendicular ao plano inclinado com valores positivos no sentido de baixo para cima do plano (conforme a Figura 01 abaixo).

Agora podemos resolver o problema primeiramente usando a formulação newtoniana, e pela 2° lei de Newton (4.1.1) é dada por

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Como a massa do bloco é constante, logo temos

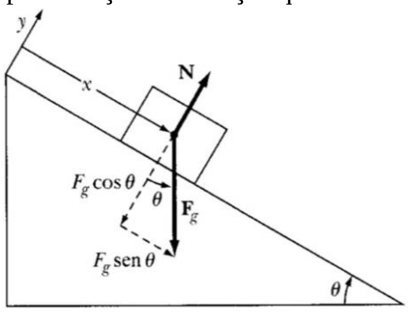
$$\vec{F}_{res} = m\frac{d}{dt}(\vec{v}) = m\vec{a}.$$

Agora vamos decompor o vetor força $\vec{F}_g$ nas suas componentes relativas aos eixos *x* e *y*, respectivamente, com isso, temos

$$\vec{F}_g = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}.$$

Na direção *y*, as forças atuantes no bloco são a força normal e a componente da força peso na direção *y*, como podemos verificar na figura 01 abaixo.

Figura 01: Representação das forças que atuam no bloco.



Fonte: Pinheiro, M Paulo.

a equação possua solução, ela é única. Ou seja, se cada método (newtoniano, lagrangiano ou hamiltoniano) nos leva à mesma EDO, significa que cada método nos levará à mesma equação de movimento (solução desta EDO).

Logo, na direção da componente da F_y as forças atuantes são

$$F_y = F_N - F_g \cos\theta,$$

Como na há aceleração nessa direção, portanto

$$F_N - F_g \cos\theta = 0.$$

Logo,

$$F_N = F_g \cos\theta.$$

Esse resultado significa que as forças que atuam ao longo da direção y se cancelam, consequentemente não havendo movimento do bloco nessa direção. Na direção x, a única força que atua sobre o bloco é a componente da força peso nessa mesma direção como ilustra a figura 01.

Com isso, temos:

$$F_x = F_g \operatorname{sen}\theta = m\ddot{x}.$$

Como F_x é a única componente não nula do vetor $\vec{F}_g$ que atua no bloco, ela é equação de movimento para esse sistema, considerando que a $F_{res_y} = 0$ e, sabendo que $F_g = mg$, conclui-se que

$$m\ddot{x} = mg \operatorname{sen}\theta$$

é a equação de movimento para esse sistema. E se dividindo ambos os lados dessa equação por m obtemos a aceleração.

$$\ddot{x} = g \operatorname{sen}\theta.$$

Com esse primeiro resultado, podemos ter uma primeira ideia de como podemos usar a Segunda lei de Newton para resolver um problema de Física Clássica. É notável que a formulação de Newton para sistemas simples (que há pouca interação) é bastante consistente. Já que conseguimos descrever muito bem a Dinâmica do sistema. Para esse caso precisamos apenas de uma coordenada (uma equação de movimento) para descrever o sistema. E o objetivo é descobrir quais as forças que atuam no sistema, esse conjunto de forças somadas definem o que chamamos como a resultante das forças.

Agora vamos resolver esse mesmo problema, mas desta vez utilizando o formalismo de Lagrange.

Primeiramente vamos definir quem é a equação de vínculo desse sistema que faz com que o bloco sempre esteja em contato com o plano inclinado é

$$y = 0$$

Isso que dizer que o bloco está vinculado a se mover somente sobre o plano inclinado. As coordenadas generalizadas, são, $q_1 = x$ e $q_2 = y$ e, as velocidades generalizadas são $\dot{q}_1 = \dot{x}$ e $\dot{q}_2 = \dot{y}$. Com essas coordenadas podemos escrever a energia cinética que é uma função quadrática nas velocidades e a energia potencial é uma função que nesse caso depende apenas das coordenadas. A energia cinética para uma partícula é

$$T = \frac{1}{2}m(v^2).$$

Que pode ser escrita em termos das velocidades dos possíveis movimentos no espaço de configuração:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Por conseguinte, precisamos da energia potencia do sistema. E vamos defini-la como,

$$U = -mgh_B,$$

onde h_B é a altura do bloco em relação ao solo. E como é notável o triangulo retângulo formado pelo plano inclinado com a horizontal, podemos usar um pouco de trigonometria e escrever a altura como $h = x\sin\theta$. Substituindo, temos a energia potencial.

