

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FERNANDO WILLIAN MORAIARE DOS SANTOS

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS
DE MISTURA E DRENAGEM EM UM TANQUE.**

**MANAUS, JANEIRO
2023**

FERNANDO WILLIAN MORAIARE DOS SANTOS

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM E APLICAÇÕES EM
PROBLEMAS DE MISTURA E DRENAGEM EM UM TANQUE.**

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador (a): Dra. Silvia Cristina Belo e Silva
Coorientador (a): Msc. Geraldine Silveira

MANAUS, JANEIRO

2023

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior - UEA de Fernando Willian Moraiare dos Santos.

Aos 15 dias do mês de março de 2023, às 20h, no auditório da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, Dra. Nadime Mustafa Moraes e Dr. Eduardo Lima de Oliveira, o aluno **Fernando Willian Moraiare dos Santos** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "**Equações diferenciais de primeira ordem e aplicações em problemas de mistura e drenagem em um tanque**" como requisito curricular do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,7 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Manaus, 15 de março de 2023

Jose M. R.

Presidente da Banca Examinadora

Silvia Cristina Belo e Silva

Orientadora

Eduardo Lima de Oliveira

Avaliador 1

Nadime Mustafa Moraes

Avaliador 2

Fernando Willian Moraiare dos Santos

Aluno

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho de pesquisa a minha família, que muito me apoiou e me incentivou a realizá-lo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus que me concedeu toda graça divina.

A toda minha família que se fizeram presente em todos os momentos de realização desse trabalho.

A minha professora orientadora Dra. Silvia Cristina Belo e Silva pela excelente orientação no decorrer do trabalho.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Família de curvas solução da equação (1.8).....	14
Figura 2 – Fluxo do campo direcional da equação (1.10)	16
Figura 3 – Fases da modelagem matemática	19
Figura 4 – Tanque de drenagem	21
Figura 5 – Tanque de mistura	22
Figura 6 – Campo de direções de uma EDO.....	26
Figura 7 – escoamento de um fluido de um tanque cilíndrico. Lei de Torricelli.....	28
Figura 8 – Campo de direções do problema 1	31
Figura 9 – Campo de direções para $h(t)=0$	31
Figura 10 – Curva de solução do problema 1.....	32
Figura 11 – Controle deslizante.....	34
Figura 12 – Controles deslizantes x_1 e x_2	34
Figura 13 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2	35
Figura 14 – Condições iniciais do problema 1	35
Figura 15 – Funil do problema 2.....	36
Figura 16 – Base do cone	37
Figura 17 – Gráfico da solução da equação do problema 2.....	39
Figura 18 – Controle deslizante.....	40
Figura 19 – Controles deslizantes x_1 e x_2	40
Figura 20 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2	41
Figura 21 – Condições iniciais do problema 5.....	41
Figura 22 – Tanque cúbico do Problema 3	42
Figura 23 – Campo de direções da equação do problema 3.....	43
Figura 24 – Controle deslizante.....	44
Figura 25 – Controles deslizantes x_1 e x_2	45
Figura 26 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2	45
Figura 27 – Condições iniciais do problema 5.....	46
Figura 28 – Tanque de mistura	47
Figura 29 – Curva de variação da concentração de sal ao longo do tempo dentro do tanque	48
Figura 30 – Gráfico da concentração de sal ao longo do tempo	49
Figura 31 – Controle deslizante.....	51

Figura 32 – Controles deslizantes x_1 e x_2	51
Figura 33 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2	52
Figura 34 – Condições iniciais do problema 5.....	52
Figura 35 – Curva de solução do problema 5.....	55
Figura 36– Controle deslizante.....	56
Figura 37 - Controles deslizantes x_1 e x_2	56
Figura 38 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2	57

RESUMO

Este trabalho de cunho acadêmico apresenta um estudo envolvendo aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) relacionados a área de mistura e drenagem em um tanque. Utilizando uma abordagem metodológica de pesquisa quantitativa e de estratégia descritiva dos resultados com procedimentos de pesquisa experimental utilizando o software Geogebra para a simulações computacionais, e obtenção das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a partir da construção de modelos matemáticos logradas a partir de leis físicas e químicas. As principais conclusões obtidas foram o desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem o processo de mistura e drenagem em um tanque utilizando equações diferenciais de primeira ordem, a identificação dos principais parâmetros e leis físicas ou químicas que afetam esses processos, a otimização, eficácia e aplicabilidade dos modelos desenvolvidos. O estudo indicou que, os modelos matemáticos de mistura e drenagem em um tanque com equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser facilmente adaptados para lidar com diferentes tipos de fluidos, materiais e geometrias, permitindo a sua aplicação em uma ampla gama de contextos industriais e científicos.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias. Mistura e drenagem. Tanque. Modelos matemáticos. Geogebra. Simulações computacionais.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
CAPÍTULO 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
1.1 Aspectos Históricos das Equações Diferenciais	9
1.2 Conhecimentos Iniciais	11
1.2.1 Conceitos Básicos.....	11
1.2.2 Classificação	12
1.2.3 Solução	13
1.2.4 Problemas de Valor Inicial.....	15
1.2.5 Campo de Direções	15
1.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem	16
1.3.1 Equações Diferenciais Separáveis.....	17
1.3.2 Equações Diferenciais Lineares; Método do Fator Integrante	17
1.4 Modelagem com Equações Diferenciais de Primeira Ordem	19
1.4.1 Modelo Matemático de Drenagem em um Tanque	20
1.4.2 Modelo Matemático de Mistura	22
CAPÍTULO 2 METODOLOGIA DA PESQUISA	24
2.1 Abordagem, estratégias de investigação e os procedimentos técnicos	24
2.2 Métodos utilizados para obtenção das equações	25
2.3 Instrumentação e Medidas	25
CAPÍTULO 3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	27
3.1 Drenagem em um tanque (Lei de Torricelli)	27
3.2 Misturas	47
CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
REFERÊNCIAS	62

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais aplicadas em problemas de mistura e drenagem em um tanque são equações matemáticas que descrevem através de modelos matemáticos a concentração de misturas e a dinâmica de líquidos em um tanque que está sendo esvaziado. Essas equações são utilizadas em conjunto de determinadas condições iniciais e parâmetros para modelar processos de mistura e transferência de massa em sistemas industriais, tais como tanques de mistura, reatores químicos, sistemas de tratamento de água, entre outros.

A importância de seu estudo tem razões como a aplicabilidade prática, devido esses tipos de problemas serem comuns em diversas áreas da engenharia e ciências, como química, física, biologia, entre outras. O entendimento das equações diferenciais envolvidas nesses problemas é fundamental para modelar e resolver questões práticas do dia a dia, além disso, podem ajudar a entender diversos fenômenos físicos, como a difusão de substâncias e o movimento de fluidos permitindo o desenvolvimento de soluções eficientes para diversos desafios, como a otimização de processos de mistura e o controle de vazão de líquidos.

Diante disso, a pergunta norteadora da pesquisa é: como as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, podem ser aplicadas na resolução de problemas de mistura e drenagem em um tanque? Para atingir a compreensão desse problema definiu-se como objetivo geral investigar as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e suas aplicações em problemas de mistura e drenagem em um tanque e a fim de compreender melhor o tema da pesquisa teremos seis objetivos específicos:

Para abordar o problema de mistura e drenagem em um tanque, é necessário revisar a literatura existente sobre equações diferenciais de primeira ordem e suas aplicações nesse contexto. É importante compreender os modelos matemáticos e as técnicas para solução dessas equações. Além disso, é necessário identificar os parâmetros e condições iniciais que afetam a solução das equações diferenciais para cada problema. Esses fatores podem incluir a taxa de fluxo da entrada e saída do tanque, a velocidade de agitação, a concentração inicial do soluto, entre outros.

As propriedades físicas dos fluidos, como a viscosidade e a densidade, também são importantes na análise dos problemas. É preciso analisar como essas propriedades podem ser incorporadas nas equações diferenciais e como influenciam

o resultado. A partir dos modelos matemáticos desenvolvidos, é possível prever e controlar a concentração de soluto ou o tempo de escoamento do líquido em um tanque de mistura e drenagem. É importante comparar os resultados obtidos com simulações computacionais para verificar a precisão e a confiabilidade dos modelos.

Além disso, é possível otimizar os modelos matemáticos desenvolvidos para reduzir o tempo necessário para atingir uma concentração ou tempo de escoamento desejado em um tanque de mistura e drenagem. É necessário analisar como os modelos podem ser ajustados para melhorar a eficácia e a eficiência do processo.

Por fim, é necessário avaliar a eficácia e a aplicabilidade dos modelos matemáticos desenvolvidos em diferentes cenários de mistura e drenagem em um tanque. É preciso considerar variações nos parâmetros do sistema, condições iniciais e propriedades físicas dos fluidos para verificar se os modelos são robustos o suficiente para serem aplicados em diferentes contextos. Nesse sentido, o processo de obtenção de equações diferenciais a partir de leis físicas e modelagem matemática envolveu etapas como a compreensão dos fenômenos físicos e químicos e a identificação das variáveis relevantes que influenciam tais sistemas. Em seguida a análise de resultados utilizando o software Geogebra que permite a identificação de padrões e comportamentos interessantes do sistema, o que pode ajudar a entender melhor tais processos.

O trabalho está organizado em introdução, considerações finais, referências e em três capítulos entre a introdução e as considerações finais. No qual o Capítulo 1 aborda a revisão de literatura referente aos principais tópicos que compõe o tema, introdução as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), Equações Diferenciais de Primeira Ordem, Modelagem Matemática e conceitos básicos de Mistura e Drenagem em um Tanque. O capítulo 2 trata da metodologia da pesquisa, abordagem, estratégias e procedimentos, métodos para utilizados para obtenção das equações, instrumentação e medidas. O capítulo 3 apresenta a análise dos resultados, abordagem das aplicações das EDO nos problemas de mistura e drenagem em um tanque.

Em síntese, a pesquisa concluiu que as equações diferenciais de primeira ordem são úteis na modelagem dos sistemas de mistura e drenagem em um tanque, pois, permite a previsão da concentração da solução no tanque em qualquer momento durante o processo de mistura e a previsão da altura do líquido no tanque em qualquer momento durante o processo de drenagem.

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Aspectos Históricos das Equações Diferenciais

Precedentemente aos estudos sobre equações diferenciais, a matemática era dominada pelo estudo de números e geometria, principalmente na antiga Grécia que foi responsável por muitas das contribuições mais importantes nesta área, com matemáticos como Euclides, Arquimedes e Pitágoras desenvolvendo conceitos fundamentais da geometria, teoremas e cálculo. Na Idade Média, a matemática continuou a evoluir, com a contribuição de matemáticos árabes e europeus. Durante esse período, o conhecimento matemático foi transmitido de uma cultura para outra, resultando em um avanço significativo na compreensão dos números e da geometria.

Na Renascença, a matemática experimentou um renascimento, com matemáticos como Leonardo da Vinci e Niccolò Fontana Tartaglia fazendo avanços importantes na geometria, álgebra e cálculo. (BOYER e MERZBACH, 2012). No entanto, a maioria desses avanços eram desorganizados e fragmentados, e foi somente com o surgimento da teoria das equações diferenciais no século XVII que a matemática começou a se desenvolver de forma mais sistemática e organizada.

Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz foram dois dos primeiros matemáticos a estudar as equações diferenciais. Eles foram influenciados pelas ideias de cálculo infinitesimal e usaram essas ideias para desenvolver a matemática da física. Newton usou as equações diferenciais para descrever a dinâmica dos objetos em movimento, enquanto Leibniz usou-as para descrever a taxa de mudança de quantidades (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020).

No século XVIII, o matemático francês Joseph Louis Lagrange e o matemático sueco Leonhard Euler continuaram a desenvolver as equações diferenciais e aplicaram-nas a uma ampla variedade de problemas da física, incluindo a mecânica, a óptica e a hidrostática. No século XIX, o matemático francês Augustin-Louis Cauchy e o matemático alemão Carl Friedrich Gauss desenvolveram métodos para solução de equações diferenciais ordinárias, que são equações diferenciais que envolvem uma única variável independente. No final do século, o matemático francês Henri Poincaré estudou as equações diferenciais no contexto da teoria da dinâmica dos sistemas.

Temos também a família Bernoulli que é conhecida por suas contribuições significativas para o estudo das equações diferenciais. Essas contribuições incluem o desenvolvimento de teoremas e métodos que foram fundamentais para a compreensão e resolução dessas equações. O matemático suíço Jakob Bernoulli (1654-1705) foi um dos primeiros a trabalhar com equações diferenciais e desenvolveu métodos para resolvê-las. Seu irmão, Johann Bernoulli (1667-1748), também fez importantes contribuições para o campo, incluindo o desenvolvimento do teorema de variação de constante, que permite resolver equações diferenciais linear homogêneas.

Outros membros da família Bernoulli, incluindo Daniel Bernoulli (1700-1782), continuaram a trabalhar em equações diferenciais e a fazer importantes contribuições para o campo da matemática. Por exemplo, Daniel desenvolveu a equação de Bernoulli, que é uma equação diferencial importante para descrever o movimento de líquidos e gases. (MARTINS, 2014). No século XX, a teoria das equações diferenciais foi ampliada para incluir equações diferenciais parciais, que envolvem mais de uma variável independente, e equações diferenciais não lineares.

Além disso, com o avanço da tecnologia, as equações diferenciais têm sido aplicadas em diversas áreas, incluindo biologia, física, economia e engenharia. O uso de simulações computacionais para resolver equações diferenciais também tem se tornado cada vez mais importante, tornando possível resolver problemas complexos que seriam impossíveis de se resolver manualmente (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020).

A pesquisa interdisciplinar também tem sido um aspecto importante do estudo das equações diferenciais no século XXI, já que as equações diferenciais são usadas para modelar fenômenos em uma ampla gama de áreas, como a saúde, a ciência financeira e o meio ambiente. Assim sendo, o estudo das equações diferenciais no século XXI é uma área vibrante e em constante evolução, com pesquisas que abrangem uma ampla gama de tópicos e aplicações. A combinação de teoria e tecnologia permite que os matemáticos continuem a avançar em sua compreensão e resolução de problemas complexos envolvendo equações diferenciais.

1.2 Conhecimentos Iniciais

Para iniciar os estudos sobre uma equação diferencial, é importante ter um conhecimento básico dos conceitos matemáticos envolvidos, incluindo informações como quais são as variáveis dependentes e independentes, no qual uma equação diferencial pode envolver uma ou mais variáveis dependentes, que são funções da variável independente e de que forma a equação descreve como a variável dependente varia com relação à variável independente.

Além de que precisamos identificar características como a ordem de uma equação diferencial, que é o número máximo de derivadas que aparecem na equação. O tipo de equação diferencial, que podem ser classificadas como lineares ou não lineares, homogêneas ou não homogêneas, de primeira ou de segunda ordem, entre outros. A classificação da equação diferencial pode afetar a escolha da técnica para solucioná-la.

Além disso, precisamos de conhecimentos iniciais para solucionar uma equação diferencial, é necessário fornecer informações adicionais sobre a solução, geralmente na forma de valores iniciais ou condições de fronteira.

Com esses conceitos básicos, é possível identificar uma equação diferencial e compreender o problema que ela está descrevendo. A seguir, iremos conceituar as equações diferenciais e classificá-las quanto ao tipo, ordem e a linearidade e conhecimentos sobre os tipos de solução de uma EDO, problemas de valor inicial e campo de direções das equações diferenciais.

1.2.1 Conceitos Básicos

As equações diferenciais são equações matemáticas que descrevem como uma grandeza varia em relação a outra. Elas representam relações funcionais entre duas ou mais quantidades dependentes e independentes, onde uma delas é a derivada da outra (ZILL, 2016).

A exemplo, a equação diferencial mais simples é a lei de velocidade de Newton, que relaciona a velocidade de um objeto com sua aceleração:

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (1.1)$$

onde “v” é a velocidade, “a” é a aceleração e “t” é o tempo.

1.2.2 Classificação

As equações diferenciais podem ser classificadas de várias maneiras, dependendo do contexto em que são usadas. Algumas das classificações mais comuns incluem. Conforme Zill(2016):

A classificação relacionada ao tipo de equação no qual as equações diferenciais ordinárias (EDO): são equações que envolvem uma ou mais variáveis dependentes e uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (1.2)$$

onde "y" é a variável dependente e "t" é a variável independente.

E as equações diferenciais parciais (EDP) que são equações que envolvem duas ou mais variáveis dependentes e duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

onde "u" é a variável dependente e "x" e "y" são as variáveis independentes.

Classificamos também as equações diferenciais quanto a ordem que é determinado pelo grau mais elevado da derivada da variável dependente na equação. Em outras palavras, a ordem de uma equação diferencial é o número de derivadas presentes na equação.

