

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
ESCOLA NORMAL SUPERIOR  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ABRAHÃO QUEIROZ DA SILVA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO MÉDIO DO AR PARA ÁREAS  
DE FLORESTA DA AMAZÔNIA**

**MANAUS, FEVEREIRO**

**2024**



ABRAHÃO QUEIROZ DA SILVA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO MÉDIO DO AR PARA ÁREAS  
DE FLORESTA DA AMAZÔNIA**

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas, apresentado com um dos requisitos para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles

**MANAUS, FEVEREIRO**

**2024**



À minha família, fonte de  
minha inspiração, motivação e  
determinação.



## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, Yeshua Hamashia, por ter me proporcionado tudo o que tenho na vida, a oportunidade de me formar na UEA, a saúde, o desejo e os meios para cumprir com os desafios da graduação.

Aos meus Pais, Willer Aleksandro Lemos da Silva e Maria Lucicleia Queiroz da Silva, por não terem medido esforços para me auxiliar nessa longa jornada que se consuma com este trabalho.

Ao Prof. Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles, por ter sido muito mais que um orientador, mas um mestre de Karatê, um conselheiro, um amigo e uma fonte de inspiração.

Aos meus irmãos, Lucas Queiroz da Silva e Ana Laís Queiroz da Silva, por estarem sempre ao meu lado.

Aos meus amigos da UEA que sempre pude contar com o apoio, o auxílio e a parceria.

Aos meus tios José Alcântara e Maria Lucirene e primos, Marcos e Daniel Alcântara pelo incentivo.

Ao meu amigo Jhon Cristian, por ser inspiração e parceiro nos treinos, estudos e na música.

Aos Professores da residência pedagógica, Nadime Mustafa e Sebastião da Silva, pela oportunidade, pela paciência e pela sabedoria.

A Todos os professores da UEA que tive a oportunidade de conhecer, pelo carinho e ensino.

Muito Obrigado!





## RESUMO

Devido à grande extensão da floresta Amazônica e de sua interação com o escoamento atmosférico, realizou-se um estudo de modelagem matemática que relaciona o tipo de distribuição vertical de matéria vegetal com este escoamento. Especificamente, consideraram-se dois modelos: um com densidade de área foliar constante com a altura, chamado de “retangular”, e outro com variação linear dessa densidade, crescente entre o nível do solo e um ponto de maior concentração de biomassa,  $z_m$ , e decrescente entre  $z_m$  e o topo da floresta, chamado de “triangular”. Aplicaram-se estes modelos de biomassa na equação de Navier-Stokes, estruturando-se um termo que expressa a força de arrasto entre a folhagem e o ar, para se obter a descrição matemática do escoamento estacionário em áreas de floresta da Amazônia. Por meio da realização de testes com a variação dos parâmetros de entrada dos modelos obtidos, verificou-se maior sensibilidade em relação à viscosidade do ar, à variação horizontal de pressão e ao termo que expressa a taxa de absorção de quantidade de movimento do escoamento. Os resultados, de aplicação dos modelos matemáticos desenvolvidos para uma área de floresta da Amazônia, apresentaram boa correspondência com os perfis de velocidade do vento gerados com dados coletados na Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã, com coeficientes de determinação ( $R^2$ ), para as estações seca e chuvosa, iguais a, respectivamente, 0,981 e 0,989. Conclui-se, então, que o modelo triangular, apesar de incluir mais variáveis em sua concepção e demandar mais esforço para se obterem soluções para as equações diferenciais que o descrevem, apresenta aproximações, aos dados observacionais, ligeiramente menores que o modelo retangular, que é mais simples e de obtenção e aplicação menos trabalhosas.

**PALAVRAS CHAVES:** Modelagem Matemática; Escoamento do Ar; Amazônia.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Escoamento laminar sobre um automóvel num túnel de vento da indústria automobilística; b) Representação do escoamento sobre uma asa, apresentando uma região turbulenta. ....	22
Figura 2 – Perfil vertical da velocidade do vento obtida pelo Modelo Yi (linha preta contínua) comparado aos dados coletados (círculos coloridos – cada cor representa um local distinto) em diferentes sítios experimentais da Amazônia (para maiores detalhes, consultar Santana, 2017).....	26
Figura 3 – Da mesma forma que a Figura 2, mas para o Modelo Souza (linha cinza contínua). ....	27
Figura 4 – Da mesma forma que a Figura 3, mas para o Modelo Souza Modificado (linha preta tracejada). ....	28
Figura 5 – Perfil vertical (na direção $z$ ) da componente horizontal da velocidade, $u$ , para o escoamento de um fluido newtoniano sobre uma superfície fixa. ....	29
Figura 6 – Perfis verticais da estimativa da densidade de área foliar, determinadas por Tóta et al. (2012), para três áreas de floresta da Rebio Cuieiras: a) vale, b) declive e c) platô. ....	37
Figura 7 – Modelo de arquitetura florestal retangular, considerando $h = 30$ m e $I_{AF} = 7,0$ , sobre o perfil vertical da estimativa da densidade de área foliar, determinada por Tóta et al. (2012), para uma área de platô da floresta da Rebio Cuieiras. ....	39
Figura 8 – Da mesma forma que a Figura 7, mas com o modelo de arquitetura florestal retangular ajustado pela altura de deslocamento, $h' = 0,75h$ .....	40
Figura 9 – Da mesma forma que a Figura 7, mas para o modelo de arquitetura florestal triangular. ....	41
Figura 10 – Regressão linear de mínimos quadrados para a determinação de $\gamma$ , para as estações: a) seca e b) chuvosa. ....	46
Figura 11 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de altura da floresta, $h$ .....	48

Figura 12 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de viscosidade do ar, $\mu$ .	48
Figura 13 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de velocidade no topo da floresta, $u_h$ .	49
Figura 14 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de variação horizontal de pressão, $\gamma$ .	49
Figura 15 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de altura de cruzeiro, $H$ , dados por $H = \kappa h$ .	50
Figura 16 – Aproximação empírica para a taxa de absorção de QML, $\vartheta_a$ , por meio da comparação da linha do modelo com os dados médios da velocidade do vento no interior da floresta para as estações: a) seca e b) chuvosa.	52
Figura 17 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de altura da floresta, $h$ .	56
Figura 18 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de índice de área foliar, $I_{AF}$ .	57
Figura 19 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de taxa de absorção de QML, $\vartheta_a$ .	57
Figura 20 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de velocidade no topo da floresta, $u_h$ .	58
Figura 21 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de variação horizontal de pressão, $\gamma$ .	58
Figura 22 – Perfis verticais de velocidade do MEIF-T, para três diferentes valores de altura de maior concentração de biomassa, $z_m$ .	59
Figura 23 – Perfis verticais de velocidade dos modelos juntamente com o perfil gerado pelas médias dos dados coletados na RDSU, para a estação seca.	60
Figura 24 – Perfis verticais de velocidade dos modelos juntamente com o perfil gerado pelas médias dos dados coletados na RDSU, para a estação chuvosa.	60

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
RDSU	Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã
QML	Quantidade de Movimento Linear
ATTO	<i>Amazon Tall Tower Observatory</i>
CC	Condições de Contorno
MEAF	Modelo para o Escoamento Acima da Floresta
MEIFs	Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta
MEIF-R	Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta Retangular
MEIF-T	Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta Triangular



**TERMO DE APROVAÇÃO DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da UEA, do aluno **ABRAHÃO QUEIROZ DA SILVA**.

Em 27 de fevereiro de 2024, às 18 horas, na Sala Jacobede Oliveira, no município de Manaus – AM, na presença da Banca Avaliadora, composta pelos professores Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles (orientador e presidente da banca), Dr. Almir Cunha da Graça Neto (convidado) e Dra. Nadime Mustafa Moraes (convidada), o aluno **ABRAHÃO QUEIROZ DA SILVA** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso em Licenciatura em Matemática da UEA, intitulado: **“MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO MÉDIO DO AR PARA ÁREAS DE FLORESTA DA AMAZÔNIA”**.

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, com a nota 9,9 (nove, nove), divulgando o resultado ao aluno e aos demais presentes.

Manaus, 27 de fevereiro de 2024.




---

Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles  
(Orientador e Presidente da Banca)



---

Dr. Almir Cunha da Graça Neto  
(Professor Convidado)



---

Dra. Nadime Mustafa Moraes  
(Professora Convidada)



---

Abrahão Queiroz da Silva  
(Aluno)





## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>19</b>
<b>CAPÍTULO 1: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>21</b>
1.1 O escoamento do Ar .....	21
1.2 A Equação de Cauchy .....	23
1.3 Modelos Matemáticos para o Vento Médio em Florestas da Amazônia.....	25
1.3.1 Modelo Yi.....	25
1.3.2 Modelo Souza.....	26
1.3.3 Modelo Souza Modificado.....	27
<b>CAPÍTULO 2: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>29</b>
2.1 As Equações de Navier-Stokes.....	29
2.2 Equações de Navier-Stokes para escoamento estacionário sobre florestas .	32
<b>CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DA PESQUISA</b> .....	<b>35</b>
3.1 A abordagem e as estratégias de investigação .....	35
3.2 Modelagem matemática do escoamento de ar em florestas .....	35
3.3 Sítio experimental e suas características .....	43
3.4 Instrumentação e medidas .....	44
<b>CAPÍTULO 4: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....	<b>45</b>
4.1 Modelo matemático para o escoamento acima da floresta .....	45
4.2 Testes de sensibilidade com o modelo para o escoamento acima da floresta .....	47
4.3 Modelos matemáticos para o escoamento no interior da floresta .....	50
4.3.1 Modelo retangular.....	51
4.3.2 Modelo triangular .....	53

4.4 Testes de Sensibilidade com os Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta .....	54
4.5 Validação dos Modelos .....	59
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO .....</b>	<b>67</b>
<b>RESOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO ESCOAMENTO .....</b>	<b>67</b>

## INTRODUÇÃO

A Matemática Aplicada à descrição dos fenômenos naturais, apesar de sua grande importância prática, é um tema pouco explorado ao longo da graduação, ficando, quase que exclusivamente, a cargo das disciplinas de Física e de certos problemas nos quais se aplicam as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Dessa forma, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) utiliza a modelagem matemática aplicada ao estudo do escoamento médio do ar em florestas da Amazônia, com ênfase em Mecânica dos Fluidos e Física-Matemática, dada a sua importância como base fundamental para o entendimento dos processos físicos que ocorrem entre regiões florestadas e a atmosfera.

Nesse sentido, desenvolveram-se modelos matemáticos que buscam descrever, adequadamente, o escoamento médio do ar no interior e acima de áreas de florestas da Amazônia. Para a realização de simulações e a avaliação da validade dos modelos, utilizaram-se dados coletados na Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã (RDSU), localizada na Amazônia Central, nas proximidades da Hidrelétrica de Balbina. A modelagem foi realizada considerando o escoamento do ar estacionário, laminar e unidirecional, o que simplifica a modelagem, mas foram incluídos os efeitos da viscosidade e, conseqüentemente, da rotação. A ação da rugosidade das árvores sobre o escoamento foi considerada no modelo, por meio de um parâmetro de absorção de Quantidade de Movimento Linear (QML), que se opõe à velocidade de escoamento e está relacionado à arquitetura da floresta. O modelo matemático deste parâmetro apresenta uma forma similar ao da força de arrasto (força de resistência, semelhante ao atrito, sobre corpos sólidos em movimento num fluido), a baixas velocidades. A arquitetura da floresta é representada utilizando-se dois padrões geométricos bidimensionais distintos, que resultaram em diferentes soluções: (i) retangular e (ii) triangular. A partir das equações resultantes dos modelos matemáticos, foram gerados perfis verticais de velocidade do escoamento para diferentes arquiteturas (geometria, altura, distribuição da folhagem e densidade da floresta) e taxas de absorção de QML.

Os deslocamentos de massas de ar, de grandes dimensões ou de pequenas parcelas, são fenômenos relativamente complexos e o seu estudo é de grande importância para a caracterização física e climática de uma determinada região de

interesse. Quaisquer movimentos do ar atmosférico, que ocorrem naturalmente, a grandes alturas ou próximos a superfícies, podem ser designados genericamente “ventos”. Esses movimentos podem provocar, aos obstáculos que se interpõem em sua trajetória, danos de intensidades proporcionais à QML transferida. Especificamente, sobre uma cobertura vegetal, os danos vão desde o estímulo excessivo à evapotranspiração (liberação de vapor de água das folhas da vegetação, por evaporação e transpiração) até o efeito mecânico da quebra de galhos e do arrancamento de plantas do solo (OMETTO, 1981). Assim, por meio do estudo e da aplicação da modelagem matemática ao escoamento do ar em áreas de floresta, este trabalho buscou descrever o comportamento do ar para diferentes geometrias de floresta e aspectos do vento, contribuindo, desse modo, para a modelagem dos processos físicos de troca de energia e massa para as mais variadas regiões da floresta Amazônica, como pastagem, campina, campinarana e terra firme.

O objetivo geral foi obter modelos matemáticos que descrevam o escoamento médio do ar (para períodos longos, como estações do ano, por exemplo) em áreas de florestas da Amazônia, testando sua validade com dados coletados na RDSU.

Os objetivos específicos foram:

- Elaborar, por meio da aplicação das equações de Navier-Stokes (Segunda Lei de Newton para o escoamento de fluidos) e da resolução das EDOs resultantes, modelos matemáticos para o escoamento médio de ar em florestas da Amazônia.
- Verificar a sensibilidade das equações dos modelos às variações de gradiente de pressão, viscosidade, arquitetura do ambiente florestal e parâmetro de absorção da QML.
- Confrontar os perfis verticais de velocidade de escoamento gerados pelas soluções dos modelos com dados coletados na RDSU.

## CAPÍTULO 1

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 1.1 O escoamento do Ar<sup>1</sup>

Chama-se de vento, genericamente, o movimento do ar, em pequena escala, ou o deslocamento de grandes massas de ar atmosférico, em determinadas direção e sentido. Este tipo de fluxo de massa (ou escoamento) possui várias especificações que determinam sua natureza, conforme detalha-se nos parágrafos seguintes. Assim, antes de se categorizar o tipo de escoamento que será analisado neste trabalho, precisa-se compreender algumas características gerais do escoamento de fluidos.

O escoamento de um fluido pode se dar de forma transiente ou estacionária. Mais especificamente, pode-se descrever um escoamento com base nas variações das grandezas relevantes para este tipo de fluxo como, por exemplo, pressão, massa específica e velocidade. Se as variáveis, em análise, se modificam com passar do tempo, trata-se de um escoamento transiente ou não-estacionário; em contrapartida, e elas não se modificam com o tempo, ou seja, permanecem constantes, durante o intervalo considerado, trata-se de um escoamento estacionário ou permanente.

Outra característica importante sobre o escoamento é a compressibilidade. Se para quaisquer partes do fluido em que se aplique um aumento de pressão e esse fluido for incompressível, este aumento será distribuído igualmente sobre todo o fluido, segundo o princípio de Pascal. Dessa forma, um fluido incompressível é aquele que se alterada quaisquer características mecânicas do mesmo, ela é incorporada em toda sua massa. Do contrário, será compressível. Vale ressaltar que, se o escoamento ocorre a baixas velocidades (abaixo de 30 % da velocidade de propagação de ondas sonoras no ar, isto é, menor que 103 m/s), este pode ser considerado, aproximadamente, incompressível.

Dependendo do local onde ocorre o escoamento, isto é, se há superfícies sólidas e/ou outro tipo de fluido em seu caminho, pode-se considerar o efeito da viscosidade (medida de quanto o fluido “gruda” numa superfície). Nesse caso, um escoamento viscoso pode ser assemelhado a um deslizamento com atrito, ou seja, as

---

<sup>1</sup>As informações contidas nessa Sessão, a partir do segundo parágrafo, são baseadas na obra de Halliday et al. (2016b).

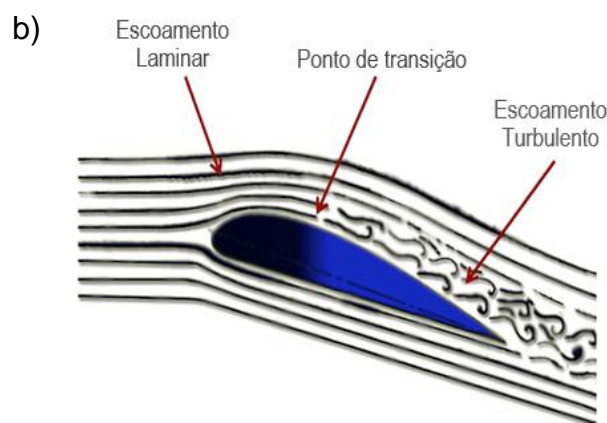
camadas de fluido em contato com a superfície (em repouso) serão desaceleradas e estas diminuirão a velocidade das outras em contato com elas, por meio da influência da viscosidade. Pode-se citar, como exemplo, o contato do ar em movimento com a copa das árvores, pois, nesse caso, o escoamento será viscoso, visto que as copas das árvores exercerão resistência à passagem do ar.

Um escoamento pode ser laminar ou turbulento. O primeiro trata-se de um fluxo lento e bem definido, que pode ser representado em camadas paralelas que seguem sua trajetória de forma organizada, como, por exemplo, o fluxo de ar que passa por um carro de maneira uniforme (Figura 1a). O segundo trata-se de um escoamento com altas velocidades ou quando há superfícies no caminho do fluxo que não possuem aerodinâmica adequada, fazendo com que o escoamento apresente trajetórias desorganizadas ou altamente variáveis com o tempo (Figura 1b). Em síntese, o escoamento laminar passa a ser turbulento quando atinge velocidades críticas ou quando entra em contato com superfícies com aerodinâmica inadequada.

Figura 1 – a) Escoamento laminar sobre um automóvel num túnel de vento da indústria automobilística; b) Representação do escoamento sobre uma asa, apresentando uma região turbulenta.



Fonte: Autoo (2023).



Fonte: Aeroflap (2023).

Por último, o escoamento pode ser rotacional ou irrotacional. Como o próprio nome sugere, o escoamento rotacional é aquele em que o fluido rotaciona ao longo do seu trajeto. Por exemplo, é possível observar que aviões, ao passarem realizando rasantes próximos a superfícies com areia, eles criam vórtices (ou turbilhões). Isso ocorre pois, para as altas velocidades de passagem dos aviões, juntamente com a

influência da viscosidade, as parcelas do ar próxima às suas asas movimentam-se mais rapidamente que aquelas próximas à superfície, fazendo com que ocorra a rotação dessas parcelas de ar.