$$U = -mgx\sin\theta.$$

Com esses dois resultados pode escrevera lagrangiana do sistema como:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta.$$

Agora podemos usar a equação de Euler-Lagrange para obter as equações de movimento por esse formalismo. A primeira equação pode ser escrita para a coordenada y. Porém, com já sabemos não há movimento nessa direção, ou seja, não se tem velocidade e consequentemente aceleração.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta\right]}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Fazendo as derivadas obtemos

$$m\ddot{y} = 0,$$

Conclui-se que para a solução do problema basta resolver a equação obtida para a coordenada x. Dessa forma, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\right]}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial[mgx\sin\theta]}{\partial x} = 0$$

Fazendo as derivadas obtemos a mesma equação de movimento de movimento obtida pela formulação newtoniana.

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta.$$

A resolução desse problema a partir do formalismo lagrangiano da mecânica clássica nos faz entender, em parte, as diferenças entre as abordagens de Newton e Lagrange. Enquanto na mecânica newtoniana nos preocupamos em achar as forças que estão envolvidas no problema e utilizamos quantidades vetoriais, na mecânica lagragiana é diferente por que utilizamos energia cinética e potencial envolvido no sistema para a solução do problema e trabalhamos com quantidades escalares.

Dando continuidade, faremos agora a resolução deste problema usando a mecânica Hamiltoniana.

A equação de vínculo já foi mostrada anteriormente:

$$y = 0.$$

As coordenadas generalizadas são $q_1 = x$ e $q_2 = y$ e as velocidades generalizadas são $\dot{q}_1 = \dot{x}$ e $\dot{q}_2 = \dot{y}$. O que nos permite escrever a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

E a energia potencial

$$U = -mgx\sin\theta.$$

Dessa forma, a lagrangiana é:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta.$$

Na mecânica Hamiltoniana o conjunto de coordenadas usados são (q, p), ou seja, precisamos escrever a energia cinética em termos dos momentos generalizados. Isso será feito usando a equação (4.4.1), logo, para cada possível movimento no espaço de fase temos um momento canônico conjugado:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = \frac{p_x}{m},$$

Para p_y, temos que

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = \frac{p_y}{m},$$

Com esses resultados podemos encontrar a hamiltoniana do sistema, substituindo as velocidades e a lagrangiana na equação (4.4.2), temos[9]

$$H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{m} - \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx\sin\theta\right],$$

deixando a hamiltoniana em termos dos momentos e das coordenadas, temos

$$H = \frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} - mgx\sin\theta.$$

Essa é a hamiltoniana do sistema. Por fim, vamos utilizar as equações de Hamilton para encontrar a equação de movimento, com isso, tem-se

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left[\frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} - mgx\sin\theta\right] = \frac{p_x}{m} \qquad \Rightarrow \qquad p_x = m\dot{x},$$

derivando no tempo p_x, temos

$$\dot{p}_x = m\ddot{x}.$$

Para a derivada da hamiltoniana em relação à p_y, temos

[9] Essa hamiltoniana também poderia ter sido obtida diretamente fazendo T+V já que o sistema é conservativo.

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p_y}\left[\frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} - mgx\sin\theta\right] = \frac{p_y}{m} \qquad \Rightarrow \qquad p_y = m\dot{y},$$

derivando no tempo p_y, temos

$$\dot{p}_y = m\ddot{y}.$$

Vamos agora utilizar as outras equações de Hamilton para calcular a derivada em relação à x e y, portanto

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} - mgx\sin\theta\right] = mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_x = mg\sin\theta,$$

para y, temos que

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{{p_x}^2}{2m} + \frac{{p_y}^2}{2m} - mgx\sin\theta\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p}_y = 0,$$

Relacionando essas equações temos para y:

$$m\ddot{y} = 0,$$

o que implica dizer mais uma vez que não há movimento da direção y. Por tanto, só resta a equação

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta.$$

Que é o mesmo resultado obtido anteriormente pelo formalismo newtoniano e lagrangiano. Note que de início são os mesmos passos feitos na formulação de Lagrange para encontrar a lagrangiana do sistema, com a diferença que agora precisamos escrever a energia cinética em termos da nova coordenada generalizada, o momento. A partir disso constrói a hamiltoniana do sistema e encontra as equações de movimento pelo formalismo de Hamilton.