Por exemplo, a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (1.4)$$

tem ordem 1, pois apenas a primeira derivada da variável dependente "y" está presente na equação.

Já a equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (1.5)$$

tem ordem 2, pois a equação envolve a segunda derivada da variável dependente "y".

Uma outra classificação importante é a de equação diferencial linear que é uma equação diferencial na qual o lado direito da equação é uma combinação linear das variáveis dependentes e suas derivadas. Em outras palavras, uma equação diferencial é linear se pode ser escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \quad (1.6)$$

onde " $a_i(x)$ " ($i = 0, 1, \dots, n$) são funções conhecidas de " x ", " y " é a variável dependente, e " $f(x)$ " é uma função conhecida de " x ". Caso a equação diferencial não esteja nessas condições ela é considerada então não linear.

Dessa forma, classificar uma equação diferencial é importante porque permite que você entenda as propriedades da equação e das soluções, e isso é fundamental para solucionar o problema corretamente e obter resultados precisos e confiáveis.

1.2.3 Solução

Como descreve Boyce (2020), A solução de uma equação diferencial é uma função que, quando substituída na equação, satisfaz todas as suas condições. Uma equação diferencial descreve como uma grandeza varia com relação a outra grandeza, geralmente tempo. Por exemplo, a equação diferencial de uma posição de uma partícula pode ser descrita por:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (1.7)$$

onde x é a posição da partícula e v é sua velocidade. A solução para essa equação seria uma função $x(t)$ que descreva a posição da partícula em função do tempo.

Devido as equações diferenciais possuírem diversas soluções, podemos classificá-las de diversas formas, dentre elas temos:

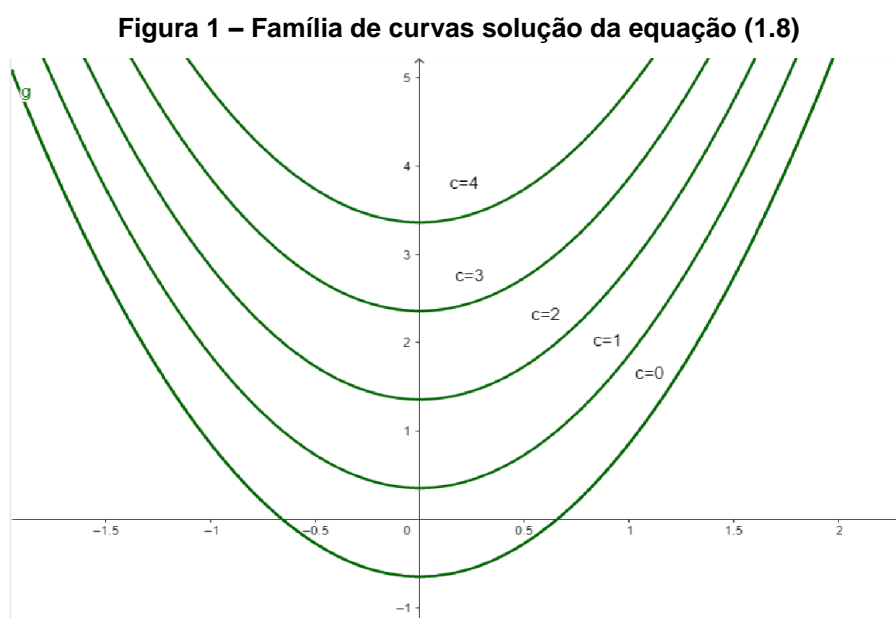
- a) Solução geral: é uma solução que inclui todas as soluções particulares como casos especiais.
- b) Solução particular: é uma solução que satisfaz apenas as condições iniciais específicas da equação.
- c) Solução singular: é uma solução para uma equação diferencial que apresenta singularidades, ou seja, pontos onde a solução não é definida ou é infinita (ABUNAHMAN, 1989).
- d) Solução de equilíbrio: é uma solução constante da equação que permanece constante ao longo do tempo, em outras palavras, é uma solução que não muda com o tempo (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020).

Além disso, uma família de curvas de uma equação diferencial é um conjunto de curvas que são soluções para a mesma equação diferencial. Cada curva na família é identificada por uma condição inicial diferente, e cada condição inicial resulta em uma solução diferente para a equação diferencial.

Por exemplo, dada equação diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 3x \quad (1.8)$$

A solução dessa equação é $y = \frac{3}{2}x^2 + c$ que nos dá um conjunto de parábolas com concavidade voltada para o eixo y positivo conforme os valores da constante c aumentam, como mostra a figura a seguir.



Fonte: Autor, 2023.

A ideia de uma família de curvas é importante porque permite visualizar como a solução da equação diferencial pode variar com diferentes condições iniciais. Além disso, ao estudar a forma geral das curvas na família, é possível identificar propriedades comuns entre as soluções e compreender melhor a natureza da equação diferencial (ZILL, 2016).

Em geral, a solução de uma equação diferencial pode ser obtida por métodos analíticos ou numéricos. Métodos analíticos tentam encontrar uma fórmula para a solução, enquanto métodos numéricos aproximam a solução por meio de cálculos computacionais. Além disso, as equações diferenciais geralmente possuem várias

soluções, e escolher a solução correta pode requerer informações adicionais sobre as condições iniciais ou de contorno.

1.2.4 Problemas de Valor Inicial

Um problema de valor inicial de uma equação diferencial é um tipo de problema matemático que envolve a obtenção da solução para uma equação diferencial dada, sujeita a uma ou mais condições iniciais. As condições iniciais especificam o valor da solução em um determinado momento inicial, e a equação diferencial descreve como a solução varia com o tempo (ZILL, 2016).

Por exemplo, considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = 2y \quad (1.9)$$

Com a condição inicial $y(0) = 1$, este é um problema de valor inicial para a equação diferencial acima. Isso significa que precisamos encontrar a solução para a equação diferencial que satisfaça a condição inicial de que o valor de y em $t = 0$ é igual a 1. Assim, objetivo é encontrar a solução que descreve a variação da quantidade de interesse ao longo do tempo, dada as condições iniciais especificadas.

1.2.5 Campo de Direções

O campo de direções de uma equação diferencial é uma representação gráfica das soluções possíveis da equação na forma.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.10)$$

Conforme Zill (2016, p. 39).

Supondo que o valor $f(x, y)$ represente qualquer ponto em uma região do plano xy sobre o qual a função f está definida. O valor $f(x, y)$ que a função atribui ao ponto representa a inclinação de uma reta ou, como iremos pensar, um segmento de reta denominado **elemento linear**.

O campo de direções é representado por uma coleção de elementos lineares que são soluções da função $f(x, y)$.

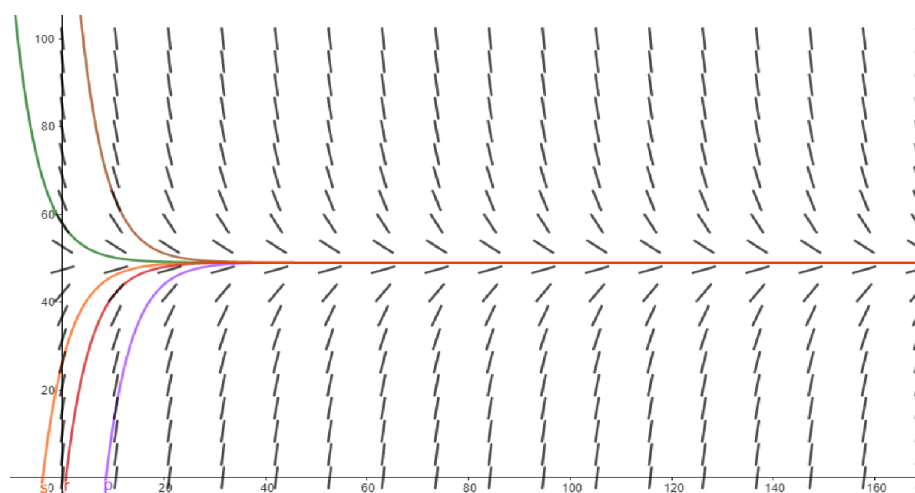
Além de que o campo de direções pode ser plotado em um plano cartesiano, com o eixo x representando a variável independente e o eixo y representando a variável dependente. Os elementos lineares são plotados em pontos específicos no

plano e mostram a direção da variação da solução em cada ponto, por exemplo dada a equação diferencial e seu campo direcional a seguir.

$$\frac{dy}{dt} = 9,8 - \frac{y}{5} \quad (1.11)$$

Em nosso exemplo utilizamos o software Geogebra para a plotagem do gráfico do campo de direções.

Figura 2 – Fluxo do campo direcional da equação (1.10)



Fonte: Autor, 2023.

Observando o gráfico com algumas curvas de solução da equação podemos ver que elas seguem o mesmo fluxo de direção dos elementos lineares do campo de direção.

Assim sendo, o campo de direções é útil para entender como a solução da equação diferencial evolui com o tempo e pode ser usado para encontrar as condições iniciais que resultam em soluções específicas. Além disso, ele pode ser usado para verificar a estabilidade e a existência de soluções periódicas para a equação diferencial.

1.3 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Esta pesquisa trata das equações diferenciais de primeira ordem que são equações matemáticas que descrevem a variação de uma quantidade dependente em função de uma quantidade independente. Essas equações são chamadas de "de primeira ordem" porque a variável dependente e sua derivada aparecem na equação, mas não aparecem derivadas mais altas.

Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

onde y é a variável dependente, t é a variável independente, e $f(t, y)$ é a função que descreve a relação entre as duas variáveis.

As equações diferenciais de primeira ordem são usadas em várias áreas da ciência e engenharia, incluindo física, biologia, economia, e muitas outras, para modelar e entender sistemas dinâmicos que mudam com o tempo (ZILL, 2016). A solução de uma equação diferencial de primeira ordem pode ser encontrada usando técnicas como o método de separação de variáveis, o método de integração direta, ou o método de resolução de sistemas de equações diferenciais. A seguir iremos descrever dois métodos que estão presentes no escopo da pesquisa.

1.3.1 Equações Diferenciais Separáveis

Uma equação diferencial separável é uma equação diferencial na qual a variável independente (normalmente o tempo) e a variável dependente (normalmente a posição, velocidade, concentração etc.) podem ser separadas. Em outras palavras, a equação pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \quad (1.12)$$

onde y é a variável dependente e x é a variável independente.

Essas equações podem ser resolvidas integrando ambos os lados da equação separadamente. A solução geral para uma equação diferencial separável é:

$$y(x) = C + \int f(y) g(x) dx \quad (1.13)$$

onde C é uma constante de integração.

1.3.2 Equações Diferenciais Lineares; Método do Fator Integrante

A ideia deste método é transformar a equação diferencial em uma equação integral. Isso é feito por se aplicar o fator integrante a ambos os lados da equação. O fator integrante é uma função matemática escolhida de tal forma que quando se aplica a uma função, a derivada da função resultante seja igual à função original. Assim, a equação resultante é uma equação integral que pode ser resolvida de forma

convencional. Uma vez resolvida, a solução pode ser obtida com a aplicação da técnica inversa.

Utilizaremos o método do fator integrante na resolução das equações relacionadas a problemas de mistura, assim sendo dada a equação na forma.

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x) \quad (1.14)$$

A fim, de determinar a solução geral da equação, multiplicamos a equação (1.14) pela função $\mu(x)$, obtendo a equação (1.15).

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)g(x)y = \mu(x)f(x) \quad (1.15)$$

Observe que o lado esquerdo de (1.15) assemelha-se a regra do produto, uma regra que permite a diferenciação de produtos de duas funções diferenciáveis, nesse caso a função $\mu(x)$ e função y , dessa forma obteremos a equação (1.16).

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)f(x) \quad (1.16)$$

A partir da equação (1.16) podemos determinar a solução geral da equação diferencial ordinária de (1.14) integrando a equação (1.16) de ambos os lados, obtendo a equação (1.17).

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)f(x)dx + c \right) \quad (1.17)$$

E desde já se aplica métodos de integração para determinar a função y derivável até a ordem n em um intervalo I , que satisfaz a equação (1.17).

Agora vamos determinar a função $\mu(x)$, chamada de fator integrante, que permite encontrar a solução geral da EDO linear em (1.14).

Por transitividade podemos igualar as equações (1.15) e (1.16), haja vista que o elemento direito de todas as equações permite que façamos isso, dessa forma obtemos a seguinte equação em (1.19) encontrando a função $\mu(x)$ em (1.22).

$$\begin{cases} \mu \cdot \frac{dy}{dx} + \mu(x)g(x) \cdot y = \mu(x) \cdot f(x) \\ \frac{d}{dx} [\mu(x) \cdot y] = \mu(x) \cdot f(x) \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dx} [\mu(x) \cdot y] = \mu \cdot \frac{dy}{dx} + \mu(x)g(x) \cdot y \quad (1.19)$$

$$\mu \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx} y = \mu \cdot \frac{dy}{dx} + \mu(x)g(x) \cdot y \quad (1.20)$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)g(x) \quad (1.21)$$

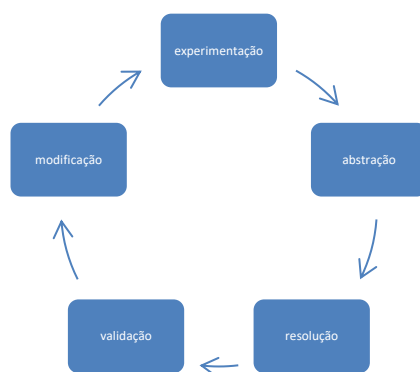
$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} \quad (1.22)$$

1.4 Modelagem com Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Um modelo matemático é uma representação simplificada de um sistema, fenômeno ou processo da vida real, usando linguagem matemática para descrever as relações entre as variáveis relevantes e prever o comportamento do sistema. Ele é usado para testar hipóteses, fazer previsões e entender melhor o sistema que está sendo estudado (BASSANEZI, 2004).

Ainda de acordo com Bassanezi (2002) as fases de um modelo matemático são caracterizadas por fase da experimentação, no qual é feita a coleta dos dados do fenômeno a ser modelado, a abstração que consiste em determinar a equação do problema, a fase da resolução que passa do aspecto qualitativo da fase de abstração para a obtenção de dados quantitativos do problema, validação que é a determinação da proximidade da solução real com a solução aproximada obtida na resolução do modelo e a fase de modificação que depende dos resultados obtidos com o modelo matemático para ser aceitação do modelo ou a reformulação de um novo modelo matemático para o problema, o esquema simplificado dessas fases pode ser verificado na figura a seguir:

Figura 3 – Fases da modelagem matemática



De acordo com Boyce (2020) o processo de construção de modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais de primeira ordem geralmente envolve as seguintes etapas.

1. Formular o problema: identifique o fenômeno ou sistema que está sendo estudado e defina o problema em termos matemáticos. Identifique as variáveis relevantes, as condições iniciais e as suposições sobre o comportamento do sistema.
2. Escrever a equação diferencial: com base nas informações coletadas na etapa anterior, escreva uma equação diferencial que descreva o comportamento do sistema. Normalmente, a equação diferencial incluirá uma ou mais derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma variável independente.
3. Resolver a equação diferencial: dependendo da complexidade da equação diferencial, pode ser necessário simplificá-la ou transformá-la em uma forma mais solucionável. A solução da equação diferencial pode ser encontrada por meio de técnicas analíticas, como separação de variáveis, fator integrante, transformadas de Laplace ou métodos numéricos, como o método de Euler.
4. Interpretar os resultados: uma vez que a solução é encontrada, ela pode ser usada para prever o comportamento do sistema ao longo do tempo. Os resultados devem ser interpretados em termos do problema original, verificando se eles fazem sentido físico ou se precisam ser ajustados.
5. Validar o modelo: por fim, o modelo deve ser validado por meio de comparação dos resultados previstos com os dados experimentais ou observacionais. Se houver discrepâncias significativas, o modelo pode precisar ser revisado ou ajustado para melhor corresponder aos dados reais.

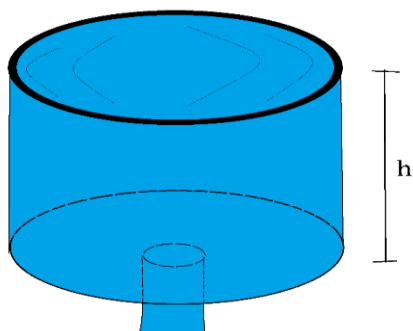
Ao longo de todo o processo, é importante considerar a simplicidade do modelo, para que ele seja fácil de entender e modificar, e sua precisão, para que seja capaz de fornecer previsões úteis e confiáveis.