## 1.2 A Equação de Cauchy

A equação de Cauchy é uma equação diferencial parcial vetorial, apresentada por Cauchy no início do século XIX, que descreve o transporte de QML em qualquer meio contínuo (não somente fluidos). Para a finalidade deste trabalho, esta equação pode ser apresentada a partir da Segunda Lei de Newton aplicada a um elemento de fluido infinitesimal. Dessa forma, conforme a Segunda Lei de Newton, a QML de uma partícula,  $\vec{Q} = m\vec{V}$  (na qual  $m$  é a massa e  $\vec{V}$  é a velocidade), varia em razão de uma combinação de forças,  $\Sigma\vec{F}$ , que atuam sobre ela, ou seja:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \Sigma\vec{F} \quad (1.1)$$

Para o caso em que a massa da partícula não varia com o tempo (situação mais comum de aplicação na mecânica newtoniana), a equação 1.1 fica:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma\vec{F} \quad (1.2)$$

De forma bastante simplificada e resumida, apresenta-se, abaixo, o desenvolvimento da equação 1.2 para o caso do escoamento de um fluido, aplicando-a a uma pequena parcela de massa  $\delta m$  e volume  $\delta\gamma$ , baseando-se em Michiles (2019). Assim sendo, podem-se dividir as forças atuantes sobre a parcela em volumétricas (atuam por todos os pontos do volume  $\delta\gamma$ ),  $\delta\vec{F}_\gamma$ , e superficiais (atuam sobre a superfície que cerca o volume  $\delta\gamma$ ),  $\delta\vec{F}_s$ , podendo-se reescrever a equação 1.2 como:

$$\delta m \frac{D\vec{V}}{Dt} = \delta\vec{F}_\gamma + \delta\vec{F}_s \quad (1.3)$$

na qual a operação  $D/Dt$ , que substitui  $d/dt$  na equação 1.2, representa as variações das propriedades do escoamento no tempo e no espaço tridimensional e é conhecida como *derivada substantiva* ou *material*, sendo especificada por:

$$\frac{D}{Dt} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.4)$$

O primeiro termo do lado direito da equação 1.4, isto é,  $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ , representa a variação de alguma propriedade do escoamento no espaço e é chamado de *derivada advectiva*, enquanto o segundo termo, ou seja,  $\partial/\partial t$ , é conhecido como *derivada local*, e determina a variação da propriedade com o tempo, num determinado ponto fixo do escoamento. Quando a propriedade, cuja variação estiver sendo calculada pela derivada substantiva, for a velocidade, tem-se a aceleração. Portanto, sendo esta dividida em aceleração advectiva,  $\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\vec{V}$ , e aceleração local,  $\partial\vec{V}/\partial t$ .

Voltando à equação 1.3 e dividindo-a pelo volume da parcela de fluido,  $\delta\gamma$ , fica-se com:

$$\frac{\delta m}{\delta\gamma} \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\delta\vec{F}_\gamma}{\delta\gamma} + \frac{\delta\vec{F}_s}{\delta\gamma} \quad (1.5)$$

Na equação 1.5, pode-se, ainda, escrever a força volumétrica  $\delta\vec{F}_\gamma$  como  $\delta m \vec{f}$ , na qual  $\vec{f}$  é a força volumétrica por unidade de massa, e, de modo simplificado, o volume  $\delta\gamma$  como  $\delta\ell\delta A$ , em que  $\delta\ell$  e  $\delta A$  são, respectivamente, elementos de comprimento e área da parcela de fluido. Assim, obtém-se:

$$\frac{\delta m}{\delta\gamma} \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\delta m}{\delta\gamma} \vec{f} + \frac{1}{\delta\ell} \frac{\delta\vec{F}_s}{\delta A} \quad (1.6)$$

Agora, considerando, na equação 1.6: (i) o limite em que o volume da parcela de fluido tende a um valor infinitesimal (que não pode ser zero, pois, no domínio da Mecânica dos Fluidos, a parcela não se torna um ponto, mas mantém as características de um meio contínuo num volume mínimo); (ii) que  $\delta m/\delta\gamma$  é a massa específica,  $\rho$ , do fluido; (iii) que a razão  $\delta\vec{F}_s/\delta A$  representa uma grandeza física chamada vetor tensão,  $\vec{\Gamma}$ . Após algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} + \vec{V} \cdot \vec{\Gamma} \quad (1.7)$$

na qual  $\vec{\Gamma}$  é o *tensor* tensão, que possui nove componentes (duas tangencias e uma normal, em cada direção definida num sistema de coordenadas ortogonais) e define o campo de tensões que atua sobre o elemento de volume infinitesimal da parcela de fluido. A equação 1.7 é conhecida como equação de Cauchy (ACHESON, 1990).



### 1.3 Modelos Matemáticos para o Vento Médio em Florestas da Amazônia

Dentre os estudos mais recentes que tratam de modelos matemáticos para o escoamento médio do ar acima e no interior de florestas da Amazônia, destacam-se Yi (2008), Souza et al. (2016) e Santana (2017).

Os modelos apresentados nos trabalhos de Yi (2008) e Souza et al. (2016) foram testados por Santana (2017), que utilizou dados coletados em diferentes sítios de florestas da Amazônia e apresentou uma versão modificada do modelo de Souza et al. (2016). Nesta Seção, são apresentados os referidos modelos, denominando-os, respectivamente, de Modelo Yi, Modelo Souza e Modelo Souza Modificado, e os principais resultados dos testes de Santana (2017).

#### 1.3.1 Modelo Yi

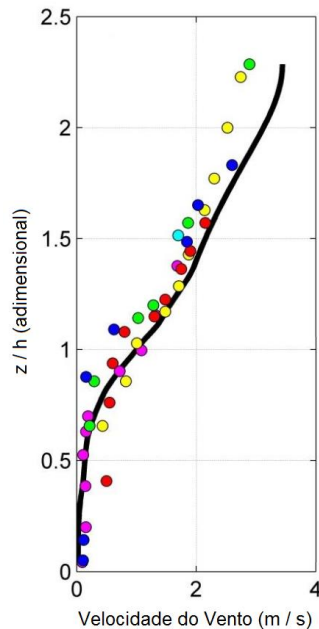
O modelo matemático desenvolvido por Yi (2008) expressa o perfil vertical da velocidade do vento relacionando-o ao coeficiente de resistência aerodinâmica (ou de arrasto),  $c_D$ , à altura da floresta,  $h$ , e aos índices de área foliar total,  $I_{AF}$ , e cumulativo,  $I(z)$  (estes índices são apresentados, formalmente, na Seção 3.2). A equação deste modelo é:

$$u(z) = u_h \frac{c_D(h)}{c_D(z)} e^{-\frac{1}{2}[I_{AF}-I(z)]} \quad (1.8)$$

na qual  $u_h$  é a velocidade média do vento no topo da floresta. Para maiores detalhes sobre este modelo e informações relevantes, consultar Yi (2008).

Santana (2017), ao especificar os parâmetros da equação 1.8, a partir de dados coletados por Tóta et al. (2012), em uma área de floresta de terra firme da Amazônia, obteve o perfil apresentado na Figura 2, na qual se relacionada a razão  $z/h$  (para possibilitar a comparação do modelo com dados de florestas de diferentes alturas) com a velocidade do vento observada. Observa-se, pela Figura 2, que o Modelo Yi apresenta seus melhores resultados para os níveis no interior da floresta ( $z/h < 1$ ). Para alturas acima do dossel, até 150 % da altura da floresta, o modelo ainda mantém uma boa aproximação. Contudo, para os níveis em que  $z/h > 1,5$ , o modelo começa a apresentar resultados que se distanciam dos dados observacionais.

Figura 2 – Perfil vertical da velocidade do vento obtida pelo Modelo Yi (linha preta contínua) comparado aos dados coletados (círculos coloridos – cada cor representa um local distinto) em diferentes sítios experimentais da Amazônia (para maiores detalhes, consultar Santana, 2017).



Fonte: Adaptada de Santana (2017).

### 1.3.2 Modelo Souza

O modelo empírico-analítico, obtido por Souza et al. (2016), apresenta resultados satisfatórios quando se busca descrever o perfil do vento observado na Amazônia. A equação deste modelo é dada pela seguinte expressão:

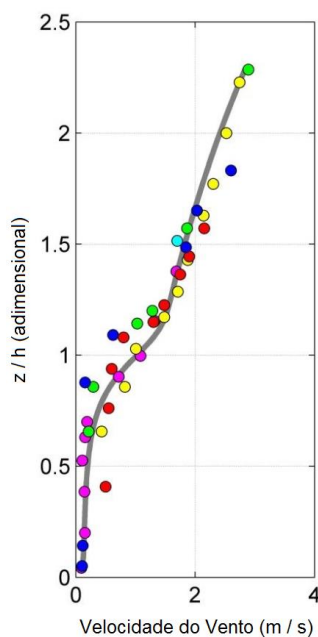
$$u(z) = u_h \left( \frac{e^{\varphi z} - 1}{e^{\omega z}} \right) \sigma \tanh \left[ \epsilon + \psi e^{-I_{AF} \left( 1 - \frac{z}{z_{pi}} \right)} \right] \quad (1.9)$$

na qual  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$  e  $\psi$  são os parâmetros de ajuste da equação aos dados;  $z_{pi}$  é a altura do ponto de inflexão do perfil vertical do vento. Para maiores detalhes sobre os métodos utilizados para a determinação dos parâmetros, consultar Souza et al (2016).

Da mesma forma que para o Modelo Yi, Santana (2017) traçou o perfil vertical da velocidade do vento utilizando o Modelo Souza em comparação aos dados coletados em áreas de floresta da Amazônia, conforme pode-se conferir na Figura 3. Por meio dessa figura, verifica-se que o Modelo Souza apresenta uma aproximação dos dados melhor que o Modelo Yi, principalmente para os níveis acima da floresta.

Entretanto, o Modelo Souza apresenta a desvantagem de se necessitar da especificação de muitos parâmetros de ajuste ( $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\psi$  e  $z_{pi}$ ), o que torna a equação 1.9 mais complicada para se aplicar.

Figura 3 – Da mesma forma que a Figura 2, mas para o Modelo Souza (linha cinza contínua).



Fonte: Adaptada de Santana (2017).

### 1.3.3 Modelo Souza Modificado

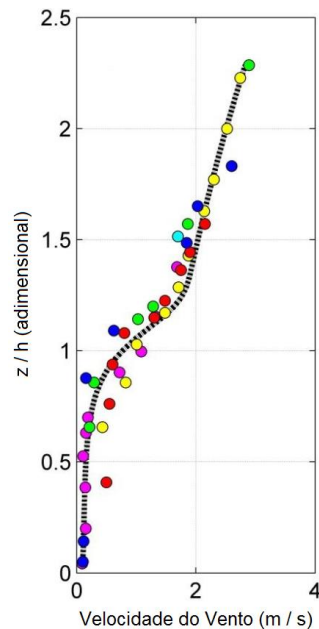
Realizando testes e analisando o Modelo de Souza, Santana (2017) desenvolveu um modelo que necessita, apenas, de dois parâmetros de ajuste aos dados, a saber:  $\varphi$  e  $\epsilon$ . Dessa forma, o modelo pode ser aplicado de forma mais prática e simples. O Modelo Souza Modificado é dado, então, por:

$$u(z) = u_h \left( \frac{e^{\varphi z} - 1}{e^z} \right) \tanh \left[ \epsilon + e^{-I_{AF} \left( 1 - \frac{z}{z_{pi}} \right)} \right] \quad (1.10)$$

Apesar da redução no número de parâmetros, a equação 1.10 apresenta resultados muito próximos aos observados para o Modelo Souza, dado pela equação 1.9. De acordo com Santana (2017), o Modelo Souza Modificado, quando comparado ao original, apresenta índices de aproximação 0,6 % maior.

Na Figura 4, pode-se observar como o perfil traçado a partir do Modelo Souza Modificado representa uma aproximação muito boa dos dados observados. Nota-se que o modelo descreve muito bem o escoamento de ar para os níveis no interior da floresta e, assim como o modelo original, mantém sua boa aproximação para as alturas acima do dossel da floresta. Dessa forma, em termos de “custo-benefício”, o Modelo de Souza Modificado, quando comparado aos outros dois, é aquele que apresenta maior viabilidade prática, uma que vez que foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados em diferentes sítios experimentais da Amazônia.

Figura 4 – Da mesma forma que a Figura 3, mas para o Modelo Souza Modificado (linha preta tracejada).



Fonte: Adaptada de Santana (2017).

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

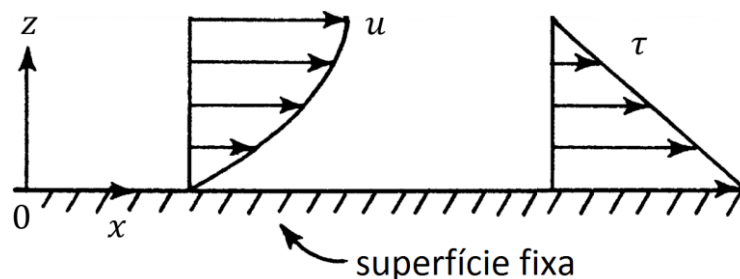
#### 2.1 As Equações de Navier-Stokes

Ainda no século XIX, a partir da equação de Cauchy, Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes desenvolveram equações diferenciais parciais que permitem determinar os campos de velocidade e de pressão no escoamento de um determinado fluido. Estas equações estabelecem que variações na QML, de uma parcela do fluido em escoamento, são o resultado das mudanças na pressão, de forças externas e de forças viscosas dissipativas (similar ao atrito) atuando no fluido (WHITE, 2011).

Ao se especificar o campo de tensões da equação de Cauchy (1.7), determinando-se o tensor  $\vec{\underline{T}}$  para o fluido de interesse, chega-se à equação que descreve como as forças devem se distribuir pelo volume do fluido e o escoamento deve ocorrer. Para os fluidos geofísicos mais comuns e estudados, ou seja, ar e água, o campo de tensões é especificado pelas forças de pressão e pelas forças viscosas dadas pela Lei de Newton da viscosidade, sendo, por isso, conhecidos como *fluidos newtonianos*. Por essa Lei, as componentes das forças viscosas dependem de um coeficiente de viscosidade,  $\mu$  (característico de cada fluido), e são proporcionais à variação da componente da velocidade em uma dada direção com o comprimento em outra direção. Por exemplo, conforme apresenta-se na Figura 5, para um escoamento que ocorre somente na direção  $x$ , com a velocidade  $u$  variando na direção  $z$ , tem-se a que a componente viscosa do campo de tensões é dada por:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.1)$$

Figura 5 – Perfil vertical (na direção  $z$ ) da componente horizontal da velocidade,  $u$ , para o escoamento de um fluido newtoniano sobre uma superfície fixa.



Fonte: Adaptada de Arya (2001).

Portanto, para fluidos newtonianos (cujas componentes viscosas do campo de tensões são especificadas pela equação 2.1), a equação 1.7, após mais algumas manipulações algébricas, é reescrita como:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.2)$$

na qual  $\rho$  é a massa específica do fluido, dada em  $\text{kg} / \text{m}^3$ ;  $\vec{V}$  é a velocidade de escoamento, dada em  $\text{m} / \text{s}$ ;  $t$  é o tempo, dado em  $\text{s}$ ;  $\vec{f}$  representa as forças externas ao escoamento que atuam sobre o volume do fluido, dada em  $\text{N} / \text{kg}$ ;  $p$  é a pressão, dada em  $\text{Pa}$ ;  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido, dada em  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Em geral, a velocidade varia de ponto a ponto no escoamento e com o tempo, ou seja,  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ .

Na equação 2.2, conforme mencionado anteriormente, o termo  $D\vec{V}/Dt$  representa a aceleração total do escoamento (dividida em advectiva e local), que pode ser escrita, no sistema de coordenadas cartesianas, como:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Escrevendo o vetor velocidade, no sistema de coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} \quad (2.4)$$

Assim, a equação 2.3 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{V}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{V} \\ &= \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \\ &= \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \hat{i} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \hat{j} + \\ &\quad + \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (2.5)$$

O termo  $\vec{\nabla}p$ , da equação 2.2, representa a força do gradiente de pressão por unidade de volume que atua para alterar a QML, tendendo a acelerar o escoamento, e é escrito, no sistema de coordenadas cartesianas, como:

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \quad (2.6)$$

Finalmente,  $\nabla^2 \vec{V}$  representa o efeito da distribuição das forças viscosas sobre o escoamento. A partir de resultados da Física-Matemática (ARFKEN e WEBER, 2005), pode-se mostrar que:

$$\nabla^2 \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \quad (2.7)$$

O primeiro termo à direita da equação 2.7 representa a deformação da parcela de fluido pelo efeito da viscosidade, enquanto o segundo representa a rotação gerada pelas diferenças de velocidade de escoamento ocasionadas pela presença de uma superfície sólida ou de outro fluido no caminho do escoamento. No sistema de coordenadas cartesianas,  $\nabla^2 \vec{V}$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{V} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \hat{j} + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo as equações 2.4, 2.6 e 2.8 na 2.2, escrevendo a força externa, no sistema de coordenadas cartesianas, como  $\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$  e separando os resultados para cada coordenada, fica-se com:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.9a)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.9b)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.9c)$$

As equações 2.9 são as Equações de Navier-Stokes, escritas no sistema de coordenadas cartesianas, e serão utilizadas para se obterem os modelos matemáticos que descrevem o escoamento médio do ar em áreas de florestas da Amazônia, conforme será detalhado nas Seções 2.2 e 3.2.

## 2.2 Equações de Navier-Stokes para Escoamento Estacionário sobre Florestas

Baseando-se nas informações apresentadas nas Seções 1.1 e 2.1, para os estudos a desenvolvidos nesse TCC, o escoamento do ar foi considerado: laminar, estacionário, incompressível, viscoso e rotacional. Uma vez que os modelos matemáticos, desenvolvidos neste trabalho, descrevem o escoamento médio do ar, para intervalos de tempo longos, como uma estação do ano, por exemplo, que tem a duração de cerca de três meses, os efeitos da turbulência desaparecem, já que esse fenômeno é observado apenas para intervalos de tempo muito curtos, podendo-se, portanto, tratar o escoamento como laminar. Adicionalmente, com o cálculo da média, não serão observadas as alterações nas características do vento com o tempo, permitindo-se tratar o escoamento como estacionário. Por fim, para a modelagem matemática, aqui tratada, os efeitos termodinâmicos (relacionados às diferenças de temperatura) foram desprezados.

A base dos modelos matemáticos, propostos neste trabalho para o escoamento médio do ar em áreas de floresta, parte das equações de Navier-Stokes (2.9), apresentadas na Seção 2.1, considerando um escoamento estacionário unidirecional na coordenada  $x$ , com variação somente em função da coordenada  $z$ , ou seja,  $u = u(z)$  e  $v = w = 0$ . A consequência matemática de se considerar um escoamento estacionário é que as componentes da velocidade não se alterarão com o tempo, o que diminui, consideravelmente, a dificuldade de se solucionar as equações resultantes. Dessa forma, a partir da equação 2.9a, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( u \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{du}{dz} + 0 \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( 0 + 0 + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \\ 0 &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dz^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pelas considerações apresentadas acima e da equação 2.9b, obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho (u \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu (0 + 0 + 0) \end{aligned}$$



$$0 = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.11)$$

Finalmente, a partir da equação 2.9c, obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \rho(u \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu(0 + 0 + 0) \\ 0 &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para completar o modelo matemático, é preciso especificar as componentes  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  da força externa. Dessa forma, na direção  $x$ , a única influência externa ao escoamento do ar são os obstáculos interpostos pela presença da floresta, principalmente pela folhagem da cobertura vegetal. Para expressar matematicamente esse efeito, foi incluído um coeficiente de absorção de QML,  $\beta(z)$ , que se apresenta em um termo de força externa que se opõe ao sentido do escoamento na direção  $x$ . Esse coeficiente é dependente da rugosidade e do volume de folhas presentes na floresta e da altura dessa floresta, sendo, em geral, variável com  $z$ .