-Problema 02: *Considere agora uma partícula de massa m sujeito ao potencial $U(r,\theta,z)$, movendo-se em uma trajetória espiral, de forma que r, o raio da trajetória é constante $r = R$. A coordenada vertical z varia linearmente com o ângulo θ conforme $z = k\theta$. Onde k é uma constante de proporcionalidade que determina a taxa de variação da coordenada z em relação ao angulo θ. Determine as equações de movimento.*

O vetor posição nas coordenadas usuais como, cartesianas e cilíndricas podem ser escritos como:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}$$

Derivando os vetores posição, temos

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

Derivando mais uma vez

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}\right)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}.$$

A priori, vamos tomar k sendo positivo, ou seja, à medida que θ amenta z também aumenta linearmente. Isso significa que a partícula se move para cima enquanto gira ao redor do eixo. Para esse sistema, vamos utilizar coordenadas cilíndricas dadas por (r, θ, z).

Mas como $r = R = constante$

$$\vec{a} = \left(-rR\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(R\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} + k\ddot{\theta}\hat{z}.$$

Para resolver esse problema vamos decompor a força que dá origem ao movimento em suas componentes, radial, tangencial e axial.

A segunda lei para a componente radial:

$$\sum(\vec{F}_{res} = m\vec{a}_r).$$

Substituindo aceleração corresponde a cada direção e levando em consideração que o sistema é conservativo, podemos ainda escrever essas forças como o gradiente de uma energia potencial, que em coordenadas cilíndricas é

$$\vec{F}_r = -m\mathrm{R}\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r},$$

Para a componente tangencial:

$$\vec{F}_\theta = m\vec{a}_\theta$$

$$\vec{F_\theta} = mR\ddot{\theta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Para direção z:

$$\vec{F_z} = m\vec{a}_z = m\ddot{z} \qquad \text{com} \qquad \ddot{z} = k\ddot{\theta}$$

$$F_z = m\,k\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Essas são as componentes calculas da força em três dimensões, porém, sabemos que

$$z = k\theta.$$

Portanto, duas dessas equações podem ser escritas numa mesma coordenada (as equações de z e θ), assim, usando

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial (k\theta)}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial z}k.$$

Substituindo na primeira equação

$$mR\ddot{\theta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial z}k$$

$$m\,k\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Multiplicando a primeira equação por R e a segunda por k, obtemos:

$$mR^2\ddot{\theta} = -k\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$m\,k^2\ddot{\theta} = -k\frac{\partial U}{\partial z}$$

Somando essas duas equações, temos:

$$mR^2\ddot{\theta} + m\,k^2\ddot{\theta} = -k\frac{\partial U}{\partial z} - k\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2k}{m(R^2 + k^2)} \frac{\partial U}{\partial z}$$

Essa é a equação de movimento para esse sistema usando a formulação newtoniana. Que segundo a condição $z = R\theta$, nos permite escrever duas equações numa mesma coordenada. Note que duas das forças encontradas são conhecidas como:

$$F_r = -m\mathrm{R}\dot{\theta}^2 \text{ , (força centrífuga)}$$

$$F_\theta = mR\ddot{\theta} \quad \text{, (força de Coriolis)}$$

Da mesma forma vamos fazer esse problema usando a formulação de Lagrange

A equação de vínculo é:

$$r = R$$

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

Usando coordenadas cilíndricas a energia cinética pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2),$$

Sendo r constante, e $z = k\theta$, logo a energia é

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + k^2\dot{\theta}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2 + k^2).$$

Para energia potencial vamos considerar:

$$U = U(r, \theta, z) = U(r, \theta, k\theta).$$

A lagrangiana do sistema então

$$L = T - U = T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2 + k^2) - U(r, \theta, z).$$

A equação de Euler-Lagrange para a coordenada generalizada é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2+k^2)\right]\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}[-U(r,\theta,z)]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(r^2+k^2)\right]\right)=\frac{d}{dt}\left[m\dot{\theta}(r^2+k^2)\right]=m\ddot{\theta}(r^2+k^2)$$

Para derivada do potencial faremos

$$U(r,\theta,z)$$

$$dU=\frac{\partial U}{\partial r}dr+\frac{\partial U}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Dividindo toda essa equação por $d\theta$,temos:

$$\frac{dU}{d\theta}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dr}{d\theta}+\frac{\partial U}{\partial\theta}d\theta\frac{d\theta}{d\theta}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$$