1.4.1 Modelo Matemático de Drenagem em um Tanque

O modelo matemático de escoamento de líquido por um orifício em um tanque pode ser descrito por meio de equações diferenciais. Essas equações descrevem como a quantidade de líquido que flui através do orifício muda com o tempo. A

equação elementar para o escoamento de líquido através de um orifício em um tanque é dada pela **Lei de Torricelli**¹:

Figura 4 – Tanque de drenagem



Fonte: Autor, 2023.

$$v = \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)} \quad (1.23)$$

onde v é a velocidade do escoamento, g é a aceleração da gravidade, e h é a diferença de altura entre a superfície do líquido no tanque e o orifício de saída.

A taxa de escoamento de líquido, Q , através do orifício é dada por:

$$Q = A \cdot v \quad (1.24)$$

onde A é a área da seção transversal do orifício. Combinando as equações acima, temos:

$$Q = c \cdot A \sqrt{(2 \cdot g \cdot h)} \quad (1.25)$$

onde c é uma constante de proporcionalidade que depende das dimensões do orifício e outros fatores relevantes.

Por fim, a equação para descrever a variação da altura do líquido no tanque é dada por:

$$\frac{dh}{dt} = -c \cdot \frac{A}{B} \cdot Q \quad (1.26)$$

onde B é a área da superfície do líquido no tanque. Esta equação descreve como a altura do líquido muda com o tempo à medida que o líquido flui através do orifício.

¹ EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647), foi um físico e matemático italiano, mais conhecido pela invenção do barômetro, por descobertas na área da óptica e pela equação de Torricelli

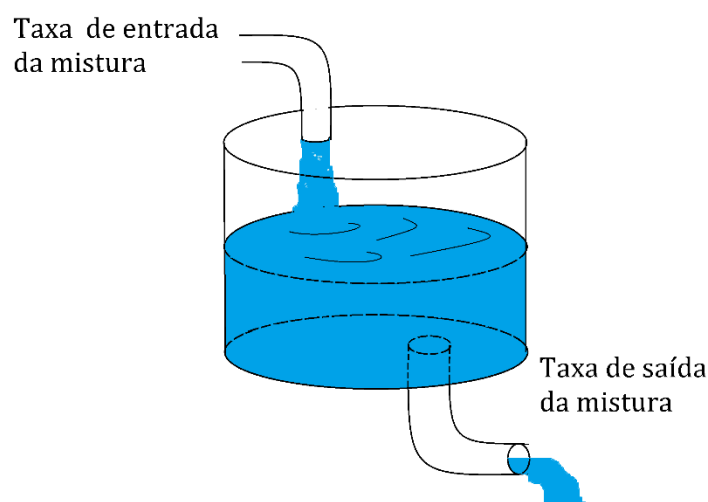
Esta equação é uma equação diferencial de primeiro grau e pode ser resolvida analiticamente ou numericamente para obter a solução para a altura do líquido no tanque como uma função do tempo (ZILL, 2016).

Nesse sentido, o modelo matemático de escoamento de líquido por um orifício em um tanque é uma ferramenta importante para entender como a quantidade de líquido que flui através do orifício muda com o tempo e como a altura do líquido no tanque varia com o tempo.

1.4.2 Modelo Matemático de Mistura

O modelo matemático para a variação da quantidade de uma mistura dentro do tanque depende das condições de entrada e saída da mistura, bem como do fluxo da mistura dentro do tanque. Neste trabalho apresentaremos a equação geral para a variação da quantidade de uma mistura dentro do tanque, levando em consideração a entrada e saída da mistura.

Figura 5 – Tanque de mistura



Fonte: Autor, 2023.

Considere o tanque da Figura 5 contendo uma mistura, com uma densidade de massa denotada por ρ . A quantidade de mistura no tanque, denotada por Q , é uma função do tempo t . A taxa de variação da quantidade de mistura no tanque é dada pela equação da conservação de massa:

$$\frac{dQ}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (1.27)$$

onde Q_{in} é a taxa de entrada de mistura no tanque e Q_{out} é a taxa de saída de mistura do tanque.

Se a mistura é completamente revolvida no tanque, podemos escrever Q_{in} e Q_{out} em termos da vazão de entrada e saída da mistura e da densidade de massa da mistura:

$$Q_{in} = \rho \cdot V_{in} \quad (1.28)$$

$$Q_{out} = \rho \cdot V_{out} \quad (1.29)$$

onde V_{in} é a vazão de entrada e V_{out} é a vazão de saída.

Substituindo a equação (1.24) e (1.25) em (1.23), podemos obter a equação geral para a variação da quantidade de mistura no tanque, dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \rho \cdot V_{in} - \rho \cdot V_{out} \quad (1.30)$$

Essa equação descreve como a quantidade de mistura no tanque varia ao longo do tempo, levando em consideração a entrada e saída da mistura.

Para resolver essa equação e determinar a quantidade de mistura no tanque em um dado momento, é necessário conhecer as condições iniciais da quantidade de mistura e da densidade de massa, bem como as propriedades da mistura, incluindo a densidade e a viscosidade.

Além disso, é preciso conhecer as condições de entrada e saída da mistura no tanque, que afetam as taxas de entrada e saída de mistura.

CAPÍTULO 2 METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 Abordagem, estratégias de investigação e os procedimentos técnicos.

A abordagem metodológica da pesquisa é quantitativa pois estará voltada a desenvolvimento de teoremas e modelos. Fonseca (2002, p. 20) apud (Gerhardt 2009, p.35) nos fala que uma pesquisa quantitativa está centrada em objetividade e na relação das variáveis de um fenômeno através da linguagem matemática.

A pesquisa quantitativa se centra na objetividade, influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis etc.

A estratégia utilizada na pesquisa será a descritiva, tendo como finalidade a descrição dos resultados obtidos de problemas de cunho físico-químico através de um estudo das equações diferenciais resultantes dos modelos matemáticos adotados para cada problema.

GIL (2008, p.28) nos relata que.

As pesquisas deste tipo têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis. São inúmeros os estudos que podem ser classificados sob este título e uma de suas características mais significativas está na utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados.

A pesquisa será bibliográfica será baseada em estudos de autores, como Zill (2016), Boyce (2020), Bassanezi (2002) e Abunahman (1989) em equações diferenciais e modelos matemáticos, Zill (2016), no problema de drenagem em um tanque, e entre outros pensadores que elaboraram trabalhos pertinentes ao assunto.

Em relação aos procedimentos técnicos adotados usaremos a pesquisa experimental, que consiste em uma abordagem científica que se concentra na manipulação intencional de variáveis para testar hipóteses ou teorias. Em pesquisa experimental, os investigadores controlam cuidadosamente as condições experimentais e observam os resultados para determinar se as mudanças nas variáveis independentes (aquelas que são manipuladas) têm um efeito significativo nas variáveis dependentes (aquelas que são medidas).

“A pesquisa experimental consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto (GIL, 2017).”

A pesquisa experimental é frequentemente utilizada em campos como psicologia, medicina, biologia e física, onde os investigadores precisam testar teorias ou hipóteses sobre o comportamento ou as propriedades de sistemas naturais. É importante ressaltar que a pesquisa experimental é apenas uma das várias abordagens científicas disponíveis e nem sempre é apropriada para todas as perguntas de pesquisa.

Em resumo, a pesquisa experimental é uma abordagem importante para testar teorias e hipóteses na ciência, permitindo aos investigadores determinar se há uma relação causal entre as variáveis.

2.2 Métodos utilizados para obtenção das equações

O processo de obtenção de equações diferenciais a partir de leis físicas e modelagem matemática envolve várias etapas. Primeiramente, é necessário compreender o fenômeno físico que se deseja descrever e identificar as variáveis relevantes que influenciam esse fenômeno. Em seguida, é feita a modelagem matemática, que consiste em estabelecer uma relação matemática entre as variáveis identificadas. Essa relação pode ser uma equação algébrica, uma equação diferencial ou um conjunto de equações (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020).

No caso das equações diferenciais, é necessário levar em consideração as taxas de variação das variáveis em relação ao tempo ou a outras variáveis. As equações diferenciais podem ser de diferentes ordens, dependendo do número de derivadas presentes na equação. Uma vez obtida a equação diferencial que modela o fenômeno físico, é possível analisá-la e encontrar soluções que descrevem o comportamento do sistema ao longo do tempo. Essas soluções podem ser obtidas analiticamente ou numericamente, dependendo da complexidade da equação diferencial e das técnicas disponíveis para sua resolução.

2.3 Instrumentação e Medidas

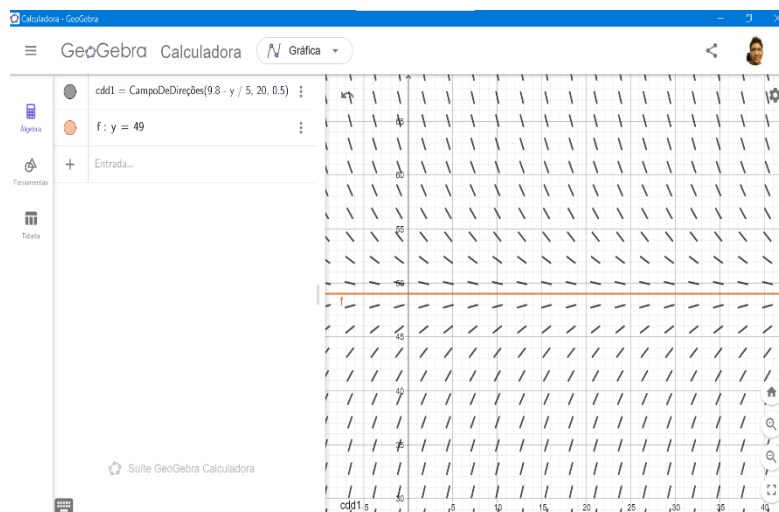
O Geogebra é uma ferramenta computacional que permite a criação de modelos matemáticos interativos e a exploração visual desses modelos.

Com o Geogebra, é possível criar gráficos que representam a evolução da concentração de cada fluido no tanque ao longo do tempo, permitindo a análise do comportamento do sistema de forma visual e intuitiva. Além disso, é possível criar animações e simulações que permitem a análise de diferentes cenários, como variações nas taxas de fluxo dos fluidos, mudanças nas condições iniciais e outras variáveis.

A análise de resultados utilizando o Geogebra permite a identificação de padrões e comportamentos interessantes do sistema, o que pode ajudar a entender melhor o processo de mistura e drenagem em um tanque. Além disso, é possível realizar análises de sensibilidade para identificar os fatores que mais influenciam o comportamento do sistema, permitindo a otimização do processo de mistura e drenagem para atingir os melhores resultados.

Uma das aplicações do software Geogebra é no estudo das propriedades das soluções de uma EDO, no qual podemos projetar um campo de direções, e analisar o comportamento dessas equações próximo de um ponto do gráfico, por exemplo.

Figura 6 – Campo de direções de uma EDO



Fonte: Autor, 2023.

Dessa forma, a utilização do Geogebra na análise de modelos matemáticos de mistura e drenagem em um tanque com equações diferenciais é fundamental para uma análise mais completa e detalhada dos resultados. Com essa ferramenta, é possível obter uma melhor compreensão do comportamento do sistema, otimizar o processo e tomar decisões mais assertivas para maximizar a eficiência do processo.

CAPÍTULO 3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em ciências, engenharias e nas mais diversas áreas, frequentemente se faz necessária a modelagem de um sistema, a fim de estudar o comportamento de um sistema em termos matemáticos. Para tal, se torna necessário identificar as variáveis responsáveis pelo sistema, assim como o conjunto de hipóteses que descrevem o sistema.

Na seção 1.4.2 foi descrito o modelo matemático de escoamento de um líquido por um orifício, onde foi descrita a Lei de Torricelli e a partir da sua equação foi deduzida e descrita a equação diferencial (EDO) de drenagem em um tanque e na seção 1.4.1 o modelo matemático de mistura. Logo abaixo, daremos cinco aplicações e o estudo dos seus comportamentos com auxílio do Software Geogebra.

3.1 Drenagem em um tanque (Lei de Torricelli)

Problema 1

Calcule a altura da água no tanque num instante qualquer, sabendo que o tanque tem um diâmetro de 2 m, o orifício tem um diâmetro de 1 cm e a altura inicial da água, quando o orifício é aberto, é de 2,25 m. Em que momento o tanque ficará vazio?

Informação física. Considerando a ação da força gravitacional, a velocidade da água que flui do reservatório é:

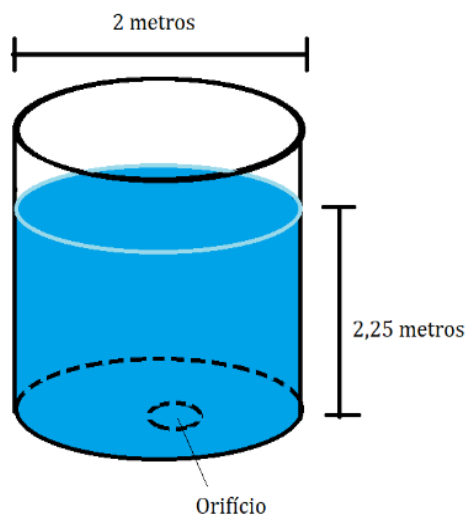
(Lei de Torricelli)
$$v = 0,600\sqrt{2gh(t)}$$
 (3.1)

Onde:

$h(t)$ é a altura da água acima do orifício no instante t ,

$g = 9,8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade na superfície terrestre.

Figura 7 – Escoamento de um fluido de um tanque cilíndrico. Lei de Torricelli



Fonte: Autor, 2023.

Solução:

Começaremos introduzindo letras para representar as diversas quantidades de interesse neste problema. O movimento ocorre durante determinado intervalo de tempo. Utilizaremos t para denotar tempo, h para representar a altura da água dentro do tanque em um instante qualquer. A altura deve variar com o tempo, de modo que vamos considerar h como uma função de t ; em outras palavras, t é a variável independente e h é a variável dependente. Usaremos as unidades de acordo ao enunciado do problema, mais precisamente t em segundos e h em metros. Além disso, o problema nos dá uma informação física valiosa para a construção do modelo matemático, que é a lei física para a velocidade de escoamento da água do tanque através do orifício, demonstrada no capítulo **1.4.1**, que permite calcular a velocidade final de um corpo que esteja em movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) mesmo sem saber o intervalo de tempo que o objeto percorreu. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação **(3.2)**:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\Delta s \quad (3.2)$$

v é a velocidade final do objeto,

v_0 é a velocidade inicial,

α é a aceleração,

Δs é o espaço percorrido pelo objeto.

Neste problema a velocidade inicial é zero, pois a água está parada no instante inicial, a aceleração é g e o espaço percorrido é h , além disso, devemos considerar também que a velocidade real de escoamento sempre será menor que a velocidade ideal do objeto, devido entre outros fatores a fenômenos físicos como o coeficiente de contração que está relacionado a mudança da trajetória de algumas partículas do líquido, devido essas partículas colidirem com a base do tanque e se direcionarem ao orifício. Para orifícios circulares de parede fina, como no caso presente, a literatura especializada demanda um valor médio da ordem de 0,62 calculado a partir da razão entre a área da secção contraída e a área do orifício. Neste problema usaremos o valor 0,6 para o coeficiente de contração (ALMEIDA, SALES, *et al.*, 2017).

Utilizaremos nesse problema o princípio da vazão, que é conceituado como a quantidade de fluido que escoar através de um conduto em um determinado período, calculada através da equação **(3.3)**:

$$Q = \frac{\Delta V_{saiada}}{\Delta t} = v \cdot A \quad (3.3)$$

onde:

Q é a vazão,

ΔV_{saiada} é a quantidade de fluido deslocado no intervalo de tempo,

Δt o intervalo de tempo considerado,

v é a velocidade média global do fluido no conduto,

A é a área da secção transversal no conduto.

Serão usadas as unidades do sistema internacional de medidas (unidades SI). Além disso, a variação Δh da altura da água no tanque é proporcional a variação ΔV_{dentro} do volume de água dentro do tanque, conforme a equação **(3.4)**:

$$\Delta V_{dentro} = -B\Delta h \quad (3.4)$$

O sinal negativo na equação acima, ocorre pois o volume da água diminui e B é a área da base do tanque em m^2 .