A forma de expressar a componente  $f_x$  da força externa segue o modelo matemático da força de arrasto,  $\vec{F}_a$ , que atua sobre um corpo em movimento sob o efeito da resistência do ar, sendo dado, para baixas velocidades por (HALLIDAY ET AL., 2016a):

$$\vec{F}_a = -\alpha \vec{V} \quad (2.13)$$

na qual  $\alpha$  é o coeficiente de amortecimento, que depende de características físicas do corpo e do ar. Assim sendo, se utilizou esse modelo matemático, invertendo o efeito de resistência do ar sobre um corpo sólido para a resistência de obstáculos sólidos (componentes da floresta) sobre o escoamento de ar. Portanto, se terá, para  $f_x$ , a seguinte equação:

$$f_x = -\beta(z)u \quad (2.14)$$

em que  $\beta(z)$ , dado em  $s^{-1}$ , é expresso por:

$$\beta(z) = a(z)\vartheta_a \quad (2.15)$$

na qual  $a(z)$  é a densidade de área foliar, dada em  $m^2 / m^3$ , e representa a distribuição vertical da área das folhas na floresta;  $\vartheta_a$  é um parâmetro que especifica a taxa de absorção de QML, que ocorre por meio da rugosidade da floresta considerada. Contudo, é necessário notar que  $f_x$  atuará, somente, sobre o escoamento que ocorre no *interior* da floresta. Nos níveis acima da floresta,  $f_x = 0$ . Conseqüentemente, as soluções das equações do modelo foram divididas: uma para o escoamento que ocorre acima (mais simples) e outra para o que ocorre no interior da floresta (mais complexa).

Concernente às componentes  $f_y$  e  $f_z$ , não se considerou nenhuma influência externa na direção  $y$ , portanto,  $f_y = 0$ , enquanto, na direção  $z$ , considerou-se somente o efeito gravitacional, ou seja,  $f_z = -g$ . Poder-se-ia, também, para o escoamento acima da floresta, incluir o efeito da flutuabilidade (empuxo por unidade de massa) em razão de diferenças de temperatura entre o dossel da floresta e as camadas de ar acima dela; contudo, as influências termodinâmicas foram incluídas neste trabalho.

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGIA DA PESQUISA

#### 3.1 A Abordagem e as Estratégias de Investigação

A abordagem é quantitativa observando que o escoamento do ar pode ser entendido por meio de análises físicas e equações matemáticas utilizando, como apoio, o cálculo numérico. Além disso, os dados coletados da RDSU foram comparados aos resultados das equações desenvolvidas, para verificação da validade do modelo matemático.

A estratégia de investigação é explicativa, pois conforme (GIL, 2002) “pesquisas explicativas visam basicamente testar hipóteses” e este TCC buscou identificar fenômenos que determinam ou contribuem para variação da velocidade do vento para diferentes perfis verticais de altura. Considerando a hipótese de que eles podem ser descritos matematicamente e que variando-os e associando-os com a equação modelada esta não perde a capacidade de gerar resultados condizentes com a realidade.

A estratégia metodológica foi o estudo de caso, levando em consideração que esse TCC utilizou pressupostos de outros trabalhos para direcionar a sua pesquisa. Tendo em mente que, em um processo de inovação, os resultados podem ser diferentes dos esperados, bem como ser reveladas novas informações importantes sobre o caso, dependendo, exclusivamente, de suas peculiaridades (DE ANDRÉ, 2013).

#### 3.2 Modelagem Matemática do Escoamento de Ar em Florestas

Para se obterem as EDOs que descrevem o tipo de escoamento, objeto de estudo deste TCC, devem ser incluídas as componentes da força externa que atuam (ou não) em cada direção, nas equações 2.10, 2.11 e 2.12.

Especificamente, para a direção  $x$ , tem-se a separação entre o escoamento que ocorre acima da floresta, para o qual  $f_x = 0$ , e no interior da floresta, em que  $f_x = -\beta(z)u$ . Então, para  $f_x = 0$  na equação 2.10, tem-se para o escoamento acima da floresta:

$$0 = -\rho \cdot 0 - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1)$$

Substituindo a equação 2.14 na 2.10, obtém-se a EDO para o escoamento no interior da floresta, dada por:

$$0 = -\rho\beta(z)u - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dz^2}$$

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} - \rho\beta(z)u = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\rho}{\mu}\beta(z)u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

Para a direção  $y$ , com  $f_y = 0$ , a equação 2.11 resulta em:

$$0 = \rho \cdot 0 - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$p = p(x, z) \quad (3.3)$$

O resultado 3.3 implica que a pressão é constante na direção  $y$  variando, somente, nas direções  $x$  e  $z$ . Finalmente, para a direção  $z$ , com  $f_z = -g$  na equação 2.12, fica-se com:

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.4)$$

A equação 3.4 apresenta o equilíbrio hidrostático do ar na direção  $z$ , que, para o caso em que se considera a massa específica do ar,  $\rho$ , e a aceleração gravitacional,  $g$ , constantes, a variação de pressão na vertical também é constante.

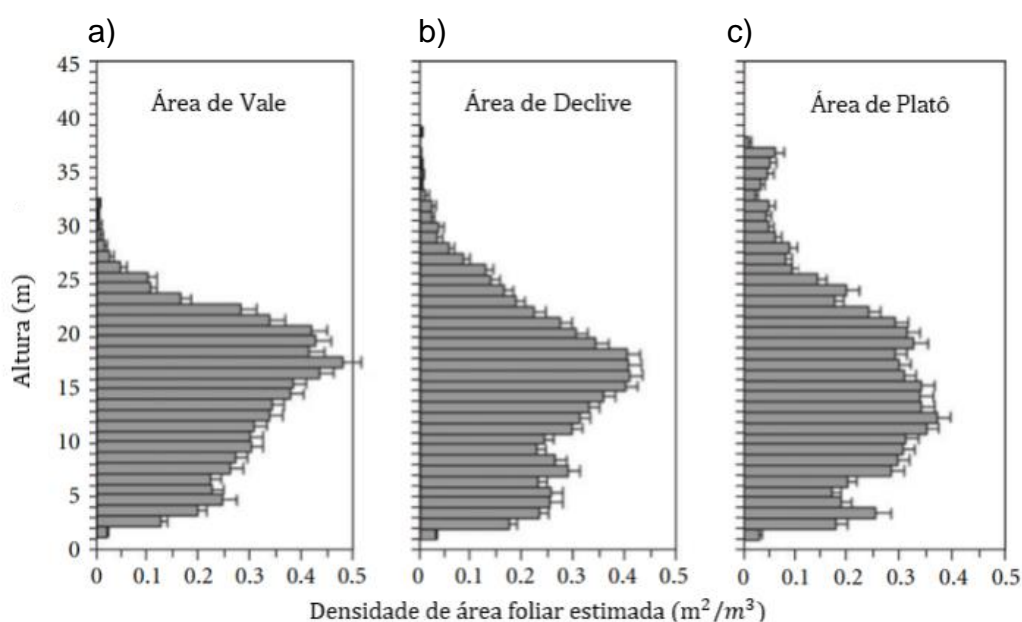
Como consequência dos resultados apresentados nas equações 2.15, 3.1 e 3.2, a modelagem do escoamento médio do ar em áreas de florestas se dá pela especificação do coeficiente de absorção  $\beta(z)$  e da componente do gradiente de pressão  $\partial p / \partial x$ . Para este último, como se trata do escoamento médio do ar, pode-se considerá-lo, aproximadamente, constante. Dessa forma, após a solução das

equações resultantes do modelo, se determinaram empiricamente, a partir dos dados coletados na RDSU.

Conforme apresentado na equação 2.15, a função que expressa o coeficiente de absorção,  $\beta(z)$ , depende diretamente da densidade de área foliar,  $a(z)$ . Na Figura 6, são apresentados perfis com a estimativa da densidade de área foliar, determinados por Tóta et al. (2012), para três diferentes áreas de floresta da Amazônia Central, localizadas na Reserva Biológica do Cuieiras (Rebio Cuieiras): vale, declive e platô. A floresta da Rebio Cuieiras, que fica a cerca de 140 km, em linha reta, da floresta da RDSU, apresenta semelhanças estruturais e climáticas a esta última.

A função que expressa a densidade de área foliar,  $a(z)$ , deve representar, o melhor possível, a arquitetura da floresta, mas com a possibilidade de ser adaptada para diferentes tipos de cobertura vegetal, como aqueles apresentados na Figura 6. Adicionalmente, é importante que  $a(z)$  dependa da menor quantidade possível de parâmetros da floresta, de forma que seja mais fácil adaptar o modelo. Por fim, o modelo matemático não deve ser muito complicado, a fim de se obterem soluções analíticas para o escoamento de ar no interior da floresta.

Figura 6 – Perfis verticais da estimativa da densidade de área foliar, determinadas por Tóta et al. (2012), para três áreas de floresta da Rebio Cuieiras: a) vale, b) declive e c) platô.



Fonte: Adaptada de Tóta et al. (2012).

Juntamente com a densidade de área foliar, a altura média da floresta,  $h$ , determina a rugosidade e as alturas efetivas dos absorvedores de QML. Outra característica da arquitetura da floresta, amplamente utilizada, é o índice de área foliar,  $I_{AF}$ , que é um parâmetro adimensional que representa a dimensão da área de folhagem para cada unidade de área de solo. Por exemplo, se o  $I_{AF}$  de uma dada floresta for igual a 5,0, significa que, para cada metro quadrado de solo, haverá cinco metros quadrados de área de folhas distribuídas do solo até o topo dessa floresta. Segundo Ross (1975, apud Arya, 2001),  $I_{AF}$  está relacionado à densidade de área foliar,  $a(z)$ , por meio da seguinte expressão:

$$I_{AF} = \int_0^h a(z) dz \quad (3.5)$$

O índice de área foliar cumulativo,  $I(z)$ , apresentado no Modelo Yi (Seção 1.3, equação 1.8), é obtido da mesma forma que  $I_{AF}$ , mas para uma integração entre o nível do solo e um nível  $z$  menor que  $h$ .

O primeiro modelo matemático, proposto neste trabalho, representa a arquitetura da floresta na forma retangular. O intuito era de se ter um modelo mais simples e facilitar a solução da EDO resultante, mas sem perder a capacidade de representar os efeitos da vegetação sobre o escoamento de ar. Na Figura 7, apresenta-se como esse modelo representaria a arquitetura da área de platô da floresta observada por Tóta et al. (2012), considerando uma altura média de 30 m e  $I_{AF} = 7,0$ . Pela Figura 7, verifica-se que a densidade de área foliar,  $a(z)$ , do modelo retangular, é constante com a altura, ou seja, apresenta o mesmo valor desde o solo até o topo da floresta. Dessa forma,  $a(z)$  pode ser escrita como uma constante, definida, aqui, como  $a_0$ . Conseqüentemente, pela equação 3.5, tem-se para o modelo retangular:

$$I_{AF} = \int_0^h a_0 dz = a_0 \int_0^h dz = a_0 h$$

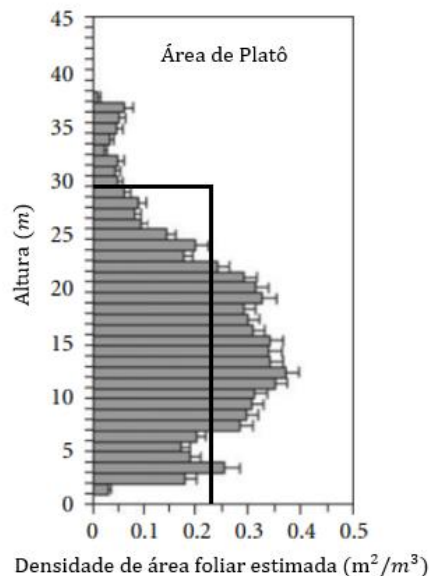
$$a(z) = a_0 = \frac{I_{AF}}{h} \quad (3.6)$$

Desse modo, para uma floresta modelada utilizando-se a geometria de padrão retangular, obtém-se, para o coeficiente de absorção,  $\beta(z)$ , substituindo a equação 3.6 na 2.15:

$$\beta = \frac{I_{AF}}{h} \vartheta_a \quad (3.7)$$

De forma que  $\beta$ , para este modelo retangular, é um parâmetro constante, que depende de poucas informações da floresta e pode ser facilmente variado para fins de teste do modelo. Porém, pelo que se pode observar na Figura 7, o modelo de arquitetura escolhido não corresponde tão bem à distribuição da folhagem real da floresta.

Figura 7 – Modelo de arquitetura florestal retangular, considerando  $h = 30 \text{ m}$  e  $I_{AF} = 7,0$ , sobre o perfil vertical da estimativa da densidade de área foliar, determinada por Tóta et al. (2012), para uma área de platô da floresta da Rebio Cuieiras.



Fonte: Adaptada de Tóta et al. (2012).

Na tentativa de se refinar a representação do modelo, considerou-se a altura até a qual a floresta exerce maior influência sobre o escoamento, conhecida como altura de deslocamento (ponto a partir do qual o escoamento assume um perfil semelhante ao de um escoamento sobre uma superfície nua, como apresentado na Figura 5, da Seção 2.1).

Segundo Kaimal e Finnigan (1994, apud Santana, 2017), a altura de deslocamento, identificada aqui por  $h'$ , é cerca de 75 % da altura média da floresta. Assim sendo, o modelo retangular corrigido seria dado pela substituição de  $h$  por  $h'$  nas equações 3.6 e 3.7, ou seja:

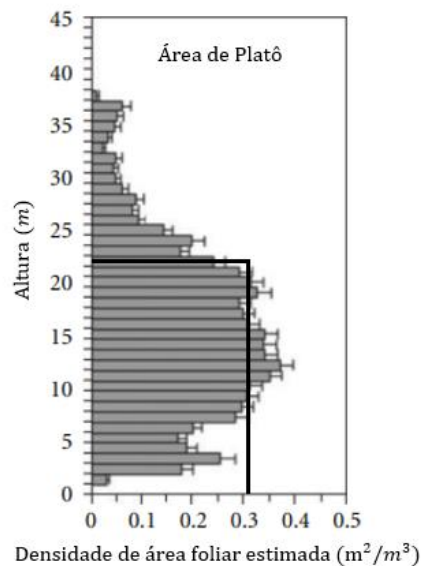
$$a_0 = \frac{I_{AF}}{h'} = \frac{I_{AF}}{(3/4)h} = \frac{4 I_{AF}}{3 h} \quad (3.8)$$

e

$$\beta = \frac{4 I_{AF}}{3 h} \vartheta_a \quad (3.9)$$

Na Figura 8, apresenta-se a correção, dada pela equação 3.8, para a arquitetura da área de platô da floresta observada por Tóta et al. (2012), considerando  $h = 30$  m (portanto,  $h' = 22,5$  m) e  $I_{AF} = 7,0$ .

Figura 8 – Da mesma forma que a Figura 7, mas com o modelo de arquitetura florestal retangular ajustado pela altura de deslocamento,  $h' = 0,75h$ .



Fonte: Adaptada Tóta et al. (2012).

Com o modelo de arquitetura retangular, seja dado pela equação 3.7 ou pela correção 3.9, quando aplicado na equação 3.2, resulta em:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{\beta}{v}u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.10)$$



na qual  $\nu = (\mu/\rho)$  representa a viscosidade cinemática do fluido (do ar, no caso), dada em  $\text{m}^2/\text{s}$ . A equação 3.10 é uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é obtida por meio do *método dos coeficientes a determinar* e será apresentada no Capítulo 4, com detalhamentos no Anexo, do trabalho.

O segundo modelo proposto para a arquitetura da floresta é na forma triangular. Na Figura 9, apresenta-se como esse modelo representaria a arquitetura da área de platô da floresta observada por Tóta et al. (2012), considerando uma altura média de 30 m e  $I_{AF} = 7,0$ . Nesse modelo, a densidade de área foliar é parametrizada por meio das seguintes funções lineares:

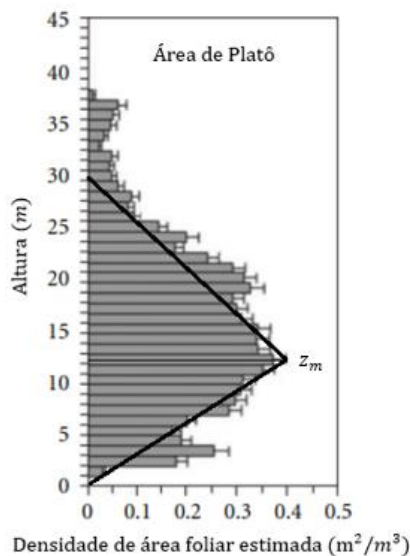
$$a_1(z) = \frac{z}{z_m} a_m \quad (3.11)$$

para a região entre a superfície do solo ( $z = 0$ ) e a altura,  $z_m$ , em que se encontra a maior densidade de área foliar da floresta,  $a_m$ , e:

$$a_2(z) = \frac{h - z}{h - z_m} a_m \quad (3.12)$$

para a região entre  $z_m$  e o topo da floresta,  $h$ .

Figura 9 – Da mesma forma que a Figura 7, mas para o modelo de arquitetura florestal triangular.



Fonte: Adaptada de Tóta et al. (2012).

Para se determinar a maior densidade de área foliar da floresta,  $a_m$ , utiliza-se a equação 3.5, considerando que a mesma representa o cálculo da área da figura geométrica utilizada para modelar  $a(z)$ . Nesse caso, a área de um triângulo,  $A_{tri}$ . Assim sendo, pela equação 3.5 e pela Figura 9, tem-se:

$$I_{AF} = \int_0^h a(z) dz = A_{tri} = \frac{1}{2} h \cdot a_m$$

$$a_m = \frac{2I_{AF}}{h} \quad (3.13)$$

O resultado 3.13 pode ser obtido, também, substituindo as equações 3.11 e 3.12 na 3.5, realizando as devidas integrações e somando os seus resultados.