O termo $\frac{dr}{d\theta}$ é nulo por que as coordenadas r e θ são independentes, logo a equação acima fica:

$$\frac{dU}{d\theta}=\frac{\partial U}{\partial\theta}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{d\theta},$$

Usando que $\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}$, e somando os termos, obtemos:

$$\frac{dU}{d\theta}=2\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{d\theta}=2\frac{\partial U}{\partial z}\frac{d}{d\theta}(k\theta)=2k\frac{\partial U}{\partial z}$$

Com esse resultado podemos substituir na equação de Euler-Lagrange

$$m\ddot{\theta}(r^2+k^2)+2k\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

$$m\ddot{\theta}(r^2+k^2)=-2k\frac{\partial U}{\partial z}$$

Essa já é a equação de movimento para esse sistema. Se quisermos deixá-la de uma forma mais elegante

$$\ddot{\theta}=\frac{-2k}{m(r^2+k^2)}\frac{dU}{dz}.$$

Para a formulação hamiltoniana, a equação de vínculo é a mesma já mostrada na resolução por Lagrange. De posse da energia cinética e potencial já podemos escrever a lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 (r^2 + k^2) - U(r, \theta, z)$$

Como o sistema é conservativo a hamiltoniana do sistema é a energia total, logo

$$H = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 (r^2 + k^2) + U(r, \theta, z),$$

Escrevendo a hamiltoniana em termos dos momentos, para isso vamos calcular o momento canônico conjugado

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}(r^2 + k^2) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(r^2 + k^2)}$$

Substituindo $\dot{\theta}$ em $H(r, \theta)$ a hamiltoniana é:

$$H = \frac{p_\theta{}^2}{2m(r^2+k^2)} + U(r, \theta, z).$$

As equações canônicas de Hamilton são então

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \quad e \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

Fazendo as derivadas de H em relação p_θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left[\frac{p_\theta{}^2}{2m(r^2+k^2)} + U(r, \theta, z)\right] = \frac{p_\theta}{m(r^2+k^2)},$$

$$\Rightarrow p_\theta = m\dot{\theta}(r^2 + k^2)$$

Derivando no tempo

$$\dot{p}_\theta = m\ddot{\theta}(r^2 + k^2).$$

Derivando H em relação à θ:

Mas essa derivada já foi calculada, logo, temos

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}[\,U(r,\theta,z)] = -2k\frac{dU}{dz}$$

Por fim, relacionando essas equações obtemos a equação de movimento de Hamilton

$$m\ddot{\theta}(r^2+k^2) = -2k\,\frac{dU}{dz},$$

que isolando $\ddot{\theta}$ temos a mesma equação encontrada na formulação de Newton e Lagrange.

-Problema 03: *Um pêndulo consiste de uma massa m suspensa por uma mola sem massa de comprimento não estendido b e constante elástica k. Sendo $r > b$, a mola se encontra esticada, se $r < b$, a mola está comprimida e se $r = b$, ela está na sua posição de equilíbrio. Encontre as equações de movimento de Newton, Lagrange e Hamilton.*

Para começar a resolver esse problema vamos definir a velocidade em termos das coordenadas polares, como já apresentamos isso no início do segundo problema já temos

$$\vec{v}_t = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta},$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}.$$

Pela segunda lei de Newton, em termos de forças temos a força gravitacional que em termos de suas componentes podem ser escritas como:

$$F_x = -mg\sin\theta,$$

$$F_y = mg\cos\theta.$$

Vamos usar a segunda lei para direção radial. Nessa direção temos a componente da força gravitacional e a força elástica devido à mola. Além disso, vamos substitui a aceleração encontrada já obtida.

$$\sum \vec{F}_{res} = m\vec{a}_r,$$

$$mg\cos\theta - k(r-b) = m\ddot{r} - rm\dot{\theta}^2$$

Organizando, logo temos a equação de movimento para direção radial como

$$m\ddot{r} = rm\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-b).$$

Fazendo o mesmo para direção tangencial:

$$\sum \vec{F}_{res} = m\vec{a}_{\theta},$$

Obtemos a seguinte equação

$$mr\ddot{\theta} + m2\dot{r}\dot{\theta} = -mg\sin\theta,$$

que é a equação de movimento para a direção angular. Utilizando a formulação lagragiana