Diante dessas três equações que governam o problema, o próximo passo é relacioná-las as variáveis escolhidas no início da etapa de solução do problema, as variáveis t e h . Primeiramente iremos igualar por transitividade as duas equações da vazão, de tal forma que possamos isolar a variável ΔV_{saiada} que é a variação do volume de água que sai do tanque, obtendo a equação **(3.5)**:

$$\Delta V_{saida} = v \cdot A \cdot \Delta t \quad (3.5)$$

A variação do volume de saída da água deve ser igual a variação do volume de água que diminui dentro do tanque, sendo assim, podemos igualar as equações (3.4) da variação do volume de água dentro do tanque e a equação (3.5) da variação do volume de água que sai do tanque, e escrevê-las em função da razão entre as variações da altura h e o tempo t :

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -v \cdot \frac{A}{B} \quad (3.6)$$

Agora, finalmente podemos usar a informação física dada no problema e relacioná-la a equação (3.6):

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -0,600 \cdot \sqrt{2gh(t)} \cdot \frac{A}{B} \quad (3.7)$$

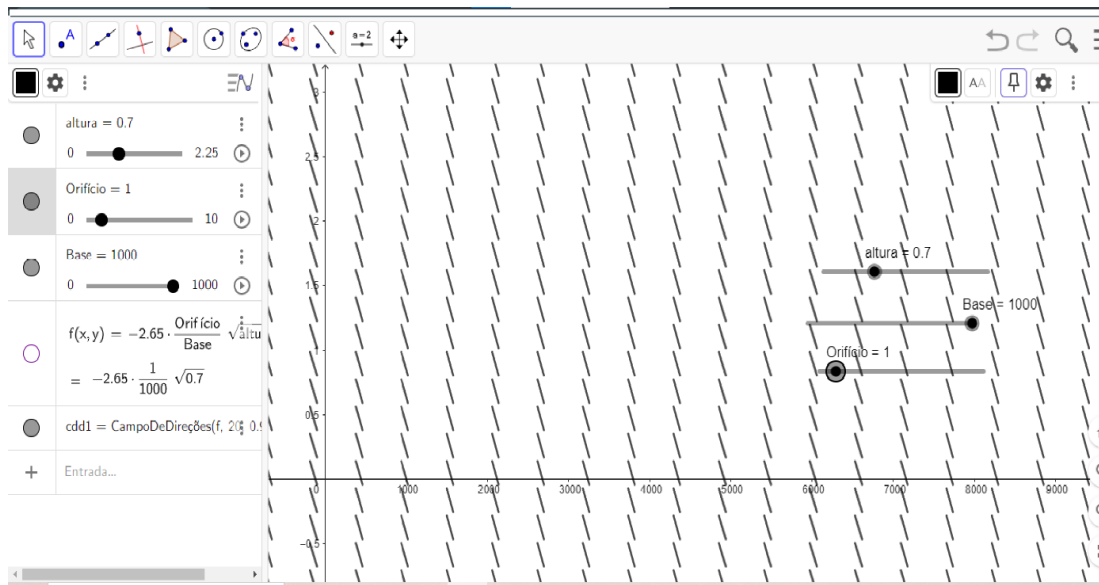
Entretanto, para que possamos exibir a equação diferencial devemos fazer $\Delta t \rightarrow 0$, ou seja a um intervalo infinitesimal de variação instantânea, e substituir o valor atribuído a aceleração da gravidade g no início do problema:

$$\frac{dh}{dt} = -2,65 \cdot \frac{A}{B} \cdot \sqrt{h(t)} \quad (3.8)$$

A equação diferencial (3.8) é o modelo matemático para a altura h da água dentro do tanque, os parâmetros A e B são as áreas respectivamente do orifício e da base do tanque cilíndrico.

Investigando o comportamento da equação diferencial encontrada antes de resolvê-la utilizando o campo de direções do Software Geogebra, inicialmente criaremos controles deslizantes para a altura da água dentro do tanque, área do orifício de saída da água e para a área da base do tanque, além disso, vamos estabelecer limites de variação para cada controle. Usaremos valores que se aproximam de dados do problema, para a altura da água será de 0 a 2,25, e para a área do orifício de 0 a 10 e para a área da base do tanque de 0 a 1000, conforme a figura a seguir:

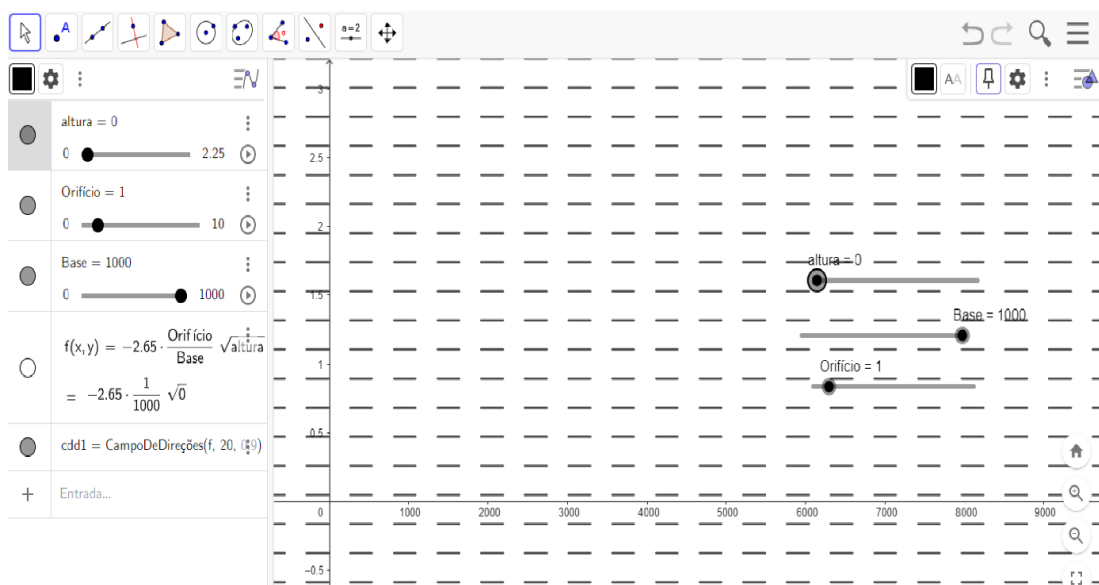
Figura 8 – Campo de direções do problema 1



Fonte: Autor, 2023.

Em seguida variando a altura da água de forma decrescente para 0, podemos verificar que o fluxo de elementos lineares é paralelo ao eixo das abcissas, o que indica que a solução de equilíbrio da equação é em $h(t) = 0$, conforme a figura a seguir:

Figura 9 – Campo de direções para $h(t)=0$



Fonte: Autor, 2023.

Utilizando o Método de Separação de Variáveis em (3.8) obtemos:

$$\frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = -2,65 \cdot \frac{A}{B} \cdot dt \quad (3.9)$$

Integrando a equação acima, de ambos os lados:

$$2\sqrt{h} = c_1 - 2,65 \cdot \frac{A}{B} t \quad (3.10)$$

Dividindo por 2 e elevando ao quadrado, chegamos a $h = \left(c - 1,32 \cdot \frac{A}{B} \cdot t\right)^2$.

Inserindo os valores de A e B em $1,32 \cdot \frac{A}{B}$, obtemos: $1,32 \cdot \frac{A}{B} = 1,32 \cdot \frac{0,005^2 \pi}{1^2 \pi} = 0,000033$, e a solução geral, será dada por:

$$h(t) = (c - 0,000033t)^2 \quad (3.11)$$

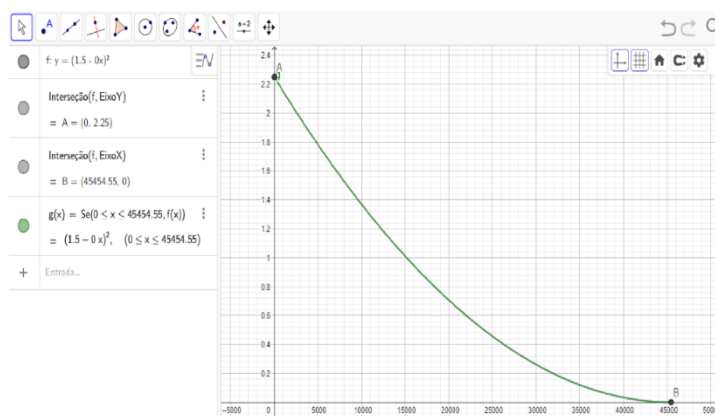
Iremos agora, determinar a solução particular dado que as condições iniciais do problema são $h(0) = 2,25 \text{ m}$. A substituição de $t = 0$ e $h = 2,25$ nos dá, a partir da solução geral, $c^2 = 2,25$ de onde $c = 1,5$ de onde, a solução particular é dada por:

$$h_p(t) = (1,5 - 0,000033t)^2 \quad (3.12)$$

Dessa forma, podemos determinar o tempo para que o tanque fique vazio fazendo $h_p(t) = 0$, então $t = 1,5/0,000033 \cong 45454 \text{ s} \cong 12,6 \text{ horas}$

A fim de visualizar a projeção do gráfico da solução, foi utilizado o Software Geogebra. Começamos a priori inserindo a solução particular do problema de modo que o gráfico é plotado. É possível confirmar o resultado encontrado nos cálculos algébricos, observando os pontos de intersecção dos eixos com a curva, como pode ser visto na imagem abaixo.

Figura 10 – Curva de solução do problema 1



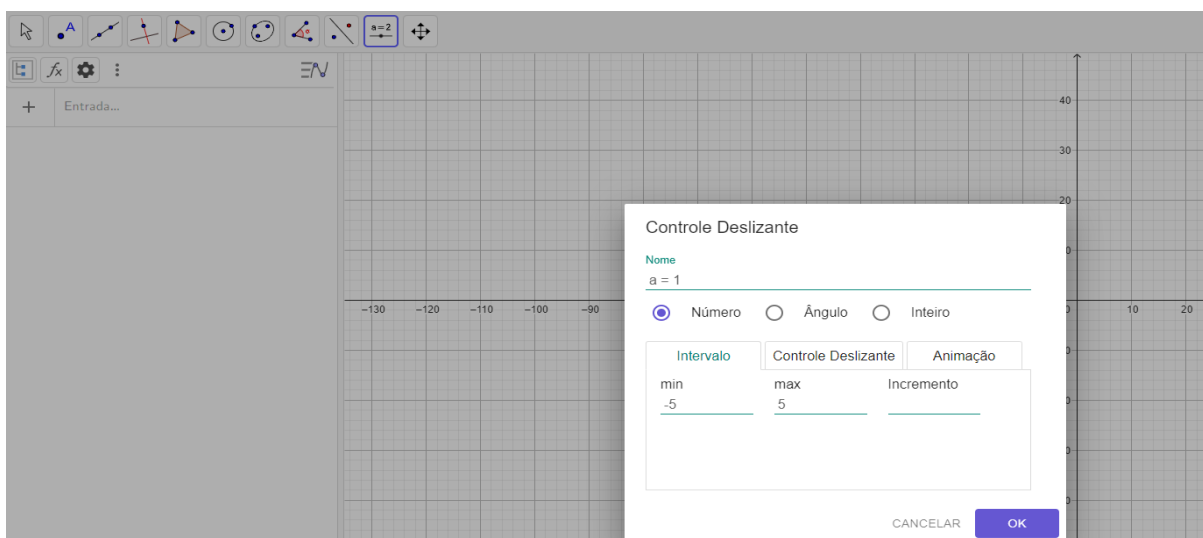
O eixo das ordenadas representa a altura da água e o eixo das abcissas representa o tempo em segundos. Dessa forma, o ponto A representa a altura da água em metros no instante $t = 0$ e altura 2,25 metros e o ponto B de coordenadas (45180.72, 0) que representa a altura igual a 0 metros e o tempo em segundos decorrido para esvaziar o tanque.

Analisando em uma outra perspectiva, por se tratar de uma função de segundo grau, espera-se obter uma parábola de concavidade para cima, pois o coeficiente que acompanha t^2 é positivo. Assim, o gráfico abaixo apresenta o comportamento da função em questão, que foi limitada ao ponto em que $t = 0$, pois não faria sentido considerar valores negativos para t , até o ponto em que $h = 0$, ou seja, o momento em que o tanque estará vazio.

Podemos ainda fazer um estudo mais detalhado da quantidade de água em função do tempo, utilizando uma ferramenta chamada controle deslizante, neste caso, com relação ao tempo, o que nos permiti verificar o tanque se esvaziando com o passar dos minutos. Encontramos pela solução analítica, que o tanque se encontrará vazio, após aproximadamente 12,6 horas, o que equivale a aproximadamente 756 minutos.

A fim de obter esses resultados geometricamente, inserimos primeiramente a função solução no Software Geogebra e em seguida criamos dois controles deslizantes que chamaremos de x_1 e x_2 , ambos relacionados ao tempo. O segundo controle deslizante x_2 se faz necessário para que o gráfico seja plotado ponto a ponto e assim possamos averiguar com precisão a altura da água no tanque, com o passar do tempo. Utilizamos em ambos a mesma variação, neste caso de 0 a 756 minutos, ambos com incremento 10. Para habilitar esta ferramenta no Software Geogebra, basta clicarmos no segundo ícone da direita para a esquerda, na linha superior, e apertando o botão direito do mouse em qualquer lugar na janela de visualização aparecerá essa caixa branca como mostrada na figura abaixo.

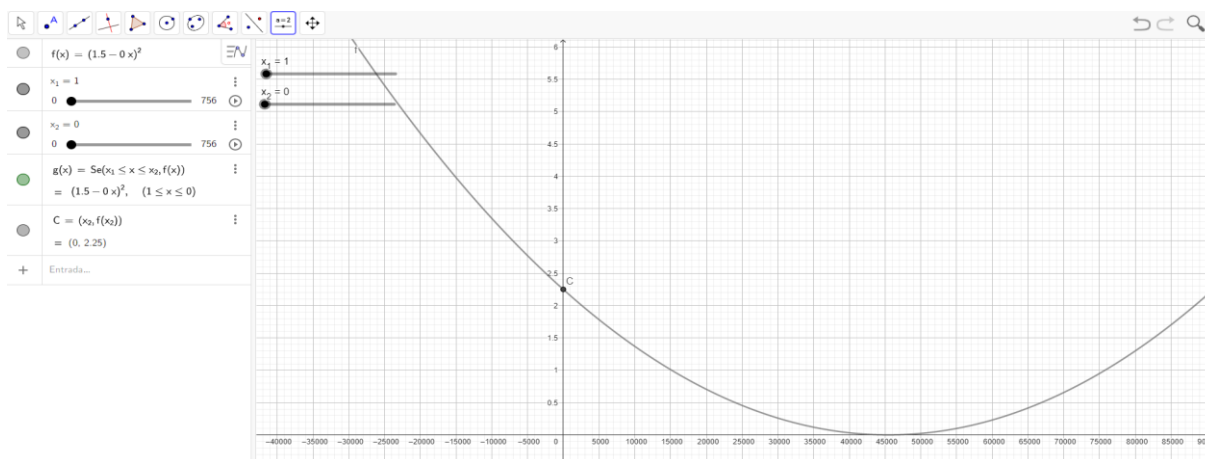
Figura 11 – Controle deslizante



Fonte: Autor, 2023.

Nesta caixa, é onde nomeamos os referidos controles deslizantes citados acima e inserimos as variações de tempo e incrementos que são apropriadas para cada situação problema.

O gráfico abaixo ilustra a solução.

Figura 12 – Controles deslizantes x_1 e x_2 

Fonte: Autor, 2023.

Foi inserida a fim de obter uma melhor visualização, um rótulo no ponto C criado. Para habitar este rótulo podemos seguir os seguintes passos:

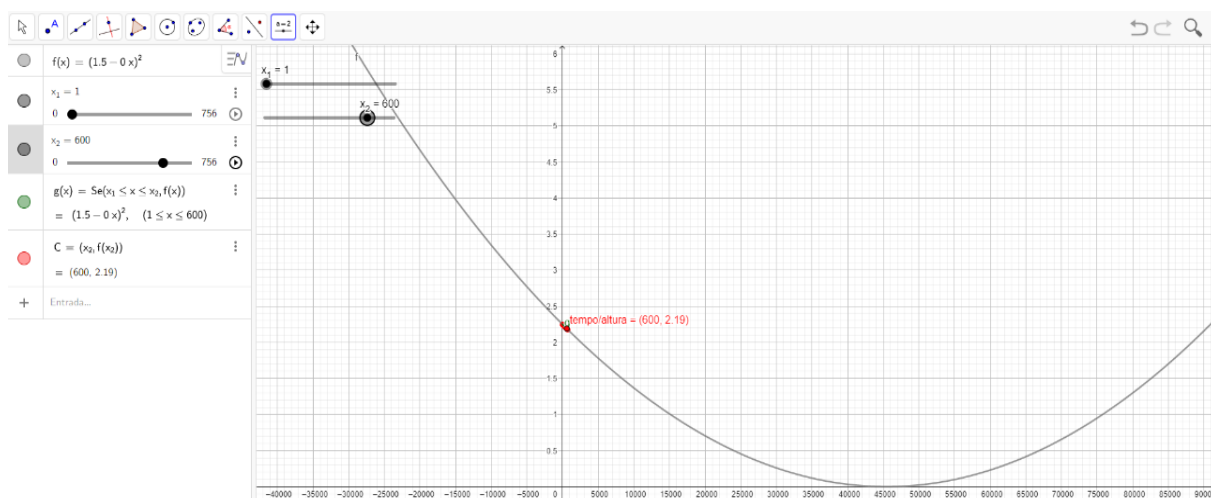
1. Clicar no ponto C com o botão direito do mouse; em configurações é permitido escolher uma cor para ele.