Neste modelo triangular, necessita-se de mais um parâmetro, além de  $h$  e  $I_{AF}$ , para se especificar a distribuição de folhagem na floresta, que é a altura  $z_m$ , na qual se encontra  $a_m$ . Desse modo, seus valores foram obtidos a partir da literatura. Por exemplo, pelo trabalho de Tóta et al. (2012) para a floresta da Rebio Cuieiras, pode-se verificar (Figura 6) que os valores de  $z_m$  para as áreas de vale, declive e platô são, respectivamente, 17, 15 e 12 m. Adicionalmente, para uma floresta modelada utilizando-se a geometria de padrão triangular, obtém-se, para o coeficiente de absorção,  $\beta(z)$ , duas funções diferentes ao se substituir as equações 3.11 e 3.12 na 2.15, isto é:

$$\beta_1(z) = a_1(z) \vartheta_a = \frac{z}{z_m} a_m \vartheta_a = z \left( \frac{a_m \vartheta_a}{z_m} \right) \quad (3.14)$$

e

$$\beta_2(z) = a_2(z) \vartheta_a = \frac{h-z}{h-z_m} a_m \vartheta_a = (h-z) \left( \frac{a_m \vartheta_a}{h-z_m} \right) \quad (3.15)$$

Conseqüentemente, com o modelo de arquitetura triangular, dado pelas equações 3.14 e 3.15, quando aplicadas na equação 3.8, resulta em:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - z \left( \frac{a_m \vartheta_a}{z_m \nu} \right) u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.16)$$

e

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - (h-z) \left[ \frac{a_m \vartheta_a}{(h-z_m) \nu} \right] u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.17)$$

As equações 3.16 e 3.17 são EDO lineares de segunda ordem com coeficientes variáveis, cuja solução é obtida por meio do *método das séries de potências* e também será apresentada no Capítulo 4, com detalhamentos no Anexo, do trabalho.

### 3.3 Sítio Experimental e Suas Características

A Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã, localizada na Amazônia Central, a nordeste da cidade de Manaus, é o onde foram realizadas as medidas micrometeorológicas e coletados os dados empregados neste trabalho. Trata-se de uma área de floresta de terra firme ( $01^{\circ} 12' 21''$  S e  $59^{\circ} 27' 29''$  O)<sup>2</sup>, cuja gestão é feita pelo Centro Estadual de Unidades de Conservação e fiscalizado pelo Instituto de Proteção Ambiental do Amazonas. Está localizada na região do médio Rio Amazonas, a 200 km de Manaus, nos municípios de Itapiranga e São Sebastião do Uatumã e a uma altitude que varia entre 40 e 150 m acima do nível do mar (AMAZONAS, 2009).

A reserva é limitada, na sua parte alta (rio acima), pelo município de Presidente Figueiredo, próximo da Usina Hidrelétrica de Balbina, possui cerca de 424.430 ha de floresta ombrófila densa em terra firme e áreas inundáveis, campina e campinarana (AMAZONAS, 2009). Apresenta um dossel (nível em que há a maior concentração de folhagem) que varia de 25 a 40 m de altura, dependendo da região da reserva. Nas áreas com dossel mais alto, de 35 a 40 m, o solo é argiloso, enquanto nas áreas com dossel baixo, por volta de 25 m de altura, o solo contém areia branca (areias quartzosas) (COSTA, 2008).

O clima local caracteriza-se por ser quente e úmido, apresentando em média índices pluviométricos de 2350 mm anuais. A estação seca vai de agosto a outubro, em geral não possuindo meses com menos de 100 mm de chuvas (COSTA, 2008). A umidade relativa média apresenta valores sempre maiores que 80 % e as temperaturas médias mensais variam entre 26 °C, em julho, e 28 °C, em outubro (GALVÃO E FISCH, 2000). Apesar da região não sofrer influências do mar ou da topografia, durante os meses de junho e julho, ocorrem alguns episódios de frentes

---

<sup>2</sup>Fonte das coordenadas: google maps, link:  
<https://www.google.com/maps/place/Reserva+Biol%C3%B3gica+de+Uatum%C3%A3/@-1.2528798,-60.1685235,9z/data=!3m1!4b1!4m6!3m5!1s0x9271ea75245932fd:0xd9569e187851c137!8m2!3d-1.9350112!4d-59.4224112!16s%2Fm%2F03y72y4?entry=ttu>

frias, vindas do extremo sul da América do Sul, que alcançam a área e ocasionam quedas na temperatura local, originando os eventos conhecidos como “friagem”.

### 3.4 Instrumentação e Medidas

Os dados utilizados nesse trabalho, para a obtenção de parâmetros de entrada para os modelos matemáticos, como velocidade média do vento no topo da floresta,  $u_h$ , e componente  $x$  do gradiente de pressão,  $\partial p / \partial x$ , e, também, para as comparações com os perfis gerados por estes modelos, foram coletados no Observatório de Torre Alta da Amazônia, chamado, comumente, de torre ATTO (*Amazon Tall Tower Observatory*), que possui 325 m de altura, sendo a estrutura mais alta da América Latina, e está localizada na RDSU.

As medidas, que geraram os dados empregados nesse trabalho, foram realizadas por anemômetros ultrassônicos tridimensionais, instalados na torre ATTO nas alturas de 5,0, 15, 25, 35, 43, 75, 100, 127, 151, 172, 223, 247 e 274 m, entre 27 de julho de 2021 a 02 de fevereiro de 2022. Contudo, como, durante esse período, houve diversas falhas de coleta, separaram-se dois conjuntos de dados, não contínuos, para representar as estações seca e chuvosa da Amazônia Central. O primeiro, para a estação seca, foi de 07 de agosto a 25 de novembro de 2021, com 28 dias de dados, totalizando 31 medidas (alguns dias tiveram mais de uma medida). O segundo, para a estação chuvosa, foi de 25 de dezembro de 2021 a 02 de fevereiro de 2022, com 22 dias de dados, num total de 34 medidas (houve dias com duas e outros com três medidas).

## CAPÍTULO 4

### APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

#### 4.1 Modelo Matemático para o escoamento Acima da Floresta

Nesta Seção apresenta-se o modelo matemático que descreve o escoamento médio do ar para alturas acima do topo da floresta, bem como a determinação de parâmetros para os testes de sensibilidade e validação do modelo.

A obtenção do modelo partiu da equação 3.1, considerando a variação de pressão em  $x$ ,  $\partial p/\partial x$ , constante. Desse modo, a solução foi determinada, simplesmente, pela integração da equação e pela integração do resultado da primeira, conforme se detalha no Anexo. Para se obterem as constantes de integração, consideraram-se as seguintes Condições de Contorno (CC):

$$u(h) = u_h$$

e

$$\frac{du}{dz}(\kappa h) = 0$$

nas quais  $h$  é a altura da floresta,  $u_h$  é a velocidade medida no topo da floresta,  $\kappa = H/h$  e  $H$  é a altura em que a velocidade de escoamento é máxima, ou seja, não há mais variação da velocidade  $u$  com a altura  $z$ , a partir de  $z = H$ .

A solução obtida, portanto, para a equação 3.1, considerando as CC dadas, foi:

$$u(z) = u_h + \frac{\gamma}{2\mu} h f(z) \quad (4.1)$$

na qual:

$$\gamma = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.2)$$

e

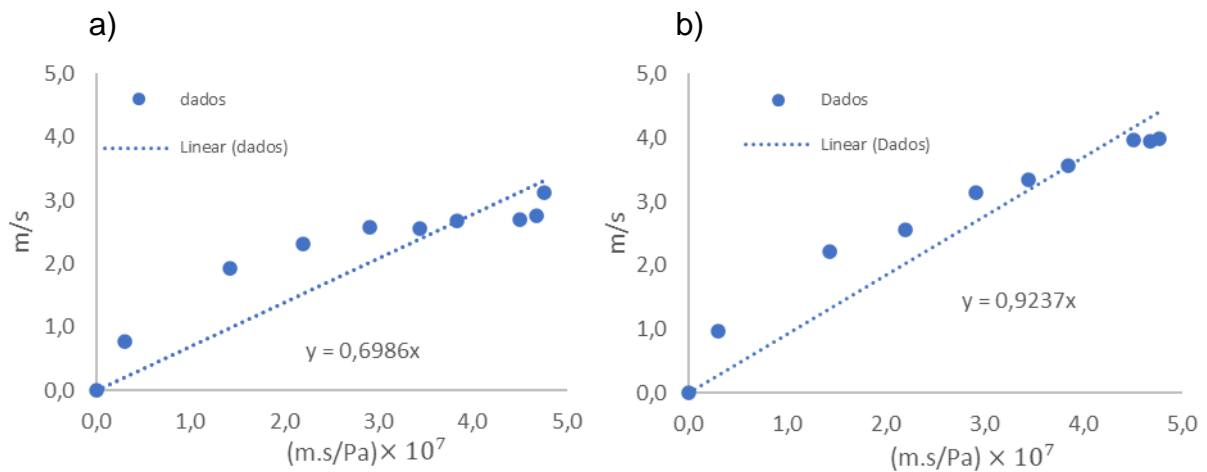
$$f(z) = 2\kappa z - h(2\kappa - 1) - \frac{z^2}{h} \quad (4.3)$$

Para se determinar o valor de  $\gamma$  e ter um parâmetro do valor da variação de pressão, para se realizarem as simulações, as análises de sensibilidade do modelo e se gerarem os perfis de escoamento para comparação com os dados coletados, utilizaram-se regressões lineares de mínimos quadrados. Destarte, a partir da equação 4.1, se fez:

$$u(z) - u_h = \gamma \frac{hf(z)}{2\mu} \Rightarrow y = \gamma x \quad (4.4)$$

Da equação 4.4 e dos conjuntos de dados coletados na RDSU e selecionados para as estações seca e chuvosa, foram feitas duas regressões lineares, conforme se verifica na Figura 10, cujos resultados foram:  $\gamma = 7,0 \cdot 10^{-8}$  Pa / m, para a estação seca;  $\gamma = 9,2 \cdot 10^{-8}$  Pa / m, para a estação chuvosa.

Figura 10 – Regressão linear de mínimos quadrados para a determinação de  $\gamma$ , para as estações: a) seca e b) chuvosa.



Fonte: Do Autor (2024).

Os parâmetros  $u_h$  e  $\kappa$  também foram determinados partir dos conjuntos de dados coletados na RDSU. Para a velocidade no topo da floresta (considerado na altura de 35 m),  $u_h$ , obtiveram-se as médias, para as estações seca e chuvosa, respectivamente, 1,224 e 1,065 m / s.

Pela observação dos perfis médios de velocidade acima da floresta, para as estações seca e chuvosa, observou-se que a altura em que a variação de velocidade se aproxima de zero, é cerca de oito vezes a altura da floresta. Dessa forma, utilizou-se  $\kappa = 8$ , como parâmetro de altura para a velocidade máxima,  $u_{max}$ . Nesse sentido, é possível, também, determinar, analiticamente,  $u_{max}$ , por meio das equações 4.1 e 4.3, para  $z = \kappa h$ , ou seja:

$$\begin{aligned} u_{max} &= u(\kappa h) = u_h + \frac{\gamma}{2\mu} h \left[ 2\kappa \cdot \kappa h - h(2\kappa - 1) - \frac{(\kappa h)^2}{h} \right] \\ &= u_h + \frac{\gamma}{2\mu} h(2\kappa^2 h - 2\kappa h + h - \kappa^2 h) \end{aligned}$$

$$u_{max} = u_h + \frac{\gamma}{2\mu} h^2 (\kappa - 1)^2 \quad (4.5)$$

Assim sendo, com os parâmetros para  $\gamma$ ,  $u_h$  e  $\kappa$ , determinados, a equação 4.1 foi submetida a testes de sensibilidade, conforme apresentados na Seção 4.2. De mais a mais, deve-se ressaltar que os valores determinados como parâmetros para  $\gamma$  e  $u_h$ , aqui obtidos, foram também utilizados para os modelos (retangular e triangular) para o escoamento no interior da floresta.

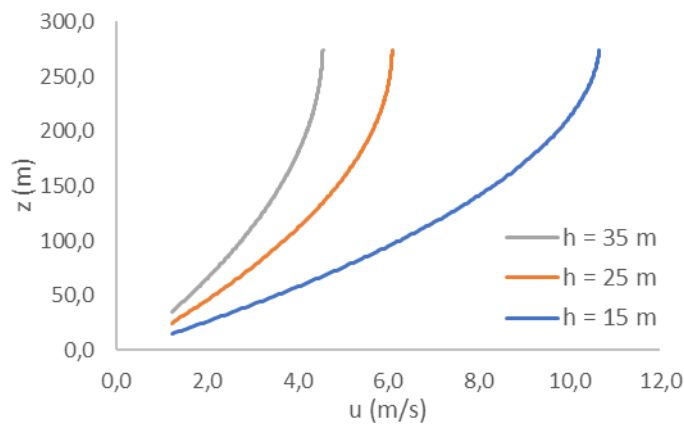
## 4.2 Testes de Sensibilidade com o Modelo para o Escoamento Acima da Floresta

Nessa Seção, verificam-se as respostas do Modelo para o Escoamento Acima da Floresta (MEAF), dado pelas equações 4.1, 4.2 e 4.3, à alteração de valores das seguintes variáveis: (i) altura da floresta,  $h$ ; (ii) viscosidade do ar,  $\mu$ ; (iii) velocidade no topo da floresta,  $u_h$ ; (iv) variação de pressão,  $\gamma$ ; (v) altura em que ocorre  $u_{max}$ ,  $H = \kappa h$ , também conhecida como altura de velocidade de cruzeiro. Os testes foram realizados alterando-se uma variável, das cinco citadas, por vez. Para estes testes, foram gerados perfis verticais de velocidade acima da floresta tendo, como dados padrão de entrada (controle), os seguintes valores:  $h = 35$  m;  $\mu = 1,8 \times 10^{-5}$  Pa · s;  $u_h = 1,224$  m / s;  $\gamma = 7,0 \cdot 10^{-8}$  Pa / m;  $\kappa = 8$ .

A Figura 11 apresenta como o perfil de velocidade do MEAF se altera com a mudança no valor da altura da floresta,  $h$ . Por esta Figura, verifica-se que, para florestas mais baixas, como campinas e campinaranas, a velocidade aumenta mais rapidamente com a altura  $z$ , uma vez que o obstáculo que se interpõe no caminho do escoamento do ar é menor. Desse modo, observou-se uma boa resposta do MEAF, ou seja, que este apresenta sensibilidade adequada, a diferentes alturas de floresta.

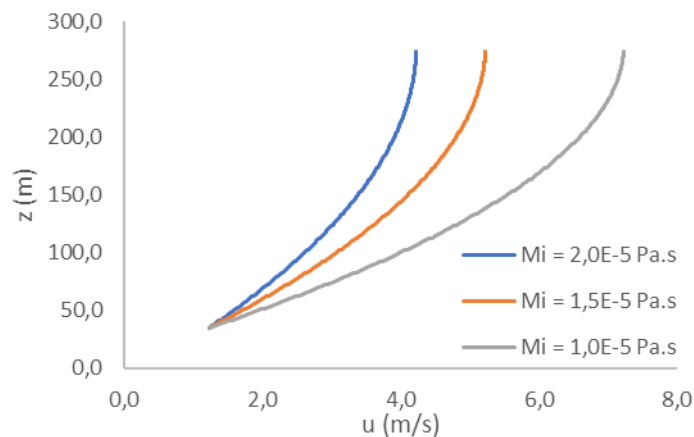
Na Figura 12, observa-se a resposta do MEAF à alteração no valor da viscosidade do ar. Conforme o esperado, o modelo apresenta bastante sensibilidade às variações de  $\mu$ , apresentando perfis com menor variação de velocidade com a altura para maiores valores de viscosidade. Fisicamente, isso representa a interação entre as camadas de ar que, conforme se tem maiores magnitudes de  $\mu$ , mais “atrito” ocorre entre elas, diminuindo, assim, suas diferenças de velocidade e gerando perfis com valores de inclinação ( $du/dz$ ) menores.

Figura 11 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de altura da floresta,  $h$ .



Fonte: Do Autor (2024).

Figura 12 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de viscosidade do ar,  $\mu$ .



Fonte: Do Autor (2024).

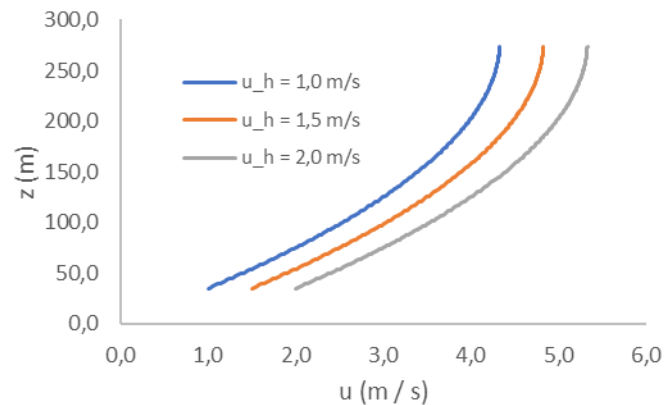
Por meio do espaçamento superior entre as linhas da Figura 12, é possível observar que entre os perfis de viscosidade  $1,0 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (linha cinza) e  $1,5 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (linha laranja) houve uma redução de, aproximadamente,  $2,0 \text{ m/s}$  na velocidade final do escoamento, enquanto que, entre os perfis de viscosidade  $1,5 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  e  $2,0 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  (linha azul), a redução foi de cerca de  $1,0 \text{ m/s}$ . Desse modo, variando-se linearmente o valor de viscosidade, não se obtém uma variação linear nos valores de velocidade.

A Figura 13 apresenta como o perfil de velocidade do MEAF se altera com a mudança no valor da velocidade no topo da floresta,  $u_h$ . Por meio desta Figura, nota-



se que a inclinação,  $du/dz$ , dos perfis, permanece a mesma para diferentes valores de  $u_h$ , ou seja, a curva permanece a mesma para qualquer valor de entrada de  $u_h$ , mas com crescimento de velocidades proporcionais ao seu valor no topo da floresta.

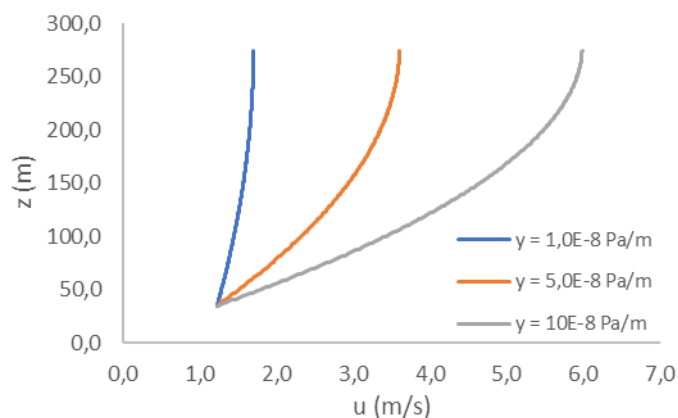
Figura 13 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de velocidade no topo da floresta,  $u_h$ .



Fonte: Do Autor (2024).

Na Figura 14, apresentam-se perfis de velocidade do MEAF para diferentes valores de variação horizontal de pressão,  $\gamma$ . Verifica-se que, para uma pequena alteração em  $\gamma$ , o modelo apresenta uma intensa mudança na inclinação no perfil,  $du/dz$ , demonstrando sua sensibilidade à principal fonte de geração do escoamento.