As coordenadas generalizadas são $q_1 = r$ e $q_2 = \theta$, as velocidades generalizadas são $\dot{q}_1 = \dot{r}$ e $\dot{q}_2 = \dot{\theta}$. Escrevendo a energia cinética em termos dessas coordenadas, temos

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Para energia potencial, temos que levar em consideração tanto a energia devido a gravidade quanto a energia potencial devido a mola, logo temos

$$U = U_g + U_{el}$$

$$U = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2$$

Agora podemos escrever a lagrangiana do sistema

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\sin\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2.$$

Por fim, podemos utilizar as equações de Euler-Lagrange. Para a coordenada r, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{r}}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\sin\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2\right]\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\sin\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2\right] = 0$$

Fazendo as derivadas obtemos a seguinte equação do movimento (r):

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-b).$$

Agora faremos para coordenada (θ):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2\right]\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2\right] = 0$$

Fazendo as derivadas obtemos a seguinte equação

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr\sin\theta.$$

Pela formulação de Hamilton, como já temos a energia cinética, potencial e a lagrangiana, podemos encontrar o momento canônico conjugado para as duas coordenadas já escolhidas, com isso temos

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{p_r}{mr^2}$$

Com esses resultados podemos construir a hamiltoniana do sistema que pode ser obtida vide equação (4.4.2).

$$H = p(\dot{r} + \dot{\theta}) - L$$

Fazendo as substituições e as devidas manipulações, temos

$$H = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} - mg\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2$$

Agora podemos encontrar as equações de Hamilton para esse sistema. Para derivada de H em relação a coordenada p_r:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial}{\partial p_r}\left[\frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^r} - mg\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2\right] = \frac{p_r}{m} \qquad \Rightarrow \qquad p_r = m\dot{r},$$

derivando no tempo, temos

$$\dot{p}_r = m\ddot{r}.$$

Para coordenada p_θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left[\frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} - mg\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2\right] = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \Rightarrow \qquad p_\theta = mr^2,$$

derivando no tempo, temos

$$\dot{p}_\theta = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}.$$

Para segunda equação de Hamilton, temos

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2\right]$$

$$\dot{p}_r = -\left[-\frac{{p_\theta}^2}{mr^3} - mg\cos\theta + k(r-b)\right]$$

$$\Rightarrow \ \dot{p}_r = \frac{{p_\theta}^2}{mr^3} + mg\cos\theta - k(r-b).$$

Relacionando a primeira equação de Hamilton com a segunda para a coordenada r, obtemos

$$m\ddot{r} = \frac{{p_\theta}^2}{mr^3} + mg\cos\theta - k(r-b).$$

Essa é a equação de movimento para esse sistema em termos das coordenadas generalizadas (r, p), para compararmos com as equações obtidas pela formulação de Lagrange precisamos escrever essa equação em termos das mesmas coordenadas. Para isso vamos fazer uma substituição obtida anteriormente quando se calculou o momento canônico conjugado para θ, sendo esse, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ obtemos

$$m\ddot{r} = mr^2\dot{\theta} + mg\cos\theta - k(r-b).$$

que é a mesma equação que obtivemos pela formulação newtoniana e lagrangiana.

Para derivada da hamiltoniana em relação a coordenada generalizada θ, temos

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2\right]$$

Fazendo as derivadas obtemos

$$\dot{p}_\theta = -mgr\sin\theta,$$

que relacionando com a primeira equação obtida para essa coordenada temos

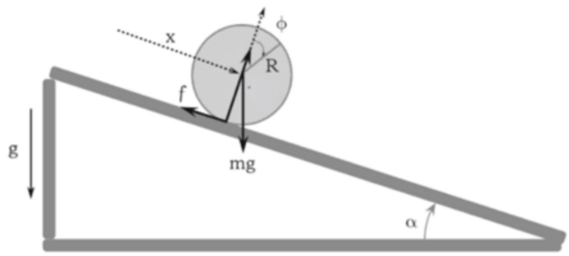
$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = -mgr\sin\theta.$$

Essa é a segunda equação de movimento para esse sistema.