2. Em Básico, selecione exibir rastro (que permite uma avaliação ponto a ponto de acordo com o incremento utilizado).
3. Em Legenda escreva: tempo/altura

Após essa sequência de dados, basta clicar no cursor em x_2 , obtendo a construção abaixo.

Observe por exemplo que em $t = 600$ minutos $\cong 6$ horas, a altura de água no tanque é de aproximadamente 2,19.

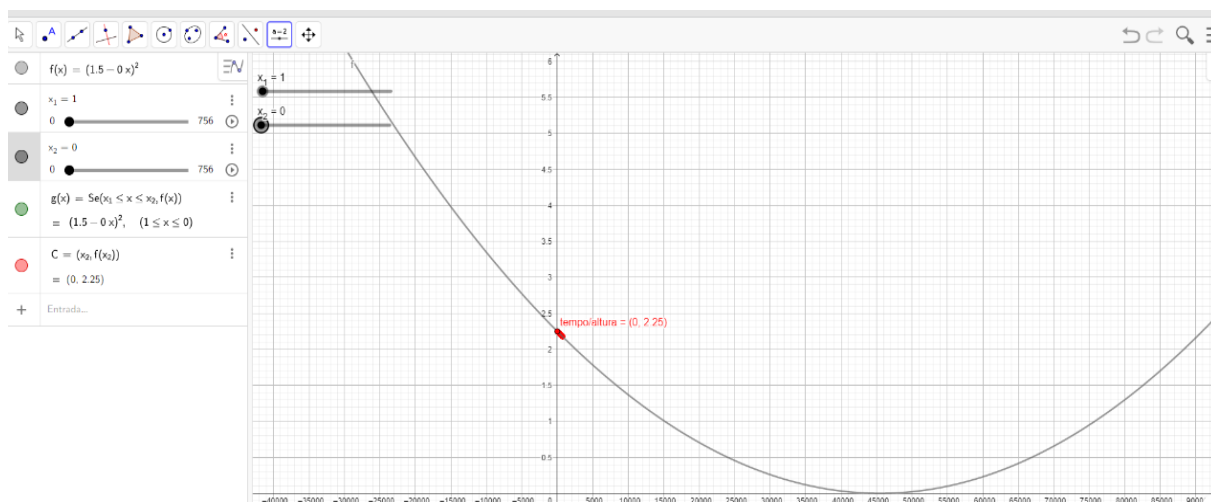
Figura 13 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

Vale ressaltar pequenas imprecisões, devido ao arredondamento das casas, observe ainda que o dado inicial do problema pode ser verificado no gráfico:

Figura 14 – Condições iniciais do problema 1

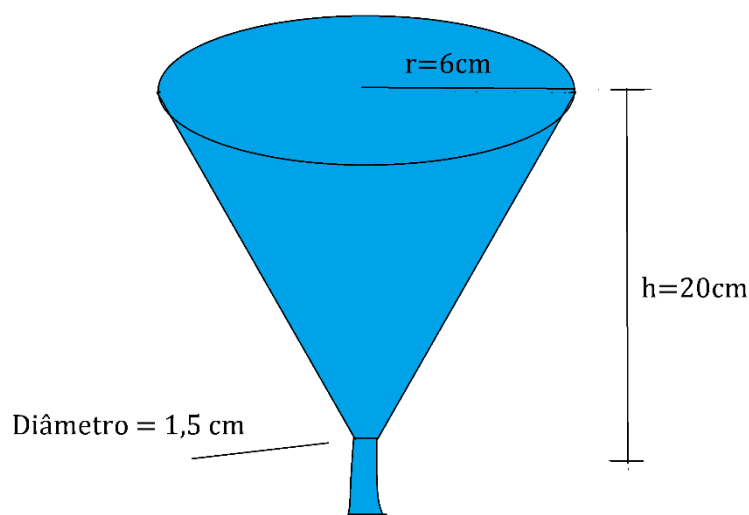


Fonte: Autor, 2023.

Problema 2

Considere um funil de 6 cm de raio e 20 cm de altura. O funil está completamente cheio com um líquido que escoa continuamente através de um orifício de 1,5 cm de diâmetro. Supondo que a geratriz do cone forme um ângulo de 30° com a altura, determine o tempo necessário para que o líquido contido no funil atinja um quarto do volume inicial.

Figura 15 – Funil do problema 2



Fonte: Autor, 2023.

Solução:

Definiremos primeiramente o volume inicial do líquido contido no funil:

$$V_i = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 20 \quad (3.13)$$

$$V_i \cong 754 \text{ cm}^3 \quad (3.14)$$

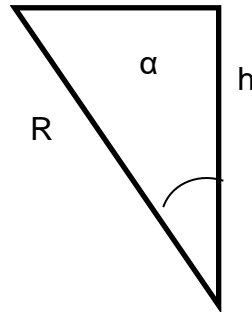
Buscamos determinar o tempo necessário que o líquido atinja $\frac{1}{4}$ do volume inicial, isto é:

$$V_f = \frac{1}{4} V_i \quad (3.15)$$

$$V_f = 188,5 \text{ cm}^3$$

Seja $\tan \alpha = \frac{R}{h}$ (ver figura abaixo), temos $R = h \tan \alpha$.

Figura 16 – Base do cone



Fonte: Autor, 2023.

Assim,

$$V_f = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \pi \cdot (h \tan \alpha)^2 \cdot h \right] \quad (3.16)$$

$$V_f = \frac{1}{12} \pi h^3 \tan^2 \alpha \quad (3.17)$$

$$188,5 = \frac{1}{12} \pi h^3 \tan^2 30^\circ$$

$$188,5 = 0,0873 h^3$$

$$h^3 = 15,456$$

$$h \cong 2,5 \text{ cm} \quad (3.18)$$

Assim, devemos encontrar o tempo necessário para que o líquido atinja uma altura de 2,5 cm.

Sabendo que a seção transversal do cone é dada por:

$$A = \pi R^2$$

$$A = \pi (h \tan \alpha)^2 \quad (3.19)$$

Podemos utilizar a fórmula

$$A \frac{dh}{dt} = -B\sqrt{2gh} \quad (3.20)$$

onde B representa a área transversal do orifício de saída, logo $B = \pi r^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \pi(h \tan \alpha)^2 \frac{dh}{dt} &= -\pi r^2 \sqrt{2gh} \\ -(h \tan \alpha)^2 \frac{dh}{dt} &= r^2 \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substituindo os valores:

$$\begin{aligned} -(h \cdot \tan 30^\circ)^2 \frac{dh}{dt} &= \left(\frac{1,5}{2}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot h} \\ -0,33 h^2 \frac{dh}{dt} &= 2,49 \sqrt{h} \\ \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh &= -7,55 dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

Integrando ambos os lados:

$$\begin{aligned} \int \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh &= \int -7,55 dt \\ \int h^{\frac{3}{2}} dh &= \int -7,55 dt \\ h^{\frac{5}{2}} &= -\frac{5}{2} \cdot 7,55 t + C \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para $t = 0$ temos $h = 20 \text{ cm}$. Assim,

$$\begin{aligned} 20^{\frac{5}{2}} &= -18,875 \cdot 0 + C \\ C &= 1788,85 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dessa forma, para a solução em particular temos:

$$h^{\frac{5}{2}} = -18,875 t + 1788,85 \quad (3.25)$$

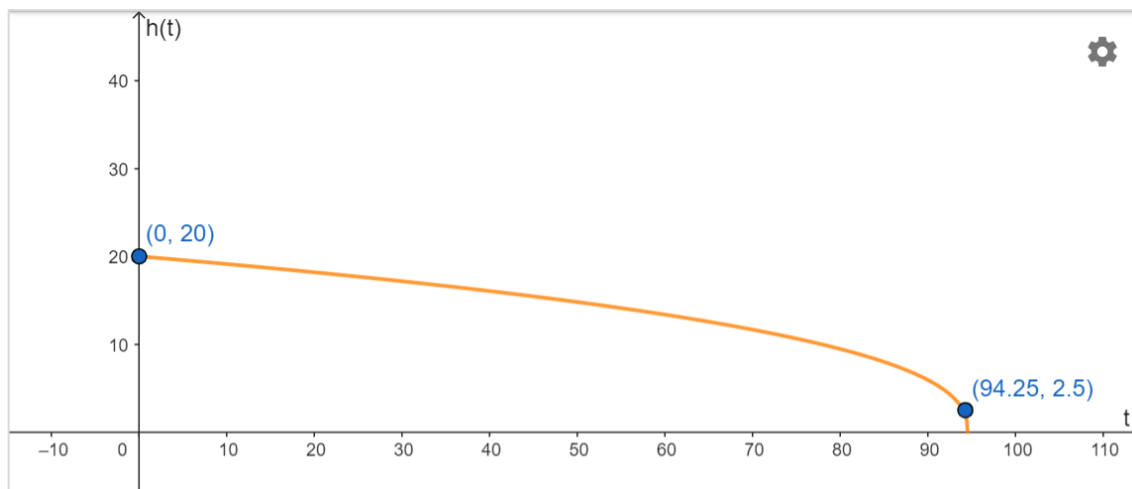
Para $h = 2,5 \text{ cm}$, temos:

$$2,5^{\frac{5}{2}} = -18,875 t + 1788,85$$

$$t = 94,25 \text{ s}$$

O comportamento da função pode ser observado no gráfico abaixo:

Figura 17 – Gráfico da solução da equação do problema 2



Fonte: Autor, 2023.

Nesse caso, entende-se que conforme t progride, maior será a vazão, ou seja, maior será a velocidade de escoamento. Essa observação pode ser atestada pela inclinação da reta tangente à função, dada por:

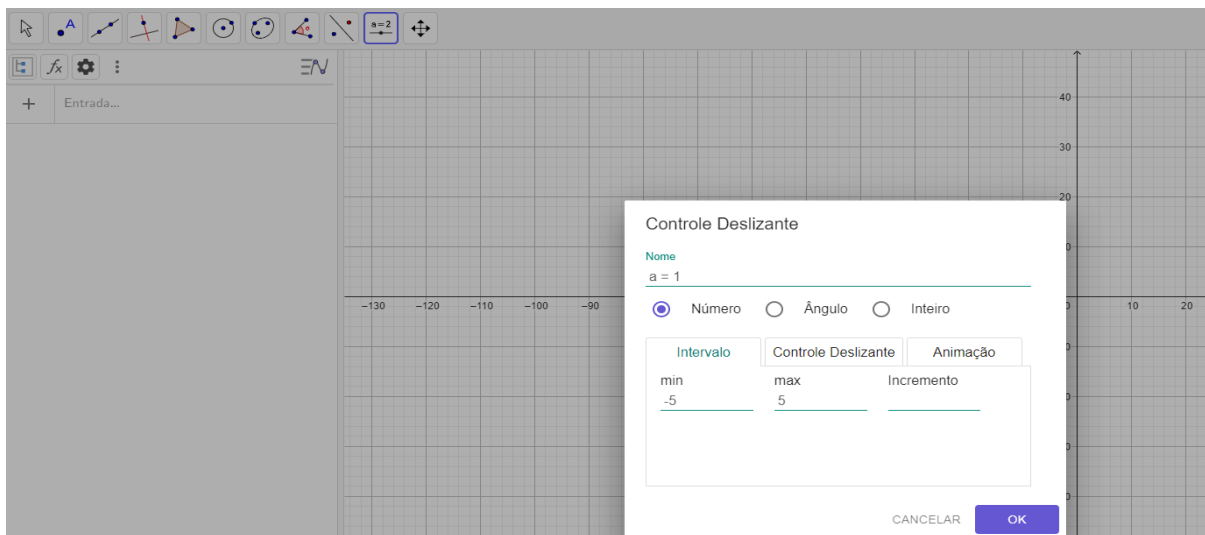
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{7,55}{(-18,875t + 1788,85)^{\frac{3}{5}}} \quad (3.26)$$

Os valores obtidos para a inclinação da reta tangente são negativos conforme t aumenta, o que evidencia o declive da função. Além disso, condizente à aproximação de $t = 94,77 \text{ s}$, tempo referente à $h = 0$, ou seja, quando o funil estará vazio, mais negativos serão os valores da inclinação da reta.

Para obter esses resultados através de uma abordagem geométrica, começamos por inserir a função solução no Software Geogebra e, posteriormente, criamos dois controles deslizantes denominados x_1 e x_2 , ambos relacionados ao tempo. O segundo controle deslizante, x_2 , é fundamental para plotar o gráfico ponto a ponto e, dessa forma, possibilitar uma análise precisa da altura da água no tanque ao longo do tempo. Utilizamos a mesma variação em ambos os controles deslizantes, indo de 0 a 100 segundos com um incremento de 1. Para habilitar essa ferramenta no Software Geogebra, basta clicar no segundo ícone da direita para a esquerda na linha superior e, em seguida, clicar com o botão direito do mouse em qualquer parte da

janela de visualização para que a caixa branca apareça, conforme mostrado na figura abaixo.

Figura 18 – Controle deslizante

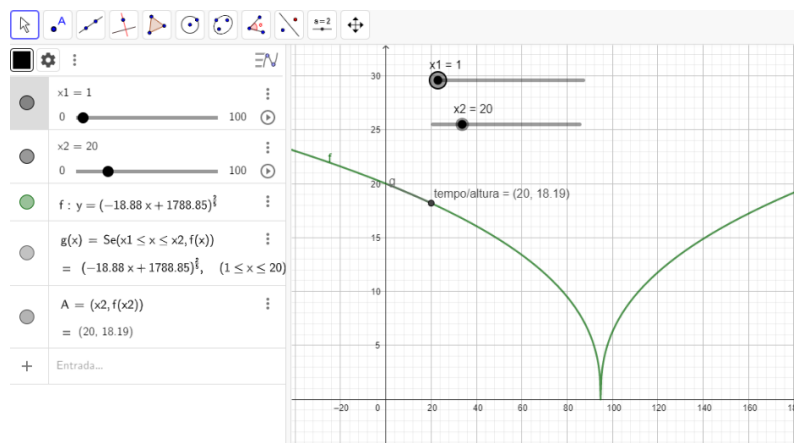


Fonte: Autor, 2023.

Nesta caixa, é onde nomeamos os referidos controles deslizantes citados acima e inserimos as variações de tempo e incrementos que são apropriadas para cada situação problema.

O gráfico abaixo ilustra a solução.

Figura 19 – Controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

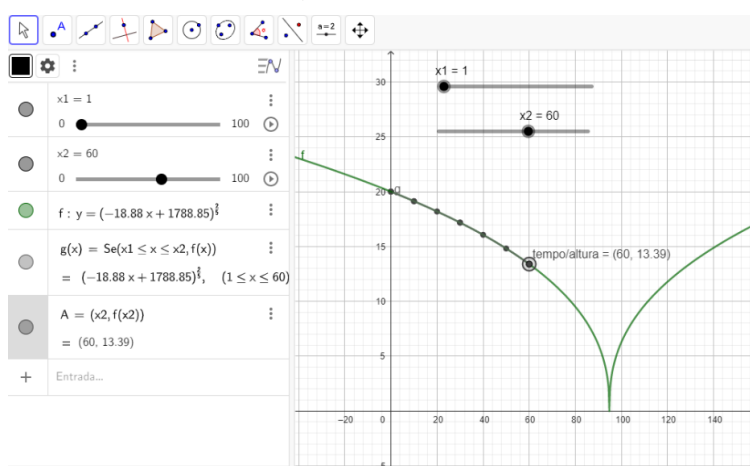
Foi inserida a fim de obter uma melhor visualização, um rótulo no ponto C criado. Para habitar este rótulo podemos seguir os seguintes passos:

1. Clicar no ponto C com o botão direito do mouse; em configurações é permitido escolher uma cor para ele.
2. Em Básico, selecione exibir rastro (que permite uma avaliação ponto a ponto de acordo com o incremento utilizado).
3. Em Legenda escreva: tempo/altura

Após essa sequência de dados, basta clicar no cursor em x_2 , obtendo a construção abaixo.