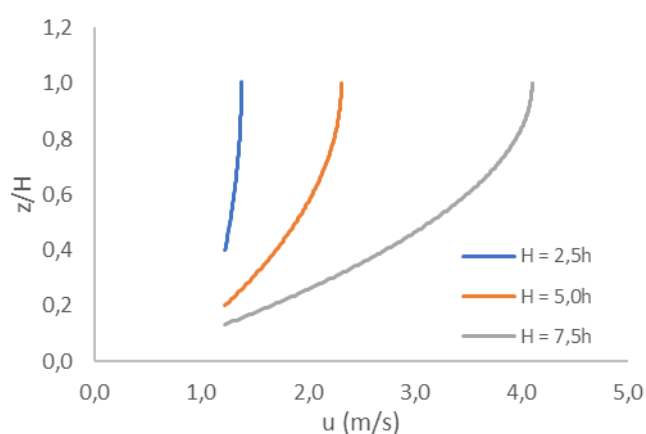
Figura 14 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de variação horizontal de pressão,  $\gamma$ .



Fonte: Do Autor (2024).

Pela Figura 15, observa-se que, para uma altura de velocidade de cruzeiro  $H = 2,5h$ , o MEAF fica limitado a valores de velocidade inferiores a  $2,0 \text{ m/s}$ , uma vez que não há distância o suficiente para o crescimento do perfil, pois, como a altura padrão da floresta é  $35 \text{ m}$ ,  $H$  resulta em  $87,5 \text{ m}$ , ou seja, o escoamento tem apenas  $52 \text{ m}$  de altura se desenvolver acima da floresta. Em contrapartida, se há uma distância grande o suficiente para o escoamento se desenvolver, como é o caso de  $H = 7,5h$ , a velocidade final supera os  $3,5 \text{ m/s}$ , pois há mais de  $220 \text{ m}$  livres (sem contato com a floresta) para o escoamento desenvolver seu perfil.

Figura 15 – Perfis verticais de velocidade do MEAF, para três diferentes valores de altura de cruzeiro,  $H$ , dados por  $H = \kappa h$ .



Fonte: Do Autor (2024).

Sumarizando os testes de sensibilidade, observou-se que o MEAF é adequado para a descrição do escoamento médio do ar, uma vez que modelo pode ser ajustado para diferentes alturas de floresta e condições atmosféricas e apresenta perfis fisicamente realistas.

### 4.3 Modelos Matemáticos para o Escoamento no Interior da Floresta

Nessa Seção, apresentam-se os modelos matemáticos que descrevem o escoamento médio do ar no interior de uma floresta. Conforme se apresentou na Seção 3.2, estruturaram-se dois modelos distintos para a distribuição vertical de biomassa. O primeiro, chamado de retangular, apresenta densidade de área foliar,  $a(z)$ , constante com a altura. O segundo, chamado de triangular, apresenta variação linear de  $a(z)$  com altura, crescendo do solo ( $z = 0$ ) até a altura de máxima

concentração de biomassa ( $z = z_m$ ), e decrescendo dessa altura até o topo da floresta ( $z = h$ ). Adicionalmente, determinam-se os valores como parâmetro para a taxa de absorção de QML,  $\vartheta_a$ , para os testes de sensibilidade e para a validação dos modelos.

Nas seguintes Subseções são apresentadas as equações que descrevem os modelos, a partir das soluções das EDOs apresentadas no Capítulo 3, utilizando-se as CC adequadas. Os detalhes das resoluções das EDOs são mostrados no Anexo.

### 4.3.1 Modelo Retangular

Da mesma forma que se fez para a obtenção das equações para o MEAF, os Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta (MEIFs), tiveram suas equações determinadas considerando-se  $\gamma = -\partial p/\partial x$  constante. Para o MEIF Retangular (MEIF-R), a obtenção das equações que o descrevem, partiu da equação 3.10, utilizando-se o método dos coeficientes a determinar, conforme se detalha no Anexo, considerando-se as seguintes CC:

$$u(0) = 0$$

e

$$u(h) = u_h$$

Assim sendo, a solução obtida foi:

$$u(z) = u_h \frac{F_1(z)}{\xi_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \eta \left[ 1 - \frac{F_1(z) + F_2(z)}{\xi_1} \right] \quad (4.6)$$

na qual:

$$\eta = \frac{2\nu}{\beta} \quad (4.7)$$

$$F_1(z) = e^{\alpha z} - e^{-\alpha z} \quad (4.8)$$

$$F_2(z) = e^{\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h-z)} \quad (4.9)$$

$$\xi_1 = F_1(h) = e^{\alpha h} - e^{-\alpha h} \quad (4.10)$$

e

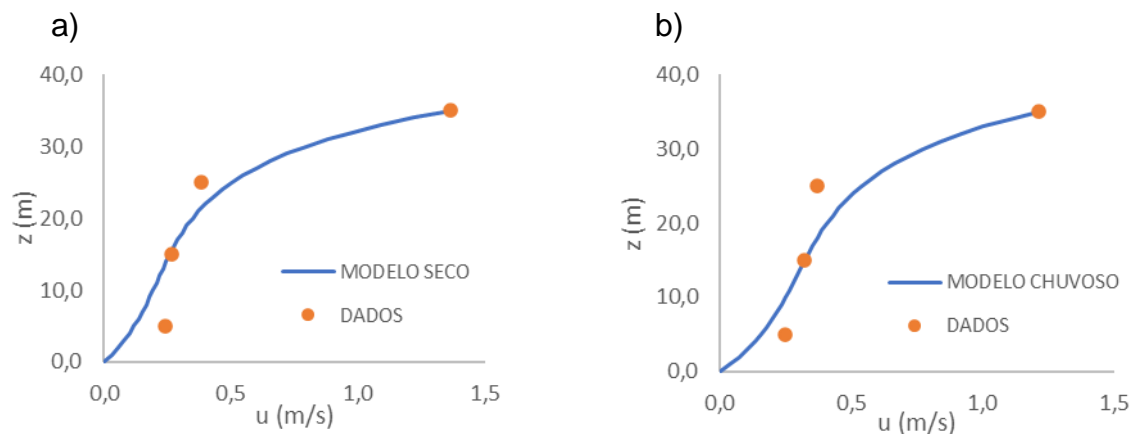
$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}} \quad (4.11)$$

Para se determinar os parâmetros para as simulações e testes de sensibilidade, utilizaram-se valores para a altura da floresta,  $h (= 35 \text{ m})$ , e índice de área foliar,

$I_{AF}(= 7,0)$ , apresentados pela literatura (Tota et al., 2012, por exemplo), combinados com as observações dos perfis gerados com os dados coletados na RDSU. Para a variação horizontal de pressão,  $\gamma$ , aplicaram-se os valores obtidos na Seção 4.1, por regressão linear, para o MEAF. Já para a velocidade do vento no topo da floresta,  $u_h$ , calcularam-se as médias com os dados coletados na RDSU, cujos resultados para as estações seca e chuvosa, foram, respectivamente, 1,364 e 1,212 m / s. Os valores, obtidos como parâmetro para a taxa de absorção de QML,  $\vartheta_a$ , foram determinados por meio de aproximação empírica realizada entre os resultados do modelo e os dados.

A Figura 16 mostra a aproximação empírica realizada para se obter  $\vartheta_a$ . Os ajustes foram realizados, manualmente, até que houvesse uma aproximação razoável da linha do modelo com os dados médios coletados da RDSU. Os valores de  $\vartheta_a$ , resultantes dessa aproximação empírica, para as estações seca e chuvosa, foram, respectivamente,  $9,8 \times 10^{-7}$  e  $8,9 \times 10^{-7}$  m / s.

Figura 16 – Aproximação empírica para a taxa de absorção de QML,  $\vartheta_a$ , por meio da comparação da linha do modelo com os dados médios da velocidade do vento no interior da floresta para as estações: a) seca e b) chuvosa.



Fonte: Do Autor (2024).

Com os parâmetros, necessários à efetivação das simulações, obtidos, testou-se a sensibilidade do MEIF às alterações nos valores das variáveis relacionadas à arquitetura da floresta ( $h$ ,  $I_{AF}$  e  $\vartheta_a$ ) e à mecânica do escoamento ( $u_h$  e  $\gamma$ ). Além disso, os mesmos parâmetros foram utilizados para as simulações e testes de sensibilidade do modelo triangular.

### 4.3.2 Modelo Triangular

Nesta Seção, apresenta-se o MEIF considerando uma distribuição de biomassa do tipo Triangular (MEIF-T). Diferentemente do modelo retangular, em que apenas uma equação,  $u(z)$ , descreve o escoamento no interior da floresta, desde a superfície do solo até o topo da floresta, para o triangular a solução é dividida em duas partes: uma para o escoamento da superfície do solo até o nível de máxima concentração de biomassa,  $z_m$ , e outra para o escoamento entre  $z_m$  e o topo da floresta,  $h$ .

Dessa forma, as resoluções partiram de duas equações, isto é, da 3.16, para  $0 \leq z \leq z_m$  e da 3.17, para  $z_m \leq z \leq h$ . Como as equações 3.16 e 3.17 são EDOs com coeficientes variáveis, não se pôde aplicar a mesma técnica que se utilizou para o MEIF-R. Assim sendo, suas resoluções foram determinadas efetivadas pelo método de solução em série de potências.

A solução para o MEIF-T, entre 0 e  $z_m$ , obtida a partir da equação 3.16 e detalhada no Anexo, foi a seguinte:

$$u(z) = u_h \frac{P_1(z)}{\delta_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \zeta \left[ \frac{P_1(z)}{\delta_1} - \frac{P_2(z)}{\delta_2} \right] \quad (4.12)$$

na qual:

$$P_1(z) = 504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7 \quad (4.13)$$

$$P_2(z) = 1120z^2 + 56\varepsilon z^5 + \varepsilon^2 z^8 \quad (4.14)$$

$$\delta_1 = P_1(h) = 504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7 \quad (4.15)$$

$$\delta_2 = P_1(h) = 1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8 \quad (4.16)$$

$$\zeta = \frac{\delta_2}{1120} \quad (4.17)$$

e

$$\varepsilon = \frac{2I_{AF}\vartheta_a}{z_m h \nu} \quad (4.18)$$

Para chegar à equação 4.12, se utilizaram as mesmas CC aplicadas para o MEIF-R, ou seja:

$$u(0) = 0$$

e

$$u(h) = u_h$$

A solução para o MEIF-T, entre  $z_m$  e  $h$ , foi determinada a partir da equação 3.17, incluindo-se mais uma CC, além das citadas acima. Essa CC é a continuidade entre as soluções para o escoamento entre 0 e  $z_m$  ( $u_1$ ) e aquele entre  $z_m$  e  $h$  ( $u_2$ ), ou seja,  $u_2(z_m) = u_1(z_m)$ . Adicionalmente, por meio da aplicação dessa CC, retirou-se a dependência de  $u_2(z)$  em relação à  $\gamma$ , que influencia, indiretamente, esse escoamento, pela continuidade entre as soluções. Portanto, aplicando o método série de potências e fazendo as devidas manipulações algébricas, detalhadas no Anexo, chega-se ao seguinte resultado:

$$u(z) = u_h \frac{Y_2 T_1(z) - Y_1 T_2(z)}{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2} + u_{1z_m} \frac{\Psi_1 T_2(z) - \Psi_2 T_1(z)}{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2} \quad (4.19)$$

na qual:

$$T_1(z) = 10080z + 1680\lambda h z^3 - 840\lambda z^4 + 84\lambda^2 h^2 z^5 - 84\lambda^2 h z^6 + (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2)z^7 - 3\lambda^3 h^2 z^8 \quad (4.20)$$

$$T_2(z) = 20160z^2 + 1680\lambda h z^4 - 1008\lambda z^5 + 56\lambda^2 h^2 z^6 - 64\lambda^2 h z^7 + (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2)z^8 \quad (4.21)$$

$$Y_1 = T_1(z_m) = 10080z_m + 1680\lambda h z_m^3 - 840\lambda z_m^4 + 84\lambda^2 h^2 z_m^5 - 84\lambda^2 h z_m^6 + (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2)z_m^7 - 3\lambda^3 h^2 z_m^8 \quad (4.22)$$

$$Y_2 = T_2(z_m) = 20160z_m^2 + 1680\lambda h z_m^4 - 1008\lambda z_m^5 + 56\lambda^2 h^2 z_m^6 - 64\lambda^2 h z_m^7 + (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2)z_m^8 \quad (4.23)$$

$$\Psi_1 = T_1(h) = 10080h + 840\lambda h^4 + 20\lambda^2 h^7 - \lambda^3 h^{10} \quad (4.24)$$

$$\Psi_2 = T_2(h) = 20160h^2 + 672\lambda h^5 + 10\lambda^2 h^8 + \lambda^3 h^{11} \quad (4.25)$$

e

$$\lambda = \frac{2I_{AF}\vartheta_a}{(h - z_m)h\nu} \quad (4.26)$$

Além disso, o termo  $u_{1z_m}$  é o resultado da aplicação da equação 4.12 para o escoamento no nível de maior concentração de biomassa, ou seja,  $u_1(z_m)$ .

#### 4.4 Testes de Sensibilidade com os Modelos para o Escoamento no Interior da Floresta

Com as equações 4.6 a 4.11, para o MEIF-R, 4.12 a 4.18, para o MEIF-T entre 0 e  $z_m$ , 4.19 a 4.26, para o MEIF-T entre  $z_m$  e  $h$ , e os parâmetros determinados para

as variáveis de entrada ( $h$ ,  $I_{AF}$ ,  $\vartheta_a$ ,  $u_h$  e  $\gamma$ ), realizaram-se os testes de sensibilidade, de forma semelhante ao apresentado na Seção 4.2, para o MEAF. Os testes foram realizados com a alteração de apenas uma variável, por vez. Os dados, utilizados como padrão de entrada (controle) para a geração dos perfis verticais de velocidade no interior da floresta, foram os seguintes:  $h = 35$  m;  $I_{AF} = 7,0$ ;  $\vartheta_a = 10 \times 10^{-7}$  m / s;  $u_h = 1,364$  m / s;  $\gamma = 7,0 \cdot 10^{-8}$  Pa / m. Adicionalmente, para o MEIF-T, utilizou-se, como nível de maior concentração de biomassa na floresta,  $z_m = 0,75 h$ .

As equações principais, utilizadas para a geração dos perfis dos MEIF, correspondentes aos modelos retangular (4.6) e triangular (4.12 e 4.19), são apresentadas na Tabela 1, como referência rápida.

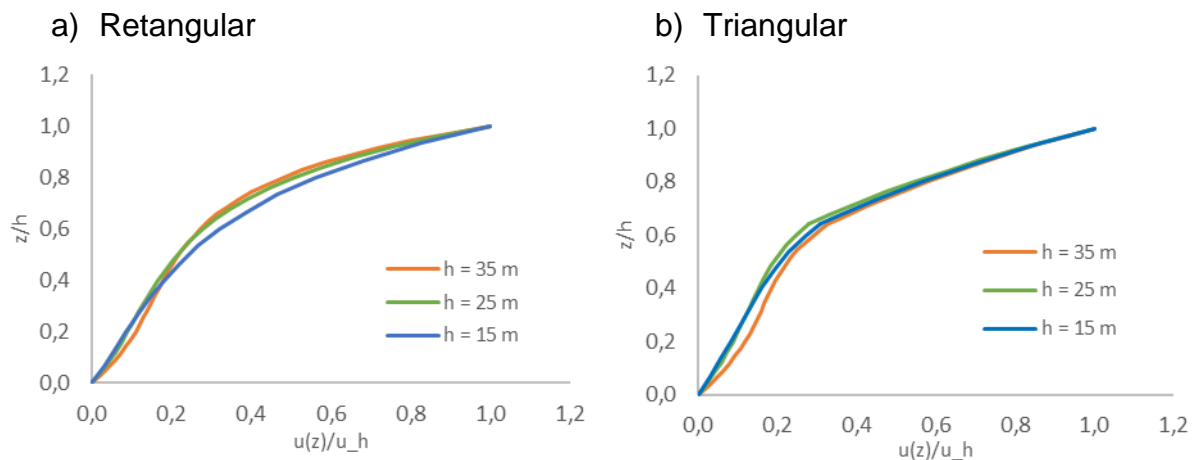
Tabela 1 – Equações principais dos modelos matemáticos para o escoamento do ar no interior de uma floresta, baseados em diferentes perfis de biomassa.

<b>Retangular</b>	
$u(z) = u_h \frac{F_1(z)}{\xi_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \eta \left[ 1 - \frac{F_1(z) + F_2(z)}{\xi_1} \right]$	$0 \leq z \leq h$
<b>Triangular</b>	
$u(z) = u_h \frac{P_1(z)}{\delta_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \zeta \left[ \frac{P_1(z)}{\delta_1} - \frac{P_2(z)}{\delta_2} \right]$	$0 \leq z \leq z_m$
$u(z) = u_h \frac{Y_2 T_1(z) - Y_1 T_2(z)}{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2} + u_{1z_m} \frac{\Psi_1 T_2(z) - \Psi_2 T_1(z)}{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2}$	$z_m \leq z \leq h$

Fonte: Do Autor (2024).

A Figura 17 apresenta os perfis verticais de velocidade normalizados, para o MEIF-R e MEIF-T, para diferentes valores de altura da floresta,  $h$ . Por esta Figura, observa-se pouca mudança dos perfis com  $h$ , mesmo quando se compararam resultados para alturas bem diferentes, como 15 e 35 m. Contudo, isso se explica pelo fato de, apesar de se ter variado a altura da floresta, manteve-se o mesmo valor de índice de área foliar,  $I_{AF}$ , portanto, basicamente, a mesma biomassa. De qualquer forma, ainda se verifica uma certa alteração no perfil do MEIF-R, que apresentou um crescimento maior de valores de velocidade com o aumento da altura da floresta.

Figura 17 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de altura da floresta,  $h$ .



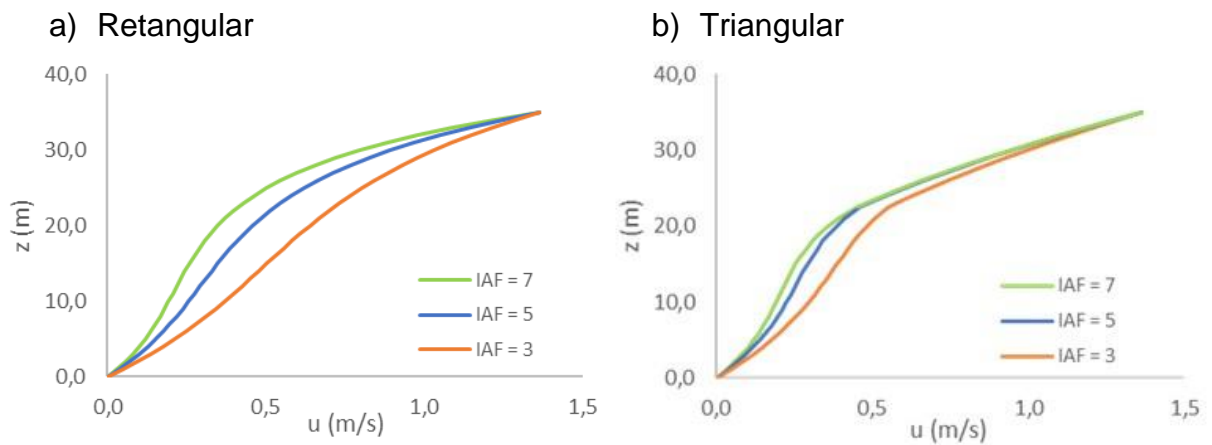
Fonte: Do Autor (2024).