-Problema 04: *Seja um disco rolando sem deslizar por um plano inclinado fixo. Encontre as acelerações linear e angular do disco. Considere o eixo das ordenadas positiva para cima e o eixo das abscissas também positiva para direita. O disco rola sem deslizar em um plano inclinado da esquerda para direita.*

Para esse sistema, temos que levar em consideração dois tipos de movimento. O movimento de rotação em torno do centro de massa, e o movimento de translação do disco. Então faremos uso da segunda lei de Newton para esses dois movimentos.

Figura 02: Disco rolando plano inclinado sem deslizamento.



Fonte: LAGE, E.J.S. Mecânica Avançada. U. Porto Editorial. Porto. 2015

Para o movimento de translação a segunda lei de Newton é

$$\sum(\vec{F}_{res} = M\vec{a}_{cm}).$$

Decompondo as força gravitacional em suas respectivas componentes, para y, temos

$$N - Mg\cos\theta = Ma_y = 0$$

$$N = Mg\cos\theta,$$

isso significa que não há movimento na direção y, logo aceleração é igual a zero. Para direção x, as forças atuantes são

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{cm}.$$

Essa é equação que contribui para o movimento de translação levando em consideração que $ma_y = 0$.

Para o movimento de rotação a segunda lei de Newton pode ser expressa como

$$\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}$$

Onde I é o momento de inércia e $\vec{\alpha}$ é a aceleração angular. O torque também pode ser dado pelo produto vetorial de $\vec{r}$ e a força tangencial F_t que causa a rotação. Para esse sistema a forca tangencial ou força que causa a rotação é à força de atrito. Com isso, podemos escrever que,

$$\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}$$

$$R.f_s = I\alpha$$

Agora vamos relacionar a aceleração angular com a aceleração linear, para isso como se trata de um rolamento sem deslizar vale a expressão

$$\vec{v}_{cm} = R\vec{\omega},$$

derivando, temos que

$$\vec{a}_{cm} = R\vec{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\alpha} = \frac{\vec{a}_{cm}}{R},$$

Logo podemos substituir $\vec{\alpha}$ e encontrar a força de atrito

$$f_s = I\frac{a_{cm}}{R^2}$$

Dessa forma podemos substituir na primeira equação e encontrar a aceleração para o movimento translacional

$$Mg\sin\theta - I\frac{a_{cm}}{R^2} = Ma_{cm}$$

$$Ma_{cm} + I\frac{a_{cm}}{R^2} = Mg\sin\theta,$$

$$a_{cm}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) = Mg\sin\theta$$

$$a_{cm}M\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) = Mg\sin\theta$$

$$a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

Essa é a aceleração linear para o movimento translacional do centro de massa em termos do momento de inércia. Como o momento de inércia é tabelado, para um disco maciço ele vale $\frac{1}{2}MR^2$. Substituindo esse valor na equação a cima, podemos obter a mesma aceleração, mas sem a dependência no momento de inércia.

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Para a aceleração angular, substituiremos a força de atrito na equação do movimento rotacional

$$RI\frac{a_{cm}}{R^2} = I\alpha,$$

Simplificando os termos simétricos e substituindo a aceleração linear já encontrada, temos

$$\alpha = \frac{2g\sin\theta}{3R},$$

que é a aceleração angular do sistema.

Agora vamos resolver esse problema usando a formulação Lagrangiana. De início vamos definir quem são as coordenadas generalizadas.

Vamos usar como coordenadas generalizadas x que é a direção que o disco transladou e ϕ sendo a variação do ângulo. A equação de vínculo para esse sistema é

$$f(x,\phi) = x - R\phi = 0.$$

A energia cinética para esse sistema vai ser soma desta energia para o movimento translacional e rotacional, o que nos permite escrever como:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

Com já foi mencionado anteriormente o valor do momento de inércia de um disco é tabelado, o que nos permite substituir e escrever a energia como sendo

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2.$$

A energia potencial é

$$U = -mgh$$

$$U = -mgx\sin\alpha.$$

Dessa a forma podemos escrever a lagrangiana do sistema como sendo

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2 + mgx\sin\alpha.$$

Para resolução desde problema faremos o uso dos multiplicadores de Lagrange para incluir a força de vínculo. Esse método consiste basicamente na resolução das equações

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

Em que λ_k são os multiplicadores de Lagrange, que fornecem as forças de vínculo generalizadas (LEMOS, 2011)

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}.$$

Para o sistema em caso, temos as seguintes equações de acordo com as coordenadas generalizadas escolhidas

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \lambda\frac{\partial f(x,\phi)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) + \lambda\frac{\partial f(x,\phi)}{\partial \phi} = 0,$$