Observe por exemplo que em $t = 60$ segundos = 1 minuto, a altura do líquido no tanque é de 13,39 *cm*.

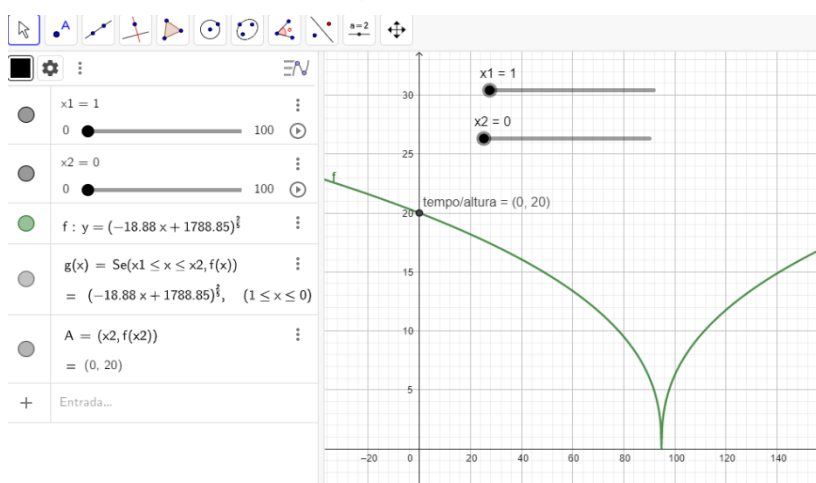
Figura 20 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

Vale ressaltar pequenas imprecisões, devido ao arredondamento das casas, observe ainda que o dado inicial do problema pode ser verificado no gráfico:

Figura 21 – Condições iniciais do problema 5

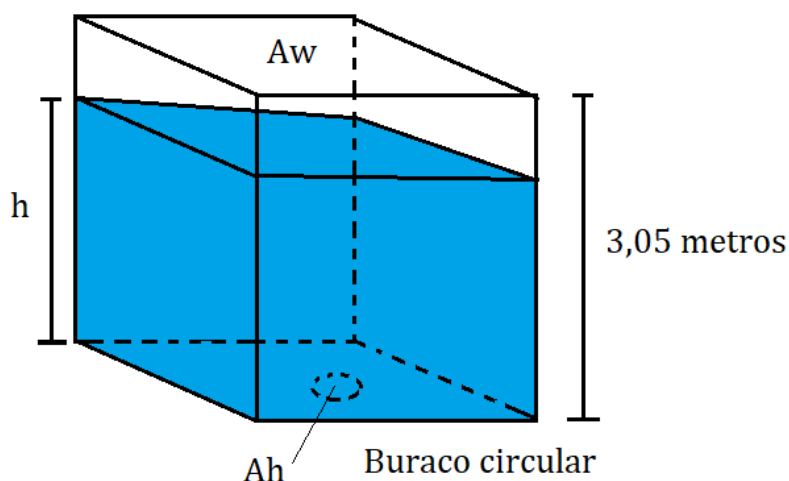


Fonte: Autor, 2023.

Problema 3

Suponha que a água esteja saindo do tanque por um orifício circular em sua base de área A_h . Quando a água vaza pelo orifício, o atrito e a contração da corrente nas proximidades do orifício reduzem o volume de água que está vazando do tanque por segundo para $cA_h\sqrt{2gh}$, onde c ($0 < c < 1$) é uma constante empírica. Determine uma equação diferencial para altura h de água no instante t para um tanque cúbico, como na figura abaixo. O raio do orifício é $50,8\text{ mm}$, e $g = 9800\text{ mm/s}^2$ e altura do tanque é de $3,05\text{ metros}$.

Figura 22 – Tanque cúbico do Problema 3



Fonte: Autor, 2023.

Solução

A equação diferencial é $\frac{dh}{dt} = -c \frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh}$.

Usando

$A_h = \pi(50,8\text{mm})^2 \cong 8107,32\text{mm}^2$, $A_w = (3050\text{mm})^2 = 9302500\text{mm}^2$ e $g = 9800\text{ mm/s}^2$, temos:

$$\frac{dh}{dt} = -c \left(\frac{A_h}{A_w} \right) \sqrt{2gh}$$

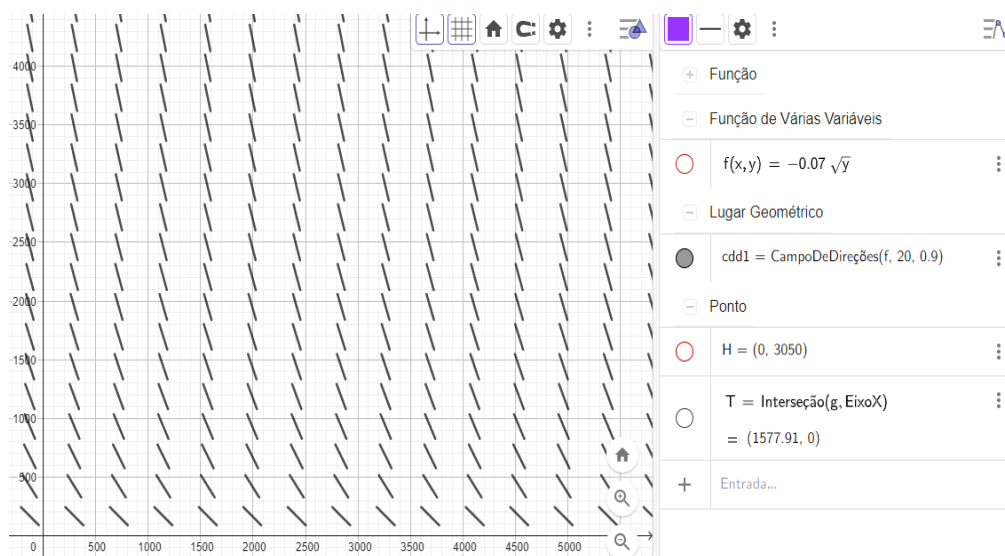
$$\frac{dh}{dt} = -c \left(\frac{8107,32}{9302500} \right) \sqrt{2(9800)(h)}$$

$$\frac{dh}{dt} = -c(8,72 \cdot 10^{-4})140\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{dt} \cong -0,122 \cdot c \cdot \sqrt{h}$$

Para uma melhor visualização do comportamento dessa equação diferencial iremos projetar o seu gráfico no software Geogebra, conforme a figura abaixo:

Figura 23 – Campo de direções da equação do problema 3



Fonte: Autor, 2023.

Podemos notar que próximo de zero a função tende a valores mais próximos de zero e para valores mais distantes de zero para a variável y que representa a altura da água no tanque a variação tende a aumentar em módulo, o que significa que o volume da água irá decrescer ao longo do tempo.

A fim de obter esses resultados geometricamente, vamos considerar algumas condições iniciais para o problema, no qual a altura do líquido no instante inicial é 3,05 cm e dessa forma determinar uma função solução para a altura do líquido no tanque em um tempo qualquer.

Assim resolvendo a EDO por separação de variáveis temos.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{183}{2500} \sqrt{h} \\ \frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\frac{183}{2500} dt \\ \int h^{-\frac{1}{2}} dh &= -\frac{183}{2500} dt \\ 2h^{\frac{1}{2}} &= -\frac{183}{2500} t + c \end{aligned}$$

A solução geral.

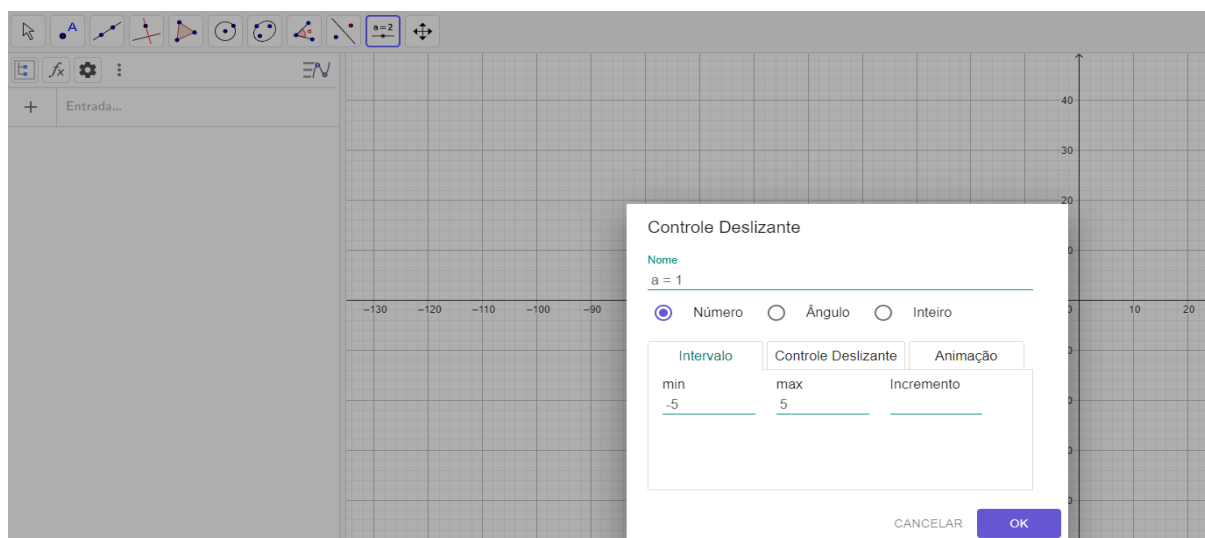
$$h = \left(-\frac{183}{5000}t + c\right)^2$$

Determinado a solução específica para as condições iniciais consideradas, temos.

$$h = \left(-\frac{183}{5000}t + 1,74\right)^2$$

A partir dos resultados encontrados, inserimos primeiramente a função solução no Software Geogebra e em seguida criamos dois controles deslizantes que chamaremos de x_1 e x_2 , ambos relacionados ao tempo. O segundo controle deslizante x_2 se faz necessário para que o gráfico seja plotado ponto a ponto e assim possamos averiguar com precisão a altura da água no tanque, com o passar do tempo. Utilizamos em ambos a mesma variação, neste caso de 0 a 100 segundos, ambos com incremento 1. Para habilitar esta ferramenta no Software Geogebra, basta clicarmos no segundo ícone da direita para a esquerda, na linha superior, e apertando o botão direito do mouse em qualquer lugar na janela de visualização aparecerá essa caixa branca como mostrada na figura abaixo.

Figura 24 – Controle deslizante

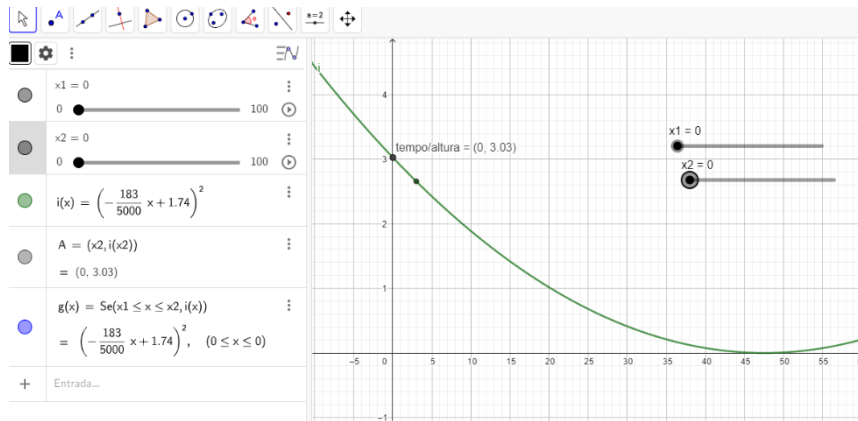


Fonte: Autor, 2023.

Nesta caixa, é onde nomeamos os referidos controles deslizantes citados acima e inserimos as variações de tempo e incrementos que são apropriadas para cada situação problema.

O gráfico abaixo ilustra a solução.

Figura 25 – Controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

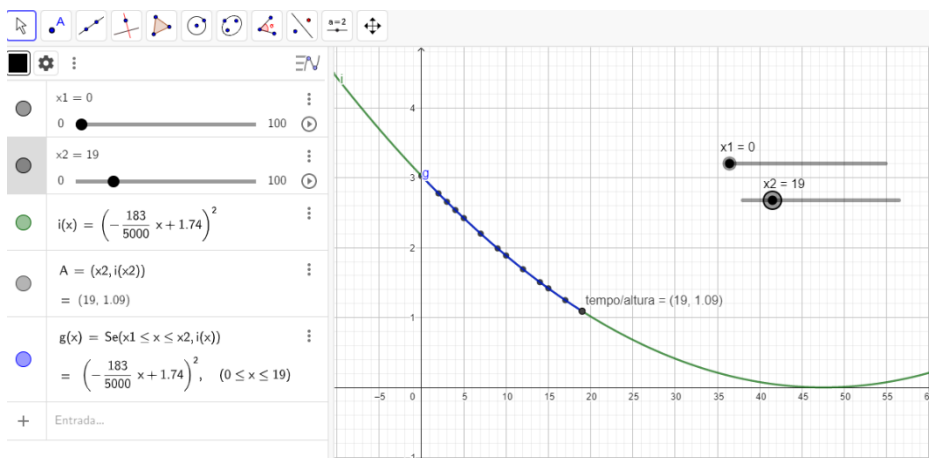
Foi inserida a fim de obter uma melhor visualização, um rótulo no ponto C criado. Para habitar este rótulo podemos seguir os seguintes passos:

1. Clicar no ponto C com o botão direito do mouse; em configurações é permitido escolher uma cor para ele.
2. Em Básico, selecione exibir rastro (que permite uma avaliação ponto a ponto de acordo com o incremento utilizado).
3. Em Legenda escreva: tempo/altura

Após essa sequência de dados, basta clicar no cursor em x_2 , obtendo a construção abaixo.

Observe por exemplo que em $t = 19 s$, a altura do líquido no tanque é de aproximadamente 1,09 m.

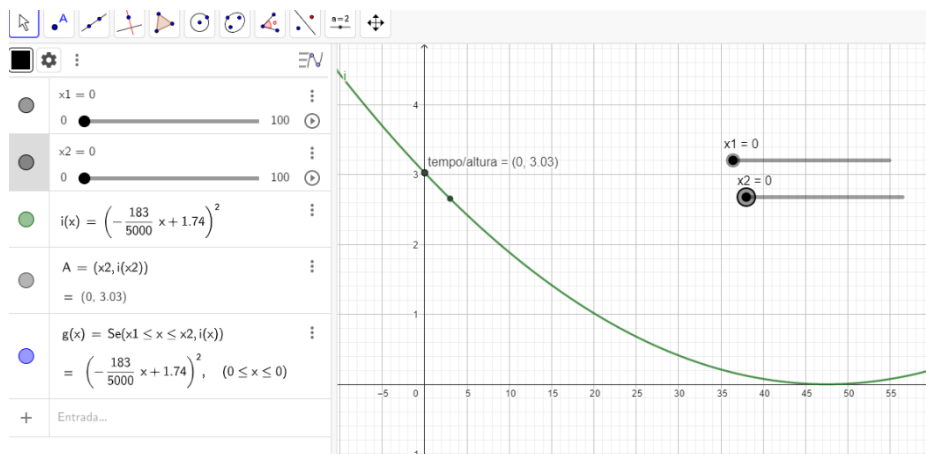
Figura 26 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

Vale ressaltar pequenas imprecisões, devido ao arredondamento das casas, observe ainda que o dado inicial do problema pode ser verificado no gráfico:

Figura 27 – Condições iniciais do problema 5



Fonte: Autor, 2023.

3.2 Misturas

Problema 4

Um tanque contém 1000 galões de água, em que 100 libras de sal estão inicialmente dissolvidas. No tanque, despeja-se salmoura a uma taxa de 10 galões/min, sendo que cada galão de salmoura contém 5 libras de sal dissolvido. A mistura no tanque é constantemente revolvida de modo a mantê-la uniforme. A mistura de água e sal também escoa do tanque a uma taxa de 10 galões/min. Encontre a quantidade de sal presente no tanque num instante t qualquer, conforme a imagem abaixo:

Figura 28 – Tanque de mistura



Fonte: Autor, 2023.