Na Figura 18, apresentam-se os perfis para diferentes valores de  $I_{AF}$ . Verifica-se uma clara diferença em relação ao que se observou na Figura 17, uma vez que, ao se alterar o valor de  $I_{AF}$ , modifica-se a quantidade de matéria vegetal que se interpõe no caminho do escoamento. Assim, tanto por meio do MEIF-R quanto do MEIF-T, observa-se que, para uma floresta com menores índices de área foliar, o vento tem maior facilidade para se propagar em seu interior. Contudo, é perceptível a diferença de resposta dos modelos, em relação às alterações nos valores de  $I_{AF}$ , já que o MEIF-T (Figura 18b) apresenta menores modificações nos perfis que o MEIF-R (Figura 18a). Isso se explica pelo fato do MEIF-T ser baseado numa distribuição de biomassa do tipo triangular, com matéria vegetal mais concentrada numa determinada altura, enquanto que, no MEIF-R, essa matéria está uniformemente distribuída.

A Figura 19 apresenta como os perfis de ambos os modelos são sensíveis às alterações nos valores da taxa de absorção de QML da floresta,  $\vartheta_a$ . Essa sensibilidade já era esperada, uma vez que maiores valores de  $\vartheta_a$  indicam maior rugosidade do meio vegetal, gerando arrasto mais intenso entre as camadas de ar e a biomassa, que é composta, principalmente, por folhas. Portanto, com o aumento de  $\vartheta_a$ , há maior “atrito” entre a folhagem e o escoamento, causando sua desaceleração. Em contrapartida, se  $\vartheta_a$  é pequeno, o perfil de velocidade se assemelha ao caso em que não há floresta, como se pode verificar na Figura 19, para  $\vartheta_a = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ .

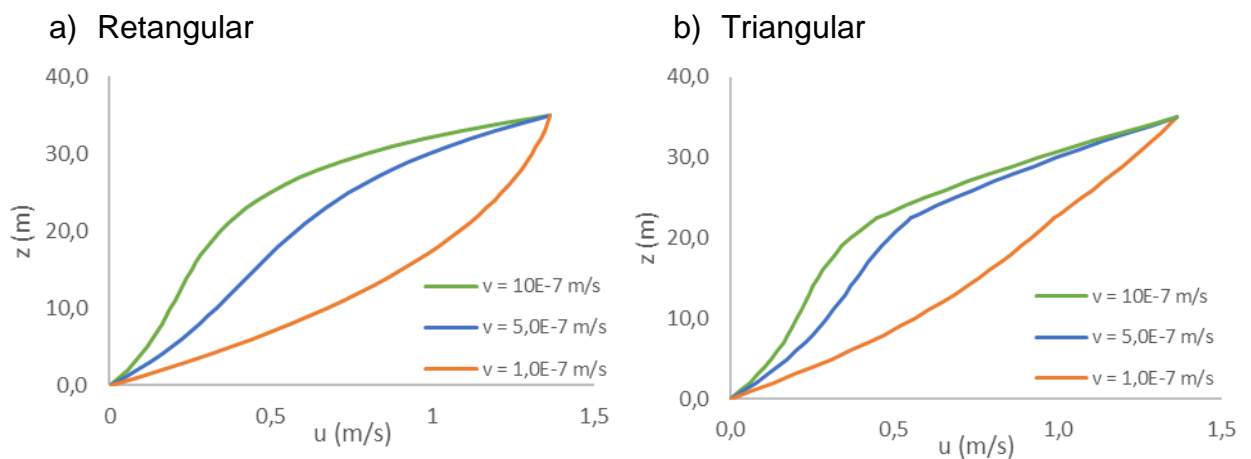


Figura 18 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de índice de área foliar,  $I_{AF}$ .



Fonte: Do Autor (2024).

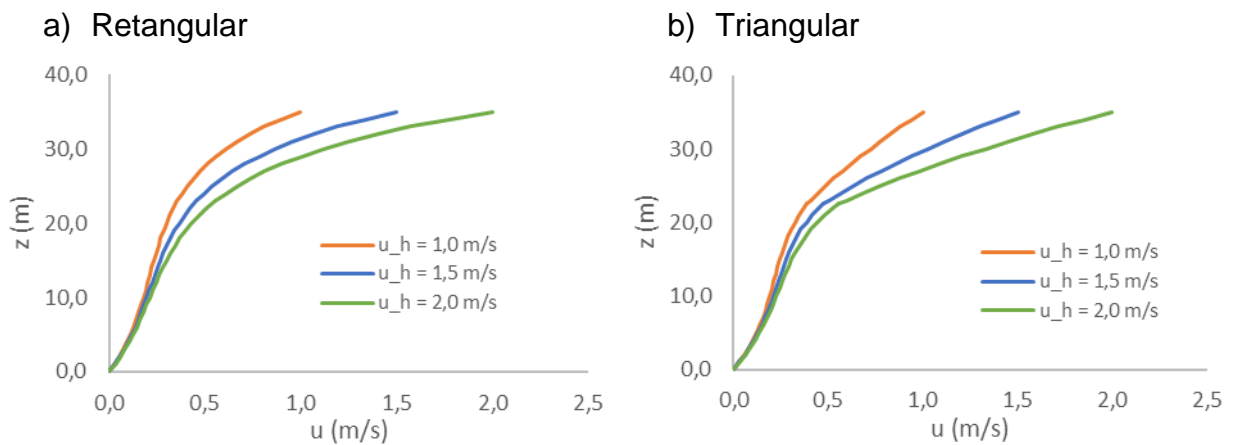
Figura 19 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de taxa de absorção de QML,  $\vartheta_a$ .



Fonte: Do Autor (2024).

A Figura 20 mostra o comportamento dos modelos para diferentes velocidades do topo da floresta,  $u_h$ . Por meio desta Figura, percebe-se que, tanto para o MEIF-R quanto para o MEIF-T, a alteração no valor de  $u_h$  só causa modificações nos perfis, a partir de 10 m de altura. Acima desse nível, os perfis seguem um aumento proporcional ao valor dado para  $u_h$ , conforme o esperado, pois ambos os modelos foram obtidos utilizando-se  $u_h$  como condição de contorno.

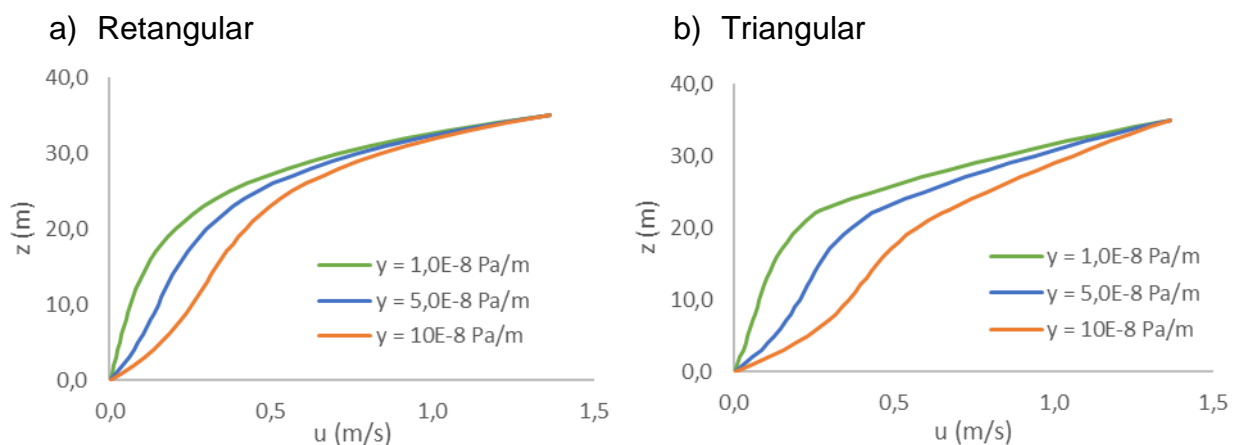
Figura 20 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de velocidade no topo da floresta,  $u_h$ .



Fonte: Do Autor (2024).

O último teste de sensibilidade, feito simultaneamente com ambos os MEIFs, foi realizado com diferentes valores de variação horizontal de pressão,  $\gamma$ , conforme apresentado na Figura 21. Deve-se lembrar que essa grandeza é um dos dados de entrada tanto para o MEAF quanto para os MEIFs, uma vez que se trata do mesmo escoamento, mas que apresenta características distintas acima e no interior da floresta. Os resultados, evidenciados na Figura 21, mostram que ambos os modelos são sensíveis às variações horizontais de pressão, de forma semelhante ao que ocorre acima da floresta. É interessante nota que o MEIF-T se apresenta mais sensível à essa grandeza.

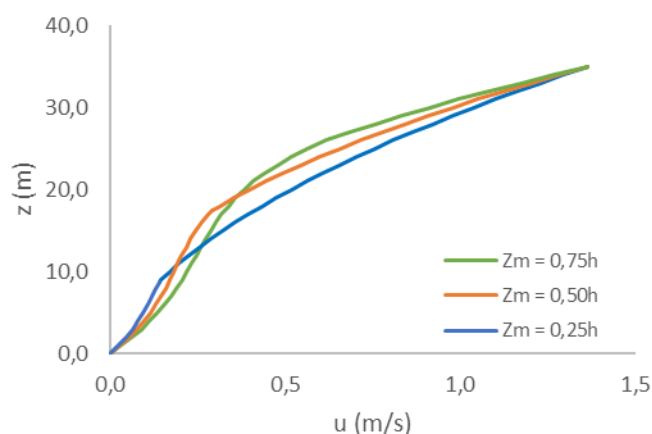
Figura 21 – Perfis verticais de velocidade dos MEIFs, para três diferentes valores de variação horizontal de pressão,  $\gamma$ .



Fonte: Do Autor (2024).

Por fim, verificou-se como os perfis de velocidade do MEIF-T se alteram pelas variações da única grandeza que é exclusiva deste modelo, isto é, a altura em que há a maior concentração de biomassa,  $z_m$ . Na Figura 22, observa-se que a resposta do modelo, para a alteração de  $z_m$ , é direta, de forma que, se a maior concentração de biomassa estiver na parte inferior da floresta, o aumento de velocidade se dará mais rapidamente após essa altura. Já para o caso contrário, isto é, para maior concentração de biomassa na parte superior da floresta, o aumento de velocidade ocorre com variação mais gradual.

Figura 22 – Perfis verticais de velocidade do MEIF-T, para três diferentes valores de altura de maior concentração de biomassa,  $z_m$ .

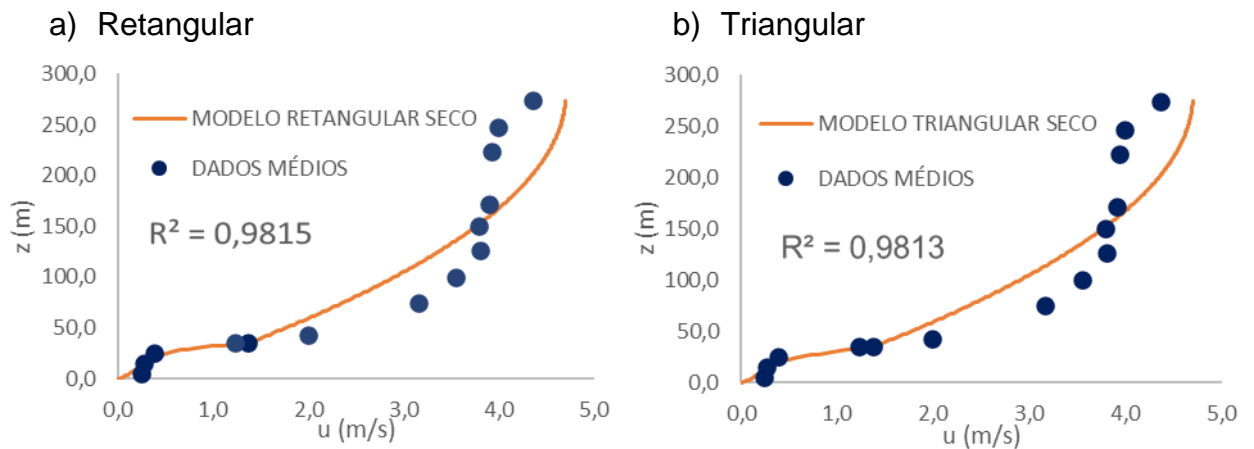


Fonte: Do Autor (2024).

#### 4.5 Validação dos Modelos

Para se verificar a validade dos modelos e sua aplicabilidade, juntaram-se os perfis do MEAF com os do MEIF-R e MEIF-T, separadamente, gerando-os com os valores determinados como parâmetros para as variáveis de entrada. De mais a mais, utilizando os conjuntos de dados coletados na RDSU, para as estações seca e chuvosa, geraram-se dois perfis verticais de velocidade com os valores médios para cada um dos períodos. A Figura 23 apresenta a comparação dos resultados do modelo, utilizando-se os parâmetros ajustados para o período seco, com a média dos dados coletados na RDSU.

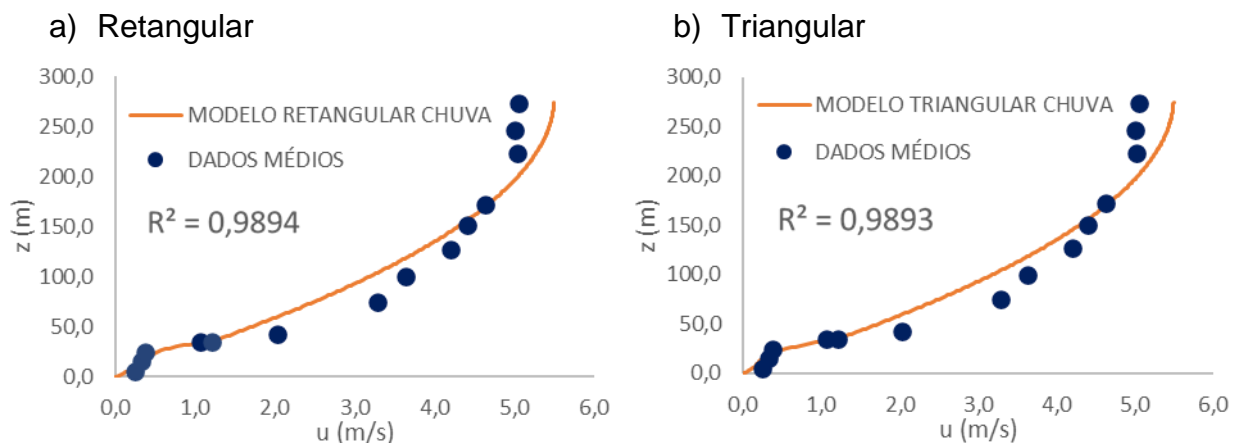
Figura 23 – Perfis verticais de velocidade dos modelos juntamente com o perfil gerado pelas médias dos dados coletados na RDSU, para a estação seca.



Fonte: Do Autor (2024).

Verifica-se que o modelo retangular apresenta uma aproximação dos dados um pouco melhor que o triangular, sendo evidenciado pelos valores dos coeficientes de determinação,  $R^2$ , apresentados nas Figuras 23a e 23b. Este coeficiente demonstra quão ajustados os resultados do modelo estão aos dados coletados na floresta. Quanto mais próximo  $R^2$  estiver de 1,0, melhor é esse ajuste. A Figura 24 mostra a mesma comparação, porém para a estação chuvosa.

Figura 24 – Perfis verticais de velocidade dos modelos juntamente com o perfil gerado pelas médias dos dados coletados na RDSU, para a estação chuvosa.



Fonte: Do Autor (2024).

Analisando os resultados para a estação chuvosa, nota-se que o modelo retangular permanece mais ajustado aos dados coletados na RDSU. De toda forma,

ambos os modelos descrevem adequadamente o escoamento médio do ar para áreas da Floresta Amazônica, pois apresentam aproximações excelentes aos dados médios da RDSU. Entretanto, tendo em vista que o modelo triangular necessita de maior volume de cálculos para gerar os perfis, que o retangular, ou seja, apresentando maior complexidade para obtenção dos resultados, em termos de custo-benefício, o modelo retangular se mostrou mais eficiente, pois, apesar de ser simplificado, chegou a resultados, ligeiramente, melhores.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A descrição do escoamento médio do ar para as áreas de floresta é bastante relevante para o entendimento dos processos de interação entre a biosfera e a atmosfera. Em geral, realizar a coleta de dados da velocidade do vento, em diferentes alturas para biomas variados, é um processo bastante complexo e que demanda muitos recursos. Dessa forma, a modelagem matemática para este tipo de fenômeno se faz muito necessária, pois demanda um volume de informações muito menor e que podem ser estimadas com base em medidas existentes para outras regiões de floresta. Assim sendo, este trabalho buscou descrever, por meio da modelagem matemática, o escoamento médio do ar, para diferentes arquiteturas de floresta e características do escoamento, de forma a contribuir para os estudos dos processos físicos de interação biosfera-atmosfera.

Para a modelagem matemática da distribuição vertical de biomassa no interior de uma floresta, se estruturam dois modelos: no primeiro, chamado de retangular, considerou-se uma densidade de área foliar constante; no segundo, denominado de triangular, se concebeu uma variação linear da densidade, crescente até o ponto de maior concentração de biomassa e decrescente desse ponto até o topo da floresta. Desse modo, aplicando um termo semelhante à força de arrasto e que expressa como a biomassa interage com o escoamento do ar nas equações de Navier-Stokes e incluindo, separadamente, os dois modelos de arquitetura, geraram-se as EDOs que descrevem como devem ocorrer as interações entre o escoamento estacionário do ar e uma floresta.

Para o modelo retangular, a EDO relacionada apresentou uma resolução mais simples, uma vez que é caracterizada por coeficientes constantes, podendo ser resolvida por técnicas mais conhecidas e menos trabalhosas. Em contrapartida, a obtenção das soluções para o modelo triangular, que precisou ser dividido em duas EDOs com coeficientes variáveis distintas, apresentou-se como um desafio muito maior que o caso retangular, uma vez que a técnica utilizada, em geral, não é tema dos cursos de graduação em Matemática e apresenta um volume de cálculos muito grande. Outrossim, a implementação computadorizada das equações resultantes das soluções se apresentou bastante complicada, em razão da quantidade de coeficientes e polinômios gerados. Nesse sentido, ao analisar os resultados obtidos para cada um

dos modelos, verificou-se que o retangular se apresentou, ligeiramente, melhor que o triangular, ao contrário do que se esperava. Portanto, em termos de custo-benefício, o uso da arquitetura retangular expressa maior eficiência. Contudo, apesar das dificuldades impostas pelo uso do modelo de arquitetura triangular, podem-se realizar estudos com um parâmetro que não existe no retangular, ou seja, a variação da altura de maior concentração de biomassa.