Fazendo a derivada para primeira equação em relação a lagrangiana, temos

$$mg\sin\alpha - \frac{d}{dx}(m\dot{x}) + \lambda.1 = 0$$

$$mg\sin\alpha - m\ddot{x} + \lambda = 0.$$

Fazendo a derivada para segunda equação, temos

$$0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}\right) + \lambda.(-R) = 0$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} - \lambda R = 0,$$

fatorando R nesta equação anterior, podemos isolar λ, com isso temos que

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} m R \ddot{\phi}.$$

Pela equação de vínculo, que é a condição de não deslizamento, podemos obter a relação da velocidade linear coma velocidade angular

$$x - R\phi = 0$$

$$\dot{x} = R\dot{\phi}$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = \tfrac{\ddot{x}}{R}.$$

Substituindo esse resultado em λ, temos

$$\lambda = -\frac{1}{2} m R \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} m \ddot{x}.$$

Agora vamos retomar a primeira equação de movimento e substituir este valor de λ:

$$mg \sin\alpha - m\ddot{x} - \frac{1}{2} m\ddot{x} = 0$$

$$mg \sin\alpha - m\ddot{x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$mg \sin\alpha - \frac{3}{2} m\ddot{x} = 0$$

Essa é a equação de movimento para esse sistema considerado. Como o problema pede a velocidade linear e angular do sistema, podemos multiplicar essa equação por m e isolar a aceleração linear, logo temos

$$\ddot{x} = \tfrac{2}{3} g \sin\alpha.$$

Para a aceleração angular vamos substituir a aceleração linear já encontrada na equação que relaciona ambas velocidades linear e angular

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{R}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{2}{3R} g \sin \alpha.$$

Resolvendo pela formulação hamiltoniana, a equação de vínculo já mencionada é:

$$x - R\phi = 0.$$

As coordenadas generalizadas são ($x\ e\ \phi$), como já escrevemos a energia cinética e potencial na formulação anterior. Porém, sabemos que $\dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$ de acordo com a equação de vínculo. Dessa forma, podemos escrever a energia cinética em termos de uma mesma coordenada, vejamos, se

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} mR^2 \dot{\phi}^2,$$

Substituindo a relação $\dot{\phi}$, temos:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} m\dot{x}^2.$$

Rescrevendo a lagrangiana,

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha,$$

$L = \frac{3}{4} m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha$. Sendo o sistema conservativo já temos a hamiltoniana do sistema

$$H = \frac{3}{4} m\dot{x}^2 + mgx \sin \alpha.$$

Para escrever em termos dos momentos generalizados precisamos calcular o momento canônico conjugado, para isso usamos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Logo, temos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m\dot{x} \quad \Rightarrow \dot{x} = \frac{2p_x}{3m}$$

Portanto a hamiltoniana

$$H = \frac{1}{3} \frac{p_x{}^2}{m} + mgx \sin \alpha.$$

Calculando a primeira equação canônica de Hamilton, temos

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2p_x}{3m}$$

$$\Rightarrow\ p_x = \frac{3}{2}m\dot{x}$$

Derivando no tempo

$$\dot{p}_x = \frac{3}{2}m\ddot{x}.$$

Calculando a segunda equação, temos

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial(-mgx\sin\alpha)}{\partial x} = mg\sin\alpha.$$

Relacionando as equações obtidas, temos

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} = mg\sin\alpha,$$

Que isolando $\ddot{x}$, temos a aceleração linear do bloco, a mesma equação obtida nas duas outras formulações. Para aceleração angular como já foi mostrado basto substituir o valor desta aceleração na equação $\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{R}$, e encontramos

$$\ddot{\phi} = \frac{2g\sin\alpha}{3R}.$$

As soluções dos problemas usando as abordagens de Newton, Lagrange e Hamilton mostram as diferenças entre esses formalismos da mecânica clássica, apesar de sempre chegarmos aos mesmos resultados, independentes de qual dos três métodos utilizado.

Quanto às diferenças, elas se manifestam na maneira como resolvemos o problema. No primeiro, se tratava de um bloco deslizando um plano inclinado sem atrito. Um problema simples do ponto de vista dos demais. Na formulação de Newton, utilizamos os conceitos de forças e álgebra vetorial, que são eficazes para encontrar soluções de sistemas simples, mas tornam-se mais complicada quando há geometrias mais complexas, forças de vínculo e sistemas com mais de dois corpos.