Solução

A quantidade de sal presente no tanque em um instante qualquer é dada por $y(t)$ e sua taxa temporal de variação é dada por:

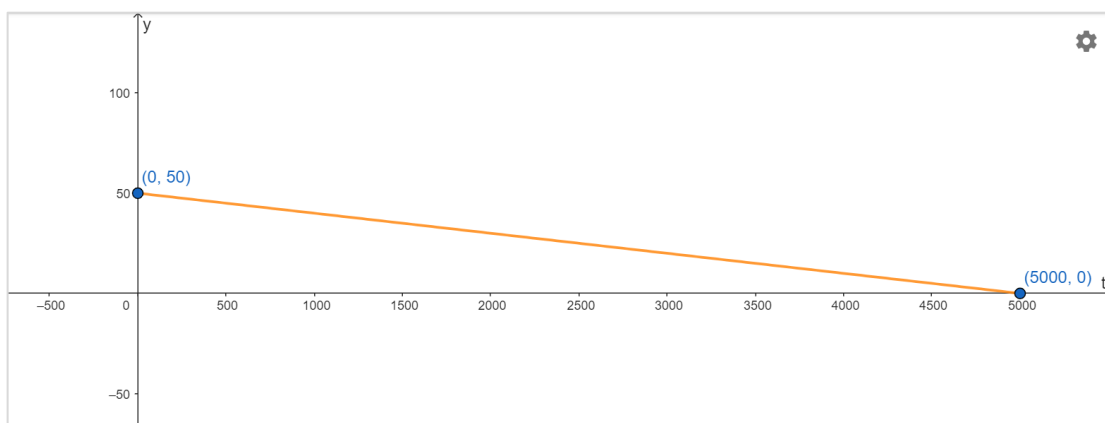
$$\frac{dy}{dt} = \text{Taxa de entrada de sal} - \text{Taxa de saída de sal}$$

$$\frac{dy}{dt} = (5 \text{ libras por galão}) - (10 \text{ galões do conteúdo total do tanque})y$$

$$\frac{dy}{dt} = (50) - \left(\frac{1}{100}\right)y \quad (3.27)$$

Vamos considerar primeiramente as informações que podem ser obtidas da equação diferencial, como por exemplo, para qual valor de y a variação de sal presente no tanque é zero. Se y for 5000, não há variação de sal presente no tanque. Podemos verificar essa informação no gráfico $y \times t$ da imagem abaixo.

Figura 29 – Curva de variação da concentração de sal ao longo do tempo dentro do tanque



Fonte: Autor, 2023.

Resolvendo a equação pelo método do fator integrante, temos:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{100}y = 50 \quad (3.28)$$

Fator integrante: $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{t}{100}}$.

Multiplicando a equação por $\mu(t)$, temos:

$$\frac{dy}{dt} \cdot e^{\frac{t}{100}} + \frac{1}{100}y \cdot e^{\frac{t}{100}} = 50 \cdot e^{\frac{t}{100}}$$

É possível identificar no primeiro membro da equação a regra de derivada do produto de duas funções $\mu(t)$ e $y(t)$, dessa forma, podemos reescrever o primeiro membro da equação como a derivada do produto dessas funções:

$$\frac{d(e^{\frac{t}{100}} \cdot y)}{dt} = 50 \cdot e^{\frac{t}{100}} \quad (3.29)$$

Agora vamos integrar de ambos os lados da equação para obtermos a função $y(t)$:

$$\int \frac{d(e^{\frac{t}{100}} \cdot y)}{dt} dt = \int 50 \cdot e^{\frac{t}{100}} dt \quad (3.30)$$

$$e^{\frac{t}{100}}.y = \frac{50.e^{\frac{t}{100}}}{1} + C \quad (3.31)$$

$$e^{\frac{t}{100}}.y = 5000.e^{\frac{t}{100}} + C \quad (3.32)$$

Dividindo todos os membros da equação por $e^{\frac{t}{100}}$, obtemos:

$$\frac{e^{\frac{t}{100}}.y}{e^{\frac{t}{100}}} = \frac{5000.e^{\frac{t}{100}}}{e^{\frac{t}{100}}} + \frac{C}{e^{\frac{t}{100}}}$$

$$y = 5000 + C.e^{-\frac{t}{100}} \quad (3.33)$$

Para determinarmos o valor da constante C vamos substituir na equação os valores do momento inicial $t = 0$ em que o tanque possui 100 libras de sal.

$$100 = 5000 + C.e^{-\frac{0}{100}}$$

$$100 - 5000 = C.e^0$$

$$C = -4900$$

Dessa forma, podemos determinar a solução particular do problema:

$$y - 5000 = -4900.e^{-\frac{t}{100}}$$

$$y = 5000 - 4900.e^{-\frac{t}{100}}$$

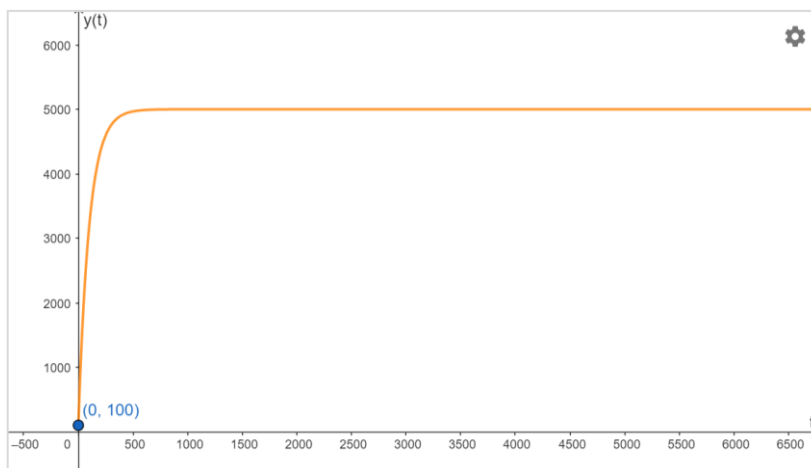
$$y(t) = 5000 - 4900.e^{-\frac{t}{100}} \quad (3.34)$$

Logo, a quantidade de sal presente no tanque num instante t qualquer pode ser determinada pela seguinte equação:

$$y(t) = 5000 - 4900.e^{-\frac{t}{100}} \quad (3.35)$$

Graficamente, a função pode ser expressa por:

Figura 30 – Gráfico da concentração de sal ao longo do tempo



Fonte: Autor, 2023.

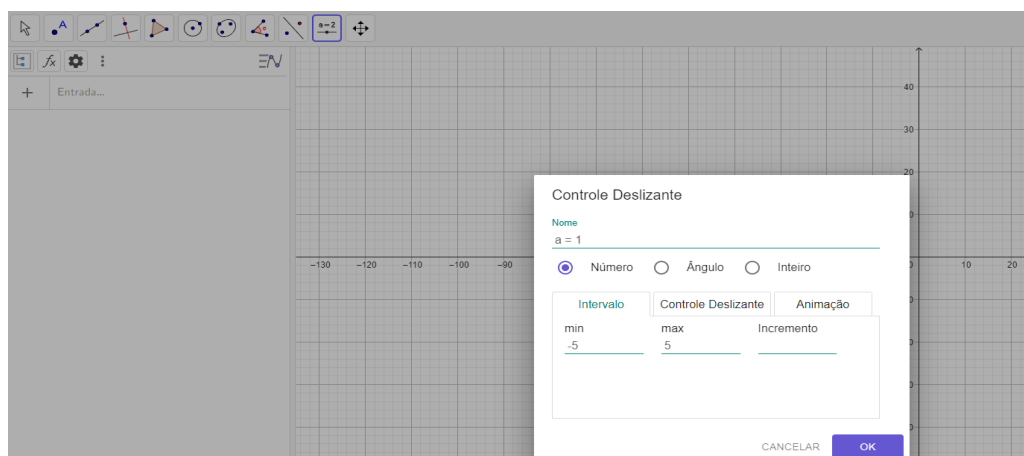
Em que $y(t)$ determina a variação de sal presente em um instante t qualquer. Observemos que a função foi limitada a partir de um intervalo que inicia em $t = 0$ com uma variação de 100 libras de sal. À medida que o tempo passa, a concentração de sal aumenta, até que cheguemos a uma capacidade limite de 5000 libras de sal. Dessa forma, observa-se que conforme $t \rightarrow +\infty$, temos $y(t) \rightarrow 5000$, representado graficamente por uma assíntota horizontal. A presença da assíntota pode ser matematicamente justificada calculando o limite de $y(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5000 - 4900 \cdot e^{-\frac{t}{100}} \right) = 5000 - \frac{4900}{e^{\frac{\infty}{100}}} = 5000$$

Consideremos apenas $+\infty$, pois não é justificável que haja um tempo $-\infty$. Como obtivemos um valor constante, entendemos que o gráfico da função $y(t)$ se aproxima de 5000 libras de sal conforme o valor de t aumenta.

Com o propósito de alcançar esses resultados de maneira geométrica, começamos inserindo a função solução no Software Geogebra e, em seguida, criamos dois controles deslizantes nomeados como x_1 e x_2 , ambos relacionados ao tempo. O segundo controle deslizante, x_2 , é crucial para plotar o gráfico ponto a ponto, possibilitando assim uma medição precisa da altura da água no tanque conforme o tempo passa. Utilizamos a mesma variação em ambos os controles deslizantes, indo de 0 a 5000 minutos com um incremento de 1. Para ativar essa ferramenta no Software Geogebra, basta clicar no segundo ícone da direita para a esquerda na linha superior e, em seguida, clicar com o botão direito do mouse em qualquer lugar na janela de visualização para aparecer uma caixa branca, conforme ilustrado na figura abaixo.

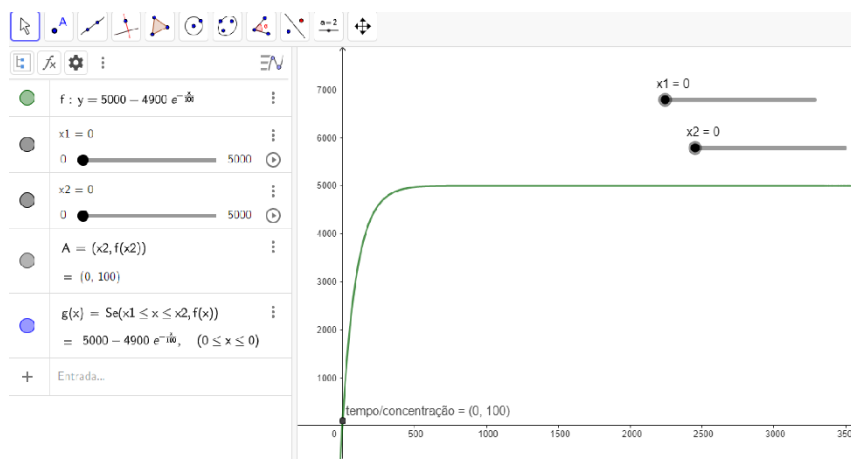
Figura 31 – Controle deslizante



Fonte: Autor, 2023.

Nesta caixa, é onde nomeamos os referidos controles deslizantes citados acima e inserimos as variações de tempo e incrementos que são apropriadas para cada situação problema.

O gráfico abaixo ilustra a solução.

Figura 32 – Controles deslizantes x_1 e x_2 

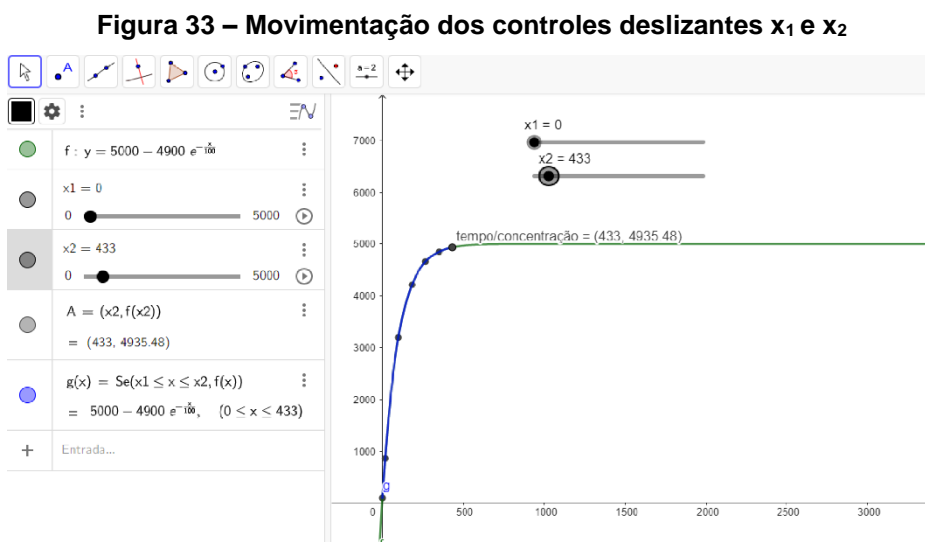
Fonte: Autor, 2023.

Foi inserida a fim de obter uma melhor visualização, um rótulo no ponto C criado. Para habitar este rótulo podemos seguir os seguintes passos:

4. Clicar no ponto C com o botão direito do mouse; em configurações é permitido escolher uma cor para ele.
5. Em Básico, selecione exibir rastro (que permite uma avaliação ponto a ponto de acordo com o incremento utilizado).
6. Em Legenda escreva: tempo/concentração

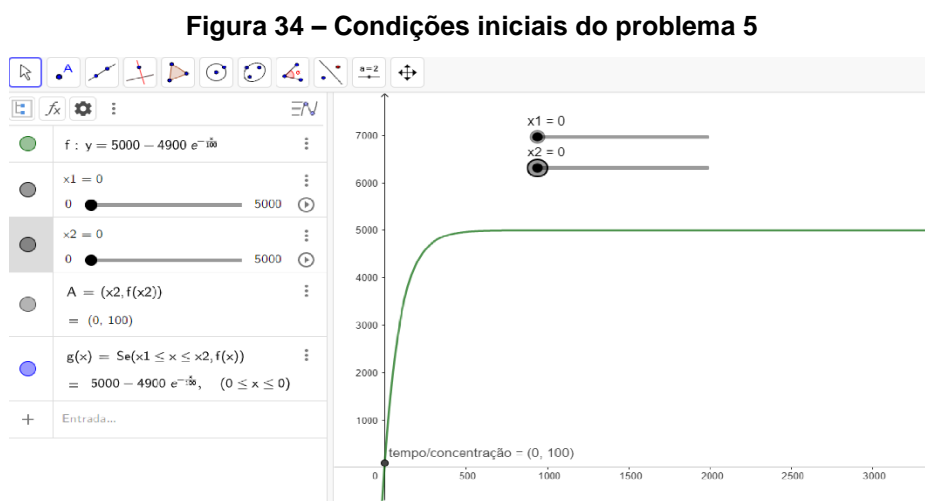
Após essa sequência de dados, basta clicar no cursor em x_2 , obtendo a construção abaixo.

Observe por exemplo que em $t = 433$ minutos $\cong 7,2$ horas, a concentração de sal no tanque é de aproximadamente 498785 libras de sal.



Fonte: Autor, 2023.

Vale ressaltar pequenas imprecisões, devido ao arredondamento das casas, observe ainda que o dado inicial do problema pode ser verificado no gráfico:



Fonte: Autor, 2023.

Problema 5

Suponha-se um tanque com 1000 litros de vinho com 15 kg de fermento dissolvido. O suco puro entra no tanque a uma taxa de 10 litros por minuto. A solução

é misturada e escoada com a mesma taxa. Quanto de fermento há no tanque após 20 minutos?

Solução

É importante considerar que as taxas de fluxo de entrada e saída podem ser diferentes, o que significa que a variação do líquido no problema também precisa ser levada em consideração na equação que modela o problema, e por conta disso resolveremos esse problema considerando como concentração de saída C_s do tanque a razão entre a quantidade Q de substância na saída no tanque e o volume total no tanque, no qual esse volume total é determinado pela soma do volume inicial V_0 do tanque com o produto da variação das taxas de entrada e saída ΔT do tanque pelo tempo de mistura do sistema, conforme as equações a seguir.

$$C_s = \frac{Q}{V_0 + \Delta T \cdot t}$$

$$\frac{dQ}{dt} = T_e \cdot C_e - T_s \cdot \frac{Q}{V_0 + (T_e - T_s) \cdot t} \quad (3.36)$$

onde $\frac{dQ}{dt}$ representa a variação de concentração da substância ao longo do tempo, T_e representa a taxa de entrada, T_s a taxa de saída, C_e a concentração de entrada, V_0 o volume inicial da substância, Q é a quantidade da substância no tanque, t é o tempo em minutos e C_s a concentração de saída.