Ao se realizarem os testes de sensibilidade com os modelos, verificaram-se boas respostas às variações, tanto dos parâmetros da floresta quanto do escoamento, evidenciando, assim, a aplicabilidade desses modelos para diferentes tipos de floresta da região Amazônica, em especial o retangular, dada sua simplicidade e eficiência. Adicionalmente, ao se comparar os resultados dos modelos com os dados coletados na Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã, que se caracteriza como uma área de floresta Amazônica sem influências de atividades humanas, observaram-se aproximações muito boas, validando as equações dos modelos.

A fim de aprimorar os resultados apresentados nesse trabalho, sugere-se para trabalhos futuros:

- Aplicação dos modelos a diferentes tipos de floresta, não, necessariamente, da Amazônia, verificando o grau de aproximação entre os modelos e dados coletados.
- Aperfeiçoamento dos modelos, em especial do triangular, por meio de exclusão de parâmetros que melhorem a sua eficiência, de maneira semelhante ao que foi feito no modelo Souza e Souza modificado.
- Inclusão de modelos matemáticos para a densidade de área foliar que se ajustem a diferentes formatos de distribuição de biomassa da floresta como, por exemplo, triangular simplificado (triângulo retângulo), na forma de trapézio retângulo (combinação do triangular com retangular) e parabólico.



## REFERÊNCIAS

- ACHESON, D. J. **Elementary Fluid Dynamics**. Oxford University Press, 1990.
- AEROFLAP. <<https://www.aeroflap.com.br/lockheed-martin-e-nasa-iniciam-preparacao-para-testes-no-aviao-supersonico-x-plane/>>. Acesso em: 11 de julho de 2023.
- AMAZONAS. **Reserva de Desenvolvimento Sustentável do Uatumã**. Vol. 1 e 2. 2009.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6ª ed. San Diego, Califórnia, EUA: Elsevier, 2005.
- ARYA, S. P. **Introduction to Micrometeorology**. San Diego: Academic Press, 2001.
- AUTOO. <<https://www.autoo.com.br/galeria/novo-classe-a-sedan-sera-o-carro-mais-aerodinamico-do-mundo/>>. Acesso em: 11 de julho de 2023.
- COSTA, F. R. C.; ESPINELLI, F. P.; FIGUEIREDO, F. O. G **Guia de Marantáceas da Reserva Ducke e da Reserva Biológica do Uatumã** = Guide to the Marantaceae of the Reserva Ducke and Reserva Biológica do Uatumã. Manaus: INPA, 2008.
- DE ANDRÉ, M. E. D. A. Estudo de caso: seu potencial na educação. **Cadernos de Pesquisa**, n. 49, p. 51-54, 2013. Disponível em: <<http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/cp/article/view/1427>>. Acesso em: 11 de julho de 2023.
- GALVÃO, J. A. C.; FISCH, G. **Balço de Energia em Áreas de Floresta e de Pastagem na Amazônia (Ji-Paraná, RO)**. Revista Brasileira de Meteorologia, v. 15, n. 2, 2000.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, Volume 1: Mecânica**. 10ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2016a.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, Volume 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 10ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2016b.
- MICHILES, A. A. dos S., **Notas de Aulas de Física-Matemática**, 2019.

OMETTO, J. C. **Bioclimatologia Vegetal**. São Paulo: Agronômica Ceres, 1981

SANTANA, R. A. S.; **Estudo do Escoamento Turbulento Atmosférico em Diferentes Sítios Experimentais Localizados na Amazônia**. 2017. Doutorado em Clima e Ambiente, Universidade do Estado do Amazonas, 2017.

SOUZA, C. M.; DIAS-JÚNIOR, C. Q.; TÓTA, J.; SÁ, L. D. A. **An Empirical-Analytical Model of the Vertical Wind Speed Profile above and within an Amazon Forest Site**, Meteorol. Appl., vol. 23, no. 1, p. 158–164, 2016.

TÓTA, J. D.; FITZJARRALD, R.; SILVA-DIAS, M. A. F. **Amazon Rainforest Exchange of Carbon and Subcanopy Air Flow: Manaus LBA Site - A Complex Terrain Condition**, Sci. World J., vol. 2012, p. 1–19, 2012.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

YI, C. **Momentum Transfer within Canopies**, J. Appl. Meteorol. Climatol., vol. 47, no. 1, pp. 262–275, 2008.

**ANEXO**  
**RESOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO ESCOAMENTO**

**Acima da Floresta**

Equação diferencial:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A1)$$

$$\text{Condições de Contorno: } \begin{cases} u(h) = u_h \\ \frac{du}{dz}(\kappa h) = 0 \end{cases}$$

Sendo  $\kappa = H/h$  e  $H$  a altura em que a velocidade de escoamento é máxima, ou seja, não há mais variação da velocidade  $u$  com a altura  $z$ , a partir de  $z = H$ .

Resolução:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dz} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \int d \left( \frac{du}{dz} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int dz \Rightarrow \frac{du}{dz} + c_0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z + c_1)$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z + \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} c_1 - c_0 \right) \Rightarrow \int du = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int z dz + C_1 \int dz$$

$$u + c_2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{z^2}{2} + c_3 \right) + C_1 (z + c_4) \Rightarrow u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} c_3 + C_1 c_4 - c_2 \right)$$

$$u(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (A2)$$

Aplicando a condição de contorno  $u(h) = u_h$ :

$$u(h) = u_h = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} + C_1 h + C_2 \Rightarrow C_2 = u_h - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} - C_1 h \quad (A3)$$

Aplicando a condição de contorno  $\frac{du}{dz}(\kappa h) = 0$ :

$$\frac{du}{dz}(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z + C_1 \Rightarrow \frac{du}{dz}(\kappa h) = 0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \kappa h + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \kappa h \quad (A4)$$

Substituindo a equação A4 na A3:

$$C_2 = u_h - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} - \left( -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \kappa h \right) h = u_h - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} (h - 2\kappa h) \quad (A5)$$

Substituindo os resultados A4 e A5 na equação A2:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \kappa h z + u_h - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h}{2} (h - 2\kappa h) \\ &= u_h + \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) h \left( 2\kappa z + h - 2\kappa h - \frac{z^2}{h} \right) \\ &= u_h + \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right) h \left[ 2\kappa z - h(2\kappa - 1) - \frac{z^2}{h} \right] \end{aligned}$$

Chamando:

$$\gamma = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$f(z) = 2\kappa z - h(2\kappa - 1) - \frac{z^2}{h}$$

Fica-se com a solução:

$$u(z) = u_h + \frac{\gamma}{2\mu} h f(z) \quad (A6)$$

## Interior da Floresta

### Modelo Retangular:

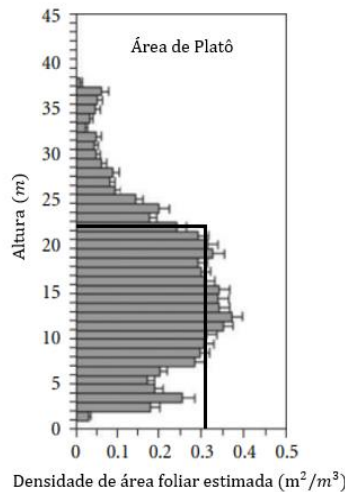
Distribuição de Biomassa:

$$a(z) = a_0 = \frac{I_{AF}}{h'} = \frac{I_{AF}}{(3/4)h} = \frac{4}{3} \frac{I_{AF}}{h}$$

$$\beta(z) = a(z) \vartheta_a \Rightarrow \beta = \frac{4}{3} \frac{I_{AF}}{h} \vartheta_a$$

Equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\beta}{v} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A7)$$



$$\text{Condições de Contorno: } \begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = u_h \end{cases}$$

Resolução:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\beta}{v} u = -\frac{\gamma}{\mu}$$

A solução geral,  $u(z)$ , da EDO de segunda ordem com coeficientes constantes não-homogênea, A7, é obtida somando-se as soluções da parte homogênea,  $u_H$ , e da parte particular,  $u_P$ :

$$u(z) = u_H + u_P$$

Solução da parte homogênea (equação característica):

$$s^2 - \frac{\beta}{\nu} = 0 \Rightarrow s = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$$

$$u_H = C_1 e^{s_1 z} + C_2 e^{s_2 z} = C_1 e^{\sqrt{\frac{\beta}{\nu}} z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\beta}{\nu}} z}$$

Chamando  $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\nu}}$ , fica-se com:

$$u_H = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} \quad (A8)$$

Solução da parte particular (constante):

$$u_P = C_3, \quad \frac{du_P}{dz} = 0, \quad \frac{d^2 u_P}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2 u_P}{dz^2} - \frac{\beta}{\nu} u_P = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow 0 - \frac{\beta}{\nu} C_3 = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow C_3 = \frac{\gamma \nu}{\mu \beta}$$

$$u_P = \frac{\gamma \nu}{\mu \beta} \quad (A9)$$

Somando as equações A8 e A9, para se obter a solução geral:

$$u(z) = u_H + u_P = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} + \frac{\gamma \nu}{\mu \beta} \quad (A10)$$

Aplicando a condição de contorno  $u(0) = 0$ :

$$u(0) = 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{\gamma \nu}{\mu \beta} \Rightarrow C_2 = -\left(C_1 + \frac{\gamma \nu}{\mu \beta}\right) \quad (A11)$$

Aplicando a condição de contorno  $u(h) = u_h$ :

$$u(h) = u_h = C_1 e^{\alpha h} + C_2 e^{-\alpha h} + \frac{\gamma \nu}{\mu \beta} \quad (A12)$$

Substituindo a equação A11 na A12:

$$u_h = C_1 e^{\alpha h} - \left( C_1 + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \right) e^{-\alpha h} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \Rightarrow C_1 (e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}) = u_h + \frac{\gamma v}{\mu \beta} (e^{-\alpha h} - 1)$$

$$C_1 = \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{-\alpha h} - 1)}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} \quad (A13)$$

Substituindo a equação A13 na A11:

$$\begin{aligned} C_2 &= - \left[ \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{-\alpha h} - 1)}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \right] = - \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{-\alpha h} - 1 + e^{\alpha h} - e^{-\alpha h})}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} \\ &= - \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{\alpha h} - 1)}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} \quad (A14) \end{aligned}$$

Voltando os coeficientes, dados pelas equações A13 e A14, para a equação A10:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{-\alpha h} - 1)}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} e^{\alpha z} - \frac{u_h + (\gamma v / \mu \beta) (e^{\alpha h} - 1)}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} e^{-\alpha z} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \\ &= u_h \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \frac{(e^{-\alpha h} - 1) e^{\alpha z} - (e^{\alpha h} - 1) e^{-\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \\ &= u_h \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{\alpha(h-z)} + e^{-\alpha z} - e^{\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \\ &= u_h \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{\mu \beta} \left[ \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{\alpha(h-z)} + e^{-\alpha z} - e^{\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + 1 \right] \\ &= u_h \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} + \frac{\gamma v}{2\mu \beta} \left[ 1 - \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z} + e^{\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h-z)}}{e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}} \right] \end{aligned}$$

Chamando:

$$F_1(z) = e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}$$

$$F_2(z) = e^{\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h-z)}$$

$$\xi_1 = F_1(h) = e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}$$

$$\eta = \frac{2v}{\beta}$$

Fica-se com a solução:

$$u(z) = u_h \frac{F_1(z)}{\xi_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \eta \left[ 1 - \frac{F_1(z) + F_2(z)}{\xi_1} \right] \quad (A15)$$

### Modelo Triangular:

Distribuição de Biomassa:

1. Entre 0 e  $z_m$ :

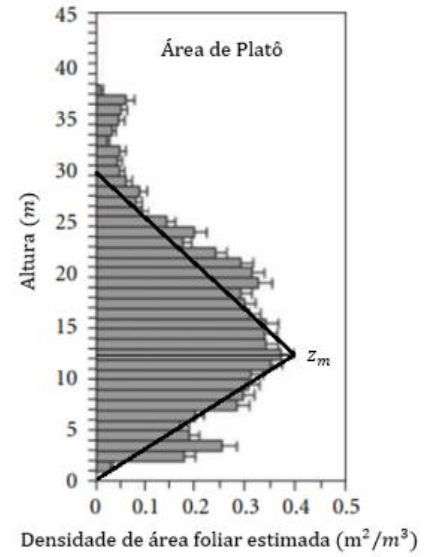
$$a_1(z) = \frac{z}{z_m} a_m = \frac{z}{z_m} \frac{2I_{AF}}{h} = \left( \frac{2I_{AF}}{z_m h} \right) z$$

$$\beta_1(z) = a_1(z) \vartheta_a = \left( \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{z_m h} \right) z$$

2. Entre  $z_m$  e  $h$ :

$$a_2(z) = \frac{h-z}{h-z_m} a_m = \frac{h-z}{h-z_m} \frac{2I_{AF}}{h} = \left[ \frac{2I_{AF}}{(h-z_m)h} \right] (h-z)$$

$$\beta_2(z) = a_2(z) \vartheta_a = \left[ \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{(h-z_m)h} \right] (h-z)$$



Equações diferenciais:

1. Entre 0 e  $z_m$ :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\beta_1(z)}{\nu} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} - \left( \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{z_m h \nu} \right) z u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Chamando:

$$\varepsilon = \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{z_m h \nu}$$

Fica-se com:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \varepsilon z u = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A16)$$

Condições de Contorno:  $\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(h) = u_h \end{cases}$

2. Entre  $z_m$  e  $h$ :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\beta_2(z)}{\nu} u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dz^2} - \left[ \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{(h-z_m) h \nu} \right] (h-z) u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Chamando:

$$\lambda = \frac{2I_{AF} \vartheta_a}{(h-z_m) h \nu}$$

Fica-se com:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \lambda(h-z)u = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A17)$$

Para a resolução da equação A17 se inclui uma terceira condição de contorno para retirar a dependência direta de  $u(z)$  em relação à  $\gamma$ , mas que obriga a continuidade com a solução obtida para  $0 \leq z \leq z_m$ , ou seja,  $u_2(z_m) = u_1(z_m)$ .

$$\text{Condições de Contorno: } \begin{cases} u(0) = 0 \\ u_2(z_m) = u_1(z_m) \\ u(h) = u_h \end{cases}$$

Método de resolução:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \frac{du}{dz}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2}$$

Desenvolvendo a série de  $n = 0$  até  $n = 8$ :

$$u(z) = \sum_{n=0}^8 c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + c_8 z^8$$

Aplicando a condição de contorno  $u(0) = 0$ :

$$u(0) = 0 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + c_8 z^8$$

$$c_0 = 0$$

Desse modo, tanto para  $0 \leq z \leq z_m$  quanto para  $z_m \leq z \leq h$ , a solução fica na forma:

$$u(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + c_7 z^7 + c_8 z^8 \quad (A18)$$

1. Resolução para  $0 \leq z \leq z_m$ :

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \varepsilon z u = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} - \varepsilon z \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A19)$$

Fazendo  $n = n + 2$ , no primeiro termo, e passando  $z$  para dentro da série, no segundo termo do lado esquerdo da equação A19, obtém-se:

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)[(n+2)-1] c_{n+2} z^{n+2-2} - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = -\frac{\gamma}{\mu}$$



Rearrmando, fica-se com:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2}z^n - \varepsilon c_n z^{n+1}] = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A20)$$

Aplicando os valores de  $n = 0$  a  $n = 8$ , no lado esquerdo da equação A20, obtém-se:

$$(0+2)(0+1)c_{0+2}z^0 - \varepsilon c_0 z^{0+1} = 2c_2 - \varepsilon c_0 z$$

$$(1+2)(1+1)c_{1+2}z^1 - \varepsilon c_1 z^{1+1} = 6c_3 z - \varepsilon c_1 z^2$$

$$(2+2)(2+1)c_{2+2}z^2 - \varepsilon c_2 z^{2+1} = 12c_4 z^2 - \varepsilon c_2 z^3$$

$$(3+2)(3+1)c_{3+2}z^3 - \varepsilon c_3 z^{3+1} = 20c_5 z^3 - \varepsilon c_3 z^4$$

$$(4+2)(4+1)c_{4+2}z^4 - \varepsilon c_4 z^{4+1} = 30c_6 z^4 - \varepsilon c_4 z^5$$

$$(5+2)(5+1)c_{5+2}z^5 - \varepsilon c_5 z^{5+1} = 42c_7 z^5 - \varepsilon c_5 z^6$$

$$(6+2)(6+1)c_{6+2}z^6 - \varepsilon c_6 z^{6+1} = 56c_8 z^6 - \varepsilon c_6 z^7$$

$$(7+2)(7+1)c_{7+2}z^7 - \varepsilon c_7 z^{7+1} = 72c_9 z^7 - \varepsilon c_7 z^8$$

$$(8+2)(8+1)c_{8+2}z^8 - \varepsilon c_8 z^{8+1} = 90c_{10} z^8 - \varepsilon c_8 z^9$$

Juntando os termos semelhantes ( $z$  com o mesmo expoente) e igualando ao lado esquerdo da equação A20, fica-se com:

$$\begin{aligned} 2c_2 + (6c_3 - \varepsilon c_0)z + (12c_4 - \varepsilon c_1)z^2 + (20c_5 - \varepsilon c_2)z^3 + (30c_6 - \varepsilon c_3)z^4 \\ + (42c_7 - \varepsilon c_4)z^5 + (56c_8 - \varepsilon c_5)z^6 + (72c_9 - \varepsilon c_6)z^7 + (90c_{10} - \varepsilon c_7)z^8 \\ = -\frac{\gamma}{\mu} + 0z + 0z^2 + 0z^3 + 0z^4 + 0z^5 + 0z^6 + 0z^7 + 0z^8 \quad (A21) \end{aligned}$$

A partir da equação A21, obtêm-se os valores dos coeficientes ou as relações entre eles, ou seja:

$$2c_2 = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow c_2 = -\frac{\gamma}{2\mu}$$

$$6c_3 - \varepsilon c_0 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{\varepsilon}{6} c_0 = \frac{\varepsilon}{6} 0 = 0$$

$$12c_4 - \varepsilon c_1 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{\varepsilon}{12} c_1$$

$$20c_5 - \varepsilon c_2 = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{\varepsilon}{20} c_2 = \frac{\varepsilon}{20} \left( -\frac{\gamma}{2\mu} \right) = -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{\varepsilon}{20}$$

$$30c_6 - \varepsilon c_3 = 0 \Rightarrow c_6 = \frac{\varepsilon}{30} c_3 = \frac{\varepsilon}{30} 0 = 0$$

$$42c_7 - \varepsilon c_4 = 0 \Rightarrow c_7 = \frac{\varepsilon}{42} c_4 = \frac{\varepsilon}{42} \cdot \frac{\varepsilon}{12} c_1 = c_1 \frac{\varepsilon^2}{504}$$

$$56c_8 - \varepsilon c_5 = 0 \Rightarrow c_8 = \frac{\varepsilon}{56} c_5 = \frac{\varepsilon^2}{1120} \left( -\frac{\gamma}{2\mu} \right) = -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{\varepsilon^2}{1120}$$