Por outro lado, a mecânica de Lagrange funciona bem para sistemas simples, como evidenciado no mesmo exemplo do bloco no plano inclinado. Bastando apenas identificar os vínculos, definir as coordenadas generalizadas e as velocidades, e partir disso obter as energias cinética e potencial. Vale enfatizar que em alguns casos é mais difícil escrever a energia cinética do sistema do que resolver a equação de Euler-Lagrange. É claro que isso depende do sistema considerado e da quantidade de coordenadas que é necessário para descrever o sistema. Mas uma vez que você tem a energia cinética e potencial você escreve a lagrangiana e encontra as equações de movimento de forma direta fazendo as derivadas em relação às coordenadas identificadas. Além disso, todas as operações são realizadas com grandezas escalares, o que permite certa facilidade em relação formulação newtoniana que faz uma abordagem vetorial do sistema.

A última formulação estudada foi à mecânica hamiltoniana que também se mostrou eficiente, pois precisamos apenas definir os vínculos, coordenadas generalizadas, momentos canônicos e a lagrangiana. A partir daí, podemos construir a hamiltoniana do sistema que é o que precisamos para obter as equações canônicas de Hamilton. Um significado muito importante para a hamiltoniana é que em alguns casos ela é a energia total do sistema, e isso é uns dos princípios mais importantes na Física.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho exploramos as diferentes formulações da Mecânica Clássica, comparando a abordagem newtoniana com as mecânicas de Lagrange e Hamilton. Iniciamos nosso estudo revisando as leis fundamentais do movimento formuladas por Issac Newton, que são à base da mecânica clássica. Em seguida, introduzimos a mecânica de Lagrange, derivando as equações de movimento a partir do princípio da mínima Ação de Hamilton. Finalmente, apresentamos as equações canônicas de Hamilton, destacando suas aplicações em sistemas conservativos onde a hamiltoniana representa a energia total do sistema.

Através da resolução de problemas específicos desenvolvidos no decorrer deste trabalho, conseguimos demostrar a equivalência entre as diferentes formulações. Nossos resultados mostram que, embora todas as abordagens conduzam as mesmas equações de movimento, a escolha da formulação pode influenciar a simplicidade e a eficiência na resolução dos problemas. A mecânica de Lagrange se mostrou particularmente eficaz para sistemas com vínculos, permitindo uma derivação mais direta das equações de movimento.

Dessa forma, conclui-se que escolha entre as diferentes formulações deve ser orientada pela natureza do problema a ser resolvido. A abordagem newtoniana é intuitiva e direta para sistemas simples, enquanto as formulações de Lagrange e Hamilton oferecem vantagens significativas em termos de flexibilidade e eficiência para sistemas mais complexos. Por fim, a compreensão profunda das três abordagens proporciona uma poderosa ferramenta para o estudo de uma ampla gama de problemas na Física clássica e moderna.

REFERÊNCIAS

BARCELOS, J.B. **Mecânica newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana**. 2. Ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2013.

BASSALO, J. M. Filardo; CATTANI, M. S. Dorsa. **Elementos de Física Matemática -Vol. 2.** 1.ed. Livraria da Física. SP, 2011.

CASTEJON, M. **Formalismo da Mecânica Clássica Alicerce da Mecânica Quântica.** Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro – São Paulo 2011.

FERNANDES, M. **Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano com Aplicações em Sistemas físicos.** Centro de Ciências Exatas Departamento de Física. Maringá, 29 de novembro de 2018.

INÁCIO, L.F.C. **Uma introdução à Teoria de Campos.** Centro de Estudos Superiores de Tefé-CEST, 2021.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica.** 2ª.ed. Livraria da Física. São Paulo, 2013.

NETO, J.B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica I**. São Paulo: Edgard Blucher.OLIVEIRA, W. *Notas de aula de Mecânica Clássica II*. Departamento de Física UFJF 2007

PINHEIRO, M.P. **Formulação Lagrangiana e Hamiltoniana para Sistemas Dissipativos: Aplicada no Lançamento Oblíquo Sujeito a Resistência do Ar.** Abaetetuba-PA 2021.

ROONEY, A. **História da Física**. M Books Editora, 2011

SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campos 1996.

TAYLOR, J. R. **Mecânica clássica**. Bookman Editora, 2013