Dos resultados acima, logra-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$c_{n+3} = \frac{\varepsilon}{(n+2)(n+3)} c_n$$

Voltando os coeficientes à solução A18, tem-se:

$$\begin{aligned} u(z) &= c_1 z - \frac{\gamma}{2\mu} z^2 + 0z^3 + c_1 \frac{\varepsilon}{12} z^4 - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\varepsilon}{20} z^5 + 0z^6 + c_1 \frac{\varepsilon^2}{504} z^7 - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\varepsilon^2}{1120} z^8 \\ &= c_1 \left( z + \frac{\varepsilon}{12} z^4 + \frac{\varepsilon^2}{504} z^7 \right) - \frac{\gamma}{2\mu} \left( z^2 + \frac{\varepsilon}{20} z^5 + \frac{\varepsilon^2}{1120} z^8 \right) \\ &= \frac{c_1}{504} (504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{1120} (1120z^2 + 56\varepsilon z^5 + \varepsilon^2 z^8) \quad (A22) \end{aligned}$$

Aplicando a condição de contorno  $u(h) = u_h$ :

$$\begin{aligned} u(h) = u_h &= \frac{c_1}{504} (504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{1120} (1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8) \\ c_1 &= \left[ u_h + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{1120} (1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8) \right] \frac{504}{(504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7)} \quad (A23) \end{aligned}$$

Substituindo a equação A23 na A22, fica-se com:

$$\begin{aligned} u(z) &= \left[ u_h + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{1120} (1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8) \right] \frac{504}{504} \left( \frac{504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7}{504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7} \right) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{1120} (1120z^2 + 56\varepsilon z^5 + \varepsilon^2 z^8) \\ u(z) &= u_h \frac{504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7}{504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7} \\ &\quad + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8}{1120} \left( \frac{504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7}{504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7} \right) \\ &\quad - \frac{1120z^2 + 56\varepsilon z^5 + \varepsilon^2 z^8}{1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8} \end{aligned}$$

Chamando:

$$P_1(z) = 504z + 42\varepsilon z^4 + \varepsilon^2 z^7$$

$$P_2(z) = 1120z^2 + 56\varepsilon z^5 + \varepsilon^2 z^8$$

$$\delta_1 = P_1(h) = 504h + 42\varepsilon h^4 + \varepsilon^2 h^7$$

$$\delta_2 = P_2(h) = 1120h^2 + 56\varepsilon h^5 + \varepsilon^2 h^8$$

Fica-se com:

$$u(z) = u_h \frac{P_1(z)}{\delta_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\delta_2}{1120} \left[ \frac{P_1(z)}{\delta_1} - \frac{P_2(z)}{\delta_2} \right]$$

Finalmente, chamando:

$$\zeta = \frac{\delta_2}{1120}$$

Obtém-se a solução:

$$u(z) = u_h \frac{P_1(z)}{\delta_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \zeta \left[ \frac{P_1(z)}{\delta_1} - \frac{P_2(z)}{\delta_2} \right] \quad (A24)$$

2. Resolução para  $z_m \leq z \leq h$ :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \lambda(h-z)u = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} - \lambda(h-z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A25)$$

Fazendo  $n = n + 2$ , no primeiro, separando  $h$  e  $z$ , no segundo, e passando  $z$  para dentro da série, no terceiro termo do lado esquerdo da equação A25, obtém-se:

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)[(n+2)-1]c_{n+2}z^{n+2-2} - \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = -\frac{\gamma}{\mu}$$

Rearrmando, fica-se com:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+2)(n+1)c_{n+2} - \lambda h c_n]z^n + \lambda c_n z^{n+1}\} = -\frac{\gamma}{\mu} \quad (A26)$$

Aplicando os valores de  $n = 0$  a  $n = 8$ , no lado esquerdo da equação A26, obtém-se:

$$[(0+2)(0+1)c_{0+2} - \lambda h c_0]z^0 + \lambda c_0 z^{0+1} = (2c_2 - \lambda h c_0) + \lambda c_0 z$$

$$[(1+2)(1+1)c_{1+2} - \lambda h c_1]z^1 + \lambda c_1 z^{1+1} = (6c_3 - \lambda h c_1)z + \lambda c_1 z^2$$

$$[(2+2)(2+1)c_{2+2} - \lambda hc_2]z^2 + \lambda c_2 z^{2+1} = (12c_4 - \lambda hc_2)z^2 + \lambda c_2 z^3$$

$$[(3+2)(3+1)c_{3+2} - \lambda hc_3]z^3 + \lambda c_3 z^{3+1} = (20c_5 - \lambda hc_3)z^3 + \lambda c_3 z^4$$

$$[(4+2)(4+1)c_{4+2} - \lambda hc_4]z^4 + \lambda c_4 z^{4+1} = (30c_6 - \lambda hc_4)z^4 + \lambda c_4 z^5$$

$$[(5+2)(5+1)c_{5+2} - \lambda hc_5]z^5 + \lambda c_5 z^{5+1} = (42c_7 - \lambda hc_5)z^5 + \lambda c_5 z^6$$

$$[(6+2)(6+1)c_{6+2} - \lambda hc_6]z^6 + \lambda c_6 z^{6+1} = (56c_8 - \lambda hc_6)z^6 + \lambda c_6 z^7$$

$$[(7+2)(7+1)c_{7+2} - \lambda hc_7]z^7 + \lambda c_7 z^{7+1} = (72c_9 - \lambda hc_7)z^7 + \lambda c_7 z^8$$

$$[(8+2)(8+1)c_{8+2} - \lambda hc_8]z^8 + \lambda c_8 z^{8+1} = (90c_{10} - \lambda hc_8)z^8 + \lambda c_8 z^9$$

Juntando os termos semelhantes ( $z$  com o mesmo expoente) e igualando ao lado esquerdo da equação A26, fica-se com:

$$\begin{aligned} 2c_2 - \lambda hc_0 + [6c_3 - \lambda(hc_1 - c_0)]z + [12c_4 - \lambda(hc_2 - c_1)]z^2 + [20c_5 - \lambda(hc_3 - c_2)]z^3 \\ + [30c_6 - \lambda(hc_4 - c_3)]z^4 + [42c_7 - \lambda(hc_5 - c_4)]z^5 \\ + [56c_8 - \lambda(hc_6 - c_5)]z^6 + [72c_9 - \lambda(hc_7 - c_6)]z^7 \\ + [90c_{10} - \lambda(hc_8 - c_7)]z^8 \\ = -\frac{\gamma}{\mu} + 0z + 0z^2 + 0z^3 + 0z^4 + 0z^5 + 0z^6 + 0z^7 + 0z^8 \quad (A27) \end{aligned}$$

A partir da equação A27, obtêm-se os valores dos coeficientes ou as relações entre eles, ou seja:

$$2c_2 - \lambda hc_0 = -\frac{\gamma}{\mu} \Rightarrow c_2 = \frac{\lambda h}{2} c_0 - \frac{\gamma}{2\mu} = \frac{\lambda h}{2} 0 - \frac{\gamma}{2\mu} = -\frac{\gamma}{2\mu}$$

$$6c_3 - \lambda(hc_1 - c_0) = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{\lambda h}{6} c_1$$

$$12c_4 - \lambda(hc_2 - c_1) = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{\lambda}{12}(hc_2 - c_1) = \frac{\lambda}{12} h \left( -\frac{\gamma}{2\mu} \right) - \frac{\lambda}{12} c_1$$

$$c_4 = -c_1 \frac{\lambda}{12} - \frac{\gamma \lambda h}{2\mu 12}$$

$$20c_5 - \lambda(hc_3 - c_2) = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{\lambda}{20}(hc_3 - c_2) = \frac{\lambda}{20} \left[ h \left( \frac{\lambda h}{6} c_1 \right) - \left( -\frac{\gamma}{2\mu} \right) \right]$$

$$c_5 = c_1 \frac{\lambda^2 h^2}{120} + \frac{\gamma \lambda}{2\mu 20}$$

$$30c_6 - \lambda(hc_4 - c_3) = 0 \Rightarrow c_6 = \frac{\lambda}{30}(hc_4 - c_3) = \frac{\lambda}{30} \left[ h \left( -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda h}{12} - c_1 \frac{\lambda}{12} \right) - \left( \frac{\lambda h}{6} c_1 \right) \right]$$

$$c_6 = -c_1 \left( \frac{\lambda^2 h}{360} + \frac{\lambda^2 h}{180} \right) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h^2}{360} = -c_1 \frac{\lambda^2 h}{120} - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h^2}{360}$$

$$42c_7 - \lambda(hc_5 - c_4) = 0 \Rightarrow c_7 = \frac{\lambda}{42}(hc_5 - c_4)$$

$$\begin{aligned} c_7 &= \frac{\lambda}{42} \left[ h \left( c_1 \frac{\lambda^2 h^2}{120} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda}{20} \right) - \left( -c_1 \frac{\lambda}{12} - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda h}{12} \right) \right] \\ &= c_1 \left( \frac{\lambda^3 h^3}{5040} + \frac{\lambda^2}{504} \right) + \frac{\gamma}{2\mu} \left( \frac{\lambda^2 h}{840} + \frac{\lambda^2 h}{504} \right) = c_1 \left( \frac{\lambda^3 h^3}{5040} + \frac{\lambda^2}{504} \right) + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h}{315} \end{aligned}$$

$$56c_8 - \lambda(hc_6 - c_5) = 0 \Rightarrow c_8 = \frac{\lambda}{56}(hc_6 - c_5)$$

$$\begin{aligned} c_8 &= \frac{\lambda}{56} \left[ h \left( -c_1 \frac{\lambda^2 h}{120} - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h^2}{360} \right) - \left( c_1 \frac{\lambda^2 h^2}{120} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda}{20} \right) \right] \\ &= -c_1 \left( \frac{\lambda^3 h^2}{6720} + \frac{\lambda^3 h^2}{6720} \right) - \frac{\gamma}{2\mu} \left( \frac{\lambda^3 h^3}{20160} + \frac{\lambda^2}{1120} \right) = -c_1 \frac{\lambda^3 h^2}{3360} - \frac{\gamma}{2\mu} \left( \frac{\lambda^3 h^3}{20160} + \frac{\lambda^2}{1120} \right) \end{aligned}$$

Dos resultados acima, logra-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$c_{n+3} = \frac{\lambda}{(n+2)(n+3)}(hc_{n+1} - c_n)$$

Voltando os coeficientes à solução A18, tem-se:

$$\begin{aligned} u(z) &= c_1 z - \frac{\gamma}{2\mu} z^2 + c_1 \frac{\lambda h}{6} z^3 - \left( c_1 \frac{\lambda}{12} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda h}{12} \right) z^4 + \left( c_1 \frac{\lambda^2 h^2}{120} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda}{20} \right) z^5 \\ &\quad - \left( c_1 \frac{\lambda^2 h}{120} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h^2}{360} \right) z^6 + \left[ c_1 \left( \frac{\lambda^3 h^3}{5040} + \frac{\lambda^2}{504} \right) + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{\lambda^2 h}{315} \right] z^7 \\ &\quad - \left[ c_1 \frac{\lambda^3 h^2}{3360} + \frac{\gamma}{2\mu} \left( \frac{\lambda^3 h^3}{20160} + \frac{\lambda^2}{1120} \right) \right] z^8 \\ &= c_1 \left[ z + \frac{\lambda h}{6} z^3 - \frac{\lambda}{12} z^4 + \frac{\lambda^2 h^2}{120} z^5 - \frac{\lambda^2 h}{120} z^6 + \left( \frac{\lambda^3 h^3}{5040} + \frac{\lambda^2}{504} \right) z^7 - \frac{\lambda^3 h^2}{3360} z^8 \right] \\ &\quad - \frac{\gamma}{2\mu} \left[ z^2 + \frac{\lambda h}{12} z^4 - \frac{\lambda}{20} z^5 + \frac{\lambda^2 h^2}{360} z^6 - \frac{\lambda^2 h}{315} z^7 + \left( \frac{\lambda^3 h^3}{20160} + \frac{\lambda^2}{1120} \right) z^8 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(z) = & \frac{c_1}{10080} [10080z + 1680\lambda h z^3 - 840\lambda z^4 + 84\lambda^2 h^2 z^5 - 84\lambda^2 h z^6 \\
& + (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2) z^7 - 3\lambda^3 h^2 z^8] \\
& - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} [20160z^2 + 1680\lambda h z^4 - 1008\lambda z^5 + 56\lambda^2 h^2 z^6 - 64\lambda^2 h z^7 \\
& + (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2) z^8] \quad (A28)
\end{aligned}$$

Chamando:

$$\begin{aligned}
T_1(z) = & 10080z + 1680\lambda h z^3 - 840\lambda z^4 + 84\lambda^2 h^2 z^5 - 84\lambda^2 h z^6 + (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2) z^7 \\
& - 3\lambda^3 h^2 z^8
\end{aligned}$$

$$T_2(z) = 20160z^2 + 1680\lambda h z^4 - 1008\lambda z^5 + 56\lambda^2 h^2 z^6 - 64\lambda^2 h z^7 + (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2) z^8$$

Fica-se com:

$$u(z) = \frac{c_1}{10080} T_1(z) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} T_2(z) \quad (A29)$$

Para determinar os coeficientes  $c_1$  e  $\gamma$ , devem-se aplicar as condições de contorno na equação A29, iniciando por  $u_2(z_m) = u_1(z_m) \Rightarrow u(z_m) = u_{1z_m}$ . Contudo, deve-se lembrar que  $u_{1z_m}$  é dada pela equação A24, ou seja:

$$u_1(z_m) = u_{1z_m} = u_h \frac{P_1(z_m)}{\delta_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \sigma \left[ \frac{P_1(z_m)}{\delta_1} - \frac{P_2(z_m)}{\delta_2} \right]$$

Na qual:

$$P_1(z_m) = 504z_m + 42\epsilon z_m^4 + \epsilon^2 z_m^7$$

$$P_2(z_m) = 1120z_m^2 + 56\epsilon z_m^5 + \epsilon^2 z_m^8$$

Aplicando a condição de contorno  $u(z_m) = u_{1z_m}$ :

$$u(z_m) = u_{1z_m} = \frac{c_1}{10080} T_1(z_m) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} T_2(z_m)$$

Chamando:

$$\begin{aligned}
Y_1 = T_1(z_m) = & 10080z_m + 1680\lambda h z_m^3 - 840\lambda z_m^4 + 84\lambda^2 h^2 z_m^5 - 84\lambda^2 h z_m^6 \\
& + (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2) z_m^7 - 3\lambda^3 h^2 z_m^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = T_2(z_m) = & 20160z_m^2 + 1680\lambda h z_m^4 - 1008\lambda z_m^5 + 56\lambda^2 h^2 z_m^6 - 64\lambda^2 h z_m^7 \\
& + (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2) z_m^8
\end{aligned}$$

Fica-se com:

$$u_{1z_m} = \frac{c_1}{10080} Y_1 - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} Y_2 \Rightarrow \frac{c_1}{10080} Y_1 = u_{1z_m} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} Y_2$$

$$c_1 = \frac{10080}{Y_1} \left( u_{1z_m} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} Y_2 \right) \quad (A30)$$

Substituindo a equação A30 na A29:

$$u(z) = \frac{10080}{10080} \frac{1}{Y_1} \left( u_{1z_m} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} Y_2 \right) T_1(z) - \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} T_2(z)$$

$$= u_{1z_m} \frac{T_1(z)}{Y_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} \frac{Y_2 T_1(z) - Y_1 T_2(z)}{Y_1} \quad (A31)$$

Aplicando a condição de contorno  $u(h) = u_h$ :

$$u(h) = u_h = u_{1z_m} \frac{T_1(h)}{\tau_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} \frac{Y_2 T_1(h) - Y_1 T_2(h)}{Y_1}$$

Chamando:

$$\Psi_1 = T_1(h) = 10080h + 1680\lambda h h^3 - 840\lambda h^4 + 84\lambda^2 h^2 h^5 - 84\lambda^2 h h^6$$

$$+ (2\lambda^3 h^3 + 20\lambda^2) h^7 - 3\lambda^3 h^2 h^8$$

$$= 10080h + 1680\lambda h^4 - 840\lambda h^4 + 84\lambda^2 h^7 - 84\lambda^2 h^7 + 2\lambda^3 h^{10} + 20\lambda^2 h^7 - 3\lambda^3 h^{10}$$

$$= 10080h + 840\lambda h^4 + 20\lambda^2 h^7 - \lambda^3 h^{10}$$

$$\Psi_2 = T_2(h) = 20160h^2 + 1680\lambda h h^4 - 1008\lambda h^5 + 56\lambda^2 h^2 h^6 - 64\lambda^2 h h^7$$

$$+ (\lambda^3 h^3 + 18\lambda^2) h^8$$

$$= 20160h^2 + 1680\lambda h^5 - 1008\lambda h^5 + 56\lambda^2 h^8 - 64\lambda^2 h^8 + \lambda^3 h^{11} + 18\lambda^2 h^8$$

$$= 20160h^2 + 672\lambda h^5 + 10\lambda^2 h^8 + \lambda^3 h^{11}$$

Fica-se com:

$$u_h = u_{1z_m} \frac{\Psi_1}{Y_1} + \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} \frac{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2}{Y_1} \Rightarrow \frac{\gamma}{2\mu} \frac{1}{20160} \frac{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2}{Y_1} = u_h - u_{1z_m} \frac{\Psi_1}{Y_1}$$

$$\gamma = \frac{2\mu 20160}{Y_2 \Psi_1 - Y_1 \Psi_2} Y_1 \left( u_h - u_{1z_m} \frac{\Psi_1}{Y_1} \right) \quad (A32)$$

Substituindo a equação A32 na A31, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= u_{1zm} \frac{T_1(z)}{\Upsilon_1} + \frac{2\mu 20160}{2\mu 20160} \frac{\Upsilon_1}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} \frac{\Upsilon_2 T_1(z) - \Upsilon_1 T_2(z)}{\Upsilon_1} \left( u_h - u_{1zm} \frac{\Psi_1}{\Upsilon_1} \right) \\
 &= u_{1zm} \frac{T_1(z)}{\Upsilon_1} + \frac{\Upsilon_2 T_1(z) - \Upsilon_1 T_2(z)}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} \left( u_h - u_{1zm} \frac{\Psi_1}{\Upsilon_1} \right) \\
 &= u_h \frac{\Upsilon_2 T_1(z) - \Upsilon_1 T_2(z)}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} + u_{1zm} \left[ \frac{T_1(z)}{\Upsilon_1} - \frac{\Psi_1}{\Upsilon_1} \frac{\Upsilon_2 T_1(z) - \Upsilon_1 T_2(z)}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se a solução:

$$u(z) = u_h \frac{\Upsilon_2 T_1(z) - \Upsilon_1 T_2(z)}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} + u_{1zm} \frac{\Psi_1 T_2(z) - \Psi_2 T_1(z)}{\Upsilon_2\Psi_1 - \Upsilon_1\Psi_2} \quad (A33)$$