Dessa forma, substituiremos as informações do problema na equação.

$$Q(0) = 15$$

$$\frac{dQ}{dt} = 10 \cdot 0 - 10 \cdot \frac{Q}{1000 + (10 - 10) \cdot t}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0 - 10 \frac{Q}{1000}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 0 \quad (3.37)$$

Calculando o fator integrante $u(x)$:

$$e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{1}{100}t}$$

$$u(x) = e^{\frac{1}{100}t} \quad (3.38)$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{dQ}{dt} e^{\frac{1}{100}t} + \frac{Q}{100} e^{\frac{1}{100}t} = 0 \cdot e^{\frac{1}{100}t}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(Q \cdot e^{\frac{1}{100}t})}{dt} &= 0 \\ \int d(Q \cdot e^{\frac{1}{100}t}) &= \int 0 dt \\ Q \cdot e^{\frac{1}{100}t} &= k \\ Q &= ke^{-\frac{1}{100}t} \quad (3.39)\end{aligned}$$

Para determinarmos a constante k iremos aplicar a fórmula usando as informações do momento inicial da mistura quando $t = 0$ e a quantidade de fermento dissolvido é 15 kg .

$$\begin{aligned}Q &= ke^{-\frac{1}{100}t} \\ 15 &= ke^{-\frac{1}{100}0} \\ k &= 15\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos determinar a solução particular do problema:

$$Q(t) = 15e^{-\frac{1}{100}t} \quad (3.40)$$

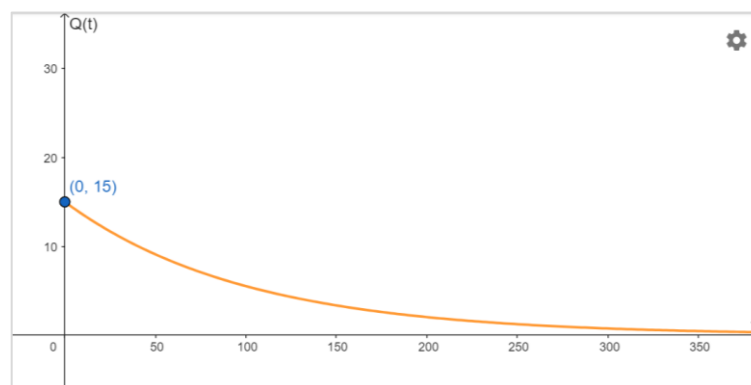
Assim, é possível estabelecer quanto há de fermento no tanque após 20 minutos.

$$\begin{aligned}Q(20) &= 15e^{-\frac{1}{100}20} \\ Q(20) &= 15 \cdot 0,818 \\ Q(20) &\cong 12,28\end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de fermento após 20 minutos no tanque é de aproximadamente $12,28 \text{ kg}$.

Analisando graficamente, observamos pela função obtida, nesse caso uma função exponencial, que conforme t aumenta, a concentração de fermento diminui, o que é representado por uma curva decrescente. Observe:

Figura 35 – Curva de solução do problema 5



Fonte: Autor, 2023.

A função foi limitada a um intervalo que inicia em $t = 0$ com uma concentração de 15 kg de fermento dissolvido. À medida que o tempo passa, a concentração diminui até que todo o fermento tenha sido dissolvido. Dessa forma, observa-se que conforme $t \rightarrow +\infty$, temos $Q(t) \rightarrow 0$, representado graficamente por uma assíntota horizontal. Nesse caso, a presença da assíntota pode ser justificada matematicamente ao se calcular o limite de $Q(t)$ quando $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(15e^{-\frac{1}{100}t} \right) = \frac{15}{e^{\infty}} = 0 \quad (3.41)$$

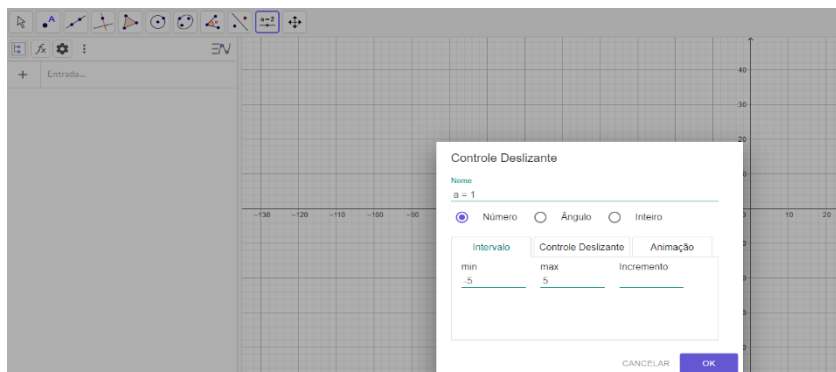
Consideraremos apenas valores positivos para t , pois não é justificável t tender para $-\infty$. Assim, como obtivemos um valor constante para o limite, confirma-se que o gráfico da função $Q(t)$ se aproxima de 0 conforme o valor de t aumenta.

Podemos ainda fazer um estudo mais detalhado da quantidade de fermento no tanque em função do tempo, utilizando a ferramenta controle deslizante em função do tempo, o que nos permite comprovar que a quantidade de fermento diminui com o passar do tempo. Pela solução analítica, mostramos que em $t = 20$ a quantidade de fermento é de aproximadamente $12,28 \text{ kg}$

Assim como nos problemas anteriores, inserimos primeiramente a função solução no Software Geogebra e em seguida criamos dois controles deslizantes que chamaremos de x_1 e x_2 , ambos relacionados ao tempo. Como descrito no problema 1, o segundo controle deslizante x_2 se faz necessário para que o gráfico seja plotado ponto a ponto e assim possamos averiguar com precisão a quantidade de fermento em tempos fixados, neste caso no intervalo de 0 a 20, ambos com incremento 2. Para habilitar esta ferramenta no Software Geogebra, clicamos no segundo ícone da direita para a esquerda, na linha superior, e apertando o botão direito do mouse em qualquer

lugar na janela de visualização aparecerá essa caixa branca como mostrada na figura abaixo.

Figura 36– Controle deslizante

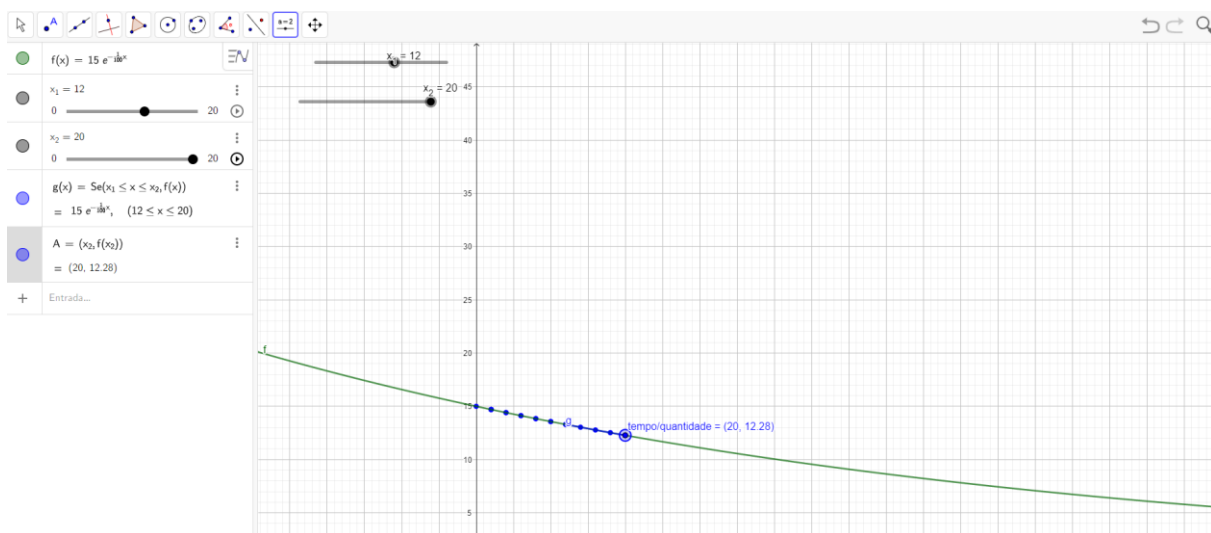


Fonte: Autor, 2023.

Nesta caixa, é onde nomeamos os referidos controles deslizantes citados acima e inserimos as variações de tempo e incrementos apropriados.

O gráfico abaixo ilustra a solução, evidenciando que em $t = 20$ a quantidade de fermento é de $12,28 \text{ kg}$.

Figura 37 - Controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

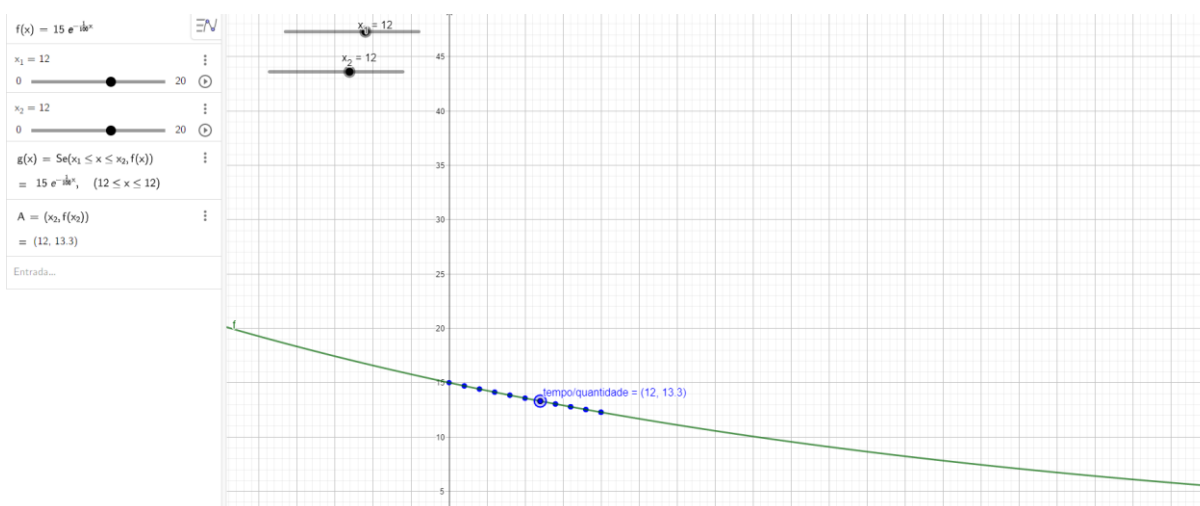
Foi inserida a fim de obter uma melhor visualização, um rótulo no ponto C criado. Para habitar este rótulo podemos seguir os seguintes passos:

1. Clicar no ponto C com o botão direito do mouse; em configurações é permitido escolher uma cor para ele.
2. Em Básico, selecione exibir rastro (que permite uma avaliação ponto a ponto de acordo com o incremento utilizado).
3. Em Legenda escreva: tempo/quantidade

Após essa sequência de dados, basta clicar no cursor em x_2 , obtendo a construção abaixo.

Observe, no gráfico abaixo, que em $t = 12$, a quantidade de fermento é de 13,3 kg, ou seja, a quantidade de fermento está diminuindo com o passar das horas.

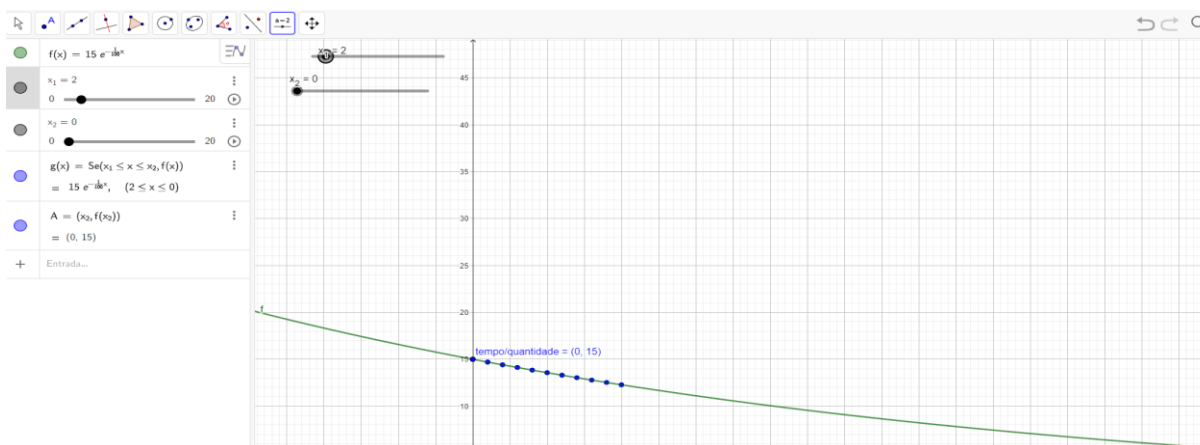
Figura 38 – Movimentação dos controles deslizantes x_1 e x_2



Fonte: Autor, 2023.

Podemos ainda verificar as condições iniciais do problema no gráfico abaixo.

Figura – Condições iniciais do problema 5



Fonte: Autor, 2023.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho pretendeu entender as aplicações de equações diferenciais de primeira ordem em problemas de mistura e drenagem em um tanque para a compreensão teórica dos fenômenos físicos e químicos, como o processo de mistura e o escoamento de fluidos, e para o desenvolvimento de modelos matemáticos para representar esses fenômenos, tendo em vista, que o estudo desse tema é importante para a formação acadêmica de estudantes em áreas como matemática, física, química e engenharia, fornecendo uma base sólida para estudos posteriores.

Fazendo uso de uma abordagem metodológica de pesquisa quantitativa e de estratégia descritiva dos resultados com procedimentos de pesquisa experimental utilizando ferramentas do software Geogebra para a simulações computacionais, e obtenção das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a partir da construção de modelos matemáticos logradas a partir de leis físicas e químicas.

Para se atingir uma compreensão do objetivo geral de investigar as equações diferenciais de primeira ordem e suas aplicações em problemas de mistura e drenagem em um tanque, a fim de compreender melhor os fenômenos físicos envolvidos e desenvolver modelos matemáticos precisos e eficientes para prever e controlar os componentes de uma mistura ou o escoamento de um líquido em um tanque, definiu-se seis objetivos específicos.

O primeiro objetivo específico foi revisar a literatura existente sobre equações diferenciais de primeira ordem e suas aplicações em problemas de mistura e drenagem em um tanque, incluindo modelos matemáticos e técnicas para solução dessas equações, no qual a pesquisa fundamentou-se em um conjunto sólidos de informações, buscando autores como Zill (2016), Boyce (2020), Bassanezi (2002) e Abunahman (1989).

O segundo objetivo específico foi identificar os parâmetros e condições iniciais e de contorno que afetam a solução das equações diferenciais para o problema de mistura e drenagem em um tanque. Verificou-se ao encontrar a equação diferencial que modela o problema 1 sobre drenagem em um tanque os parâmetros: coeficiente de contração que reduz a taxa de variação do escoamento da água devido a mudança da trajetória de algumas partículas do líquido, por conta dessas partículas colidirem com a base do tanque e se direcionarem ao orifício no fundo do tanque, e a razão

entre as áreas do orifício e a base do tanque que deve ser um valor entre 0 e 1, além das condições iniciais de altura igual a 2,25 m no tempo igual a 0s.

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -c\sqrt{2gh(t)} \cdot \frac{A}{B}$$

onde c é o coeficiente de contração;

A é a área do orifício;

B é a área da base do tanque;

g é a aceleração da gravidade na terra.

O terceiro objetivo específico foi analisar como as propriedades físicas dos fluidos, como a viscosidade e a densidade, influenciam o processo de misturas e drenagem em um tanque e como essas propriedades podem ser incorporadas nas equações diferenciais. Verificou-se no problema 1 que a viscosidade do líquido que escoava do tanque está ligada ao parâmetro de coeficiente de contração usado na equação que modela o problema e a densidade que está relacionado ao parâmetro ρ necessário para o cálculo da taxa de variação da concentração da mistura no tanque nos problemas de mistura.

$$\frac{dQ}{dt} = \rho \cdot V_{in} - \rho \cdot V_{out}$$

onde V_{in} é a vazão de entrada e V_{out} é a vazão de saída;

A densidade de massa denotada por ρ ;

A quantidade de mistura no tanque, denotada por Q , variando com o tempo t

O quarto objetivo específico foi utilizar os modelos matemáticos desenvolvidos para prever e controlar a concentração de soluto ou o tempo de escoamento do líquido em um tanque de mistura e drenagem, e comparar os resultados obtidos com simulações computacionais. Verificou-se no problema 1 ao analisar os gráficos obtidos para a solução do problema que era encontrar o tempo necessário para esvaziar o tanque a boa aproximação do resultado obtido através do cálculo para a solução obtida por simulação computacional no software Geogebra.

O quinto objetivo específico foi analisar como os modelos matemáticos desenvolvidos podem ser otimizados para reduzir o tempo necessário para atingir uma concentração ou tempo de escoamento desejado em um tanque de mistura e drenagem. Verificou-se no problema 5 a possibilidade de usar novos parâmetros na equação que modela o problema, quando houver uma diferença na vazão de entrada e saída da mistura no tanque, conforme a equação a seguir.

$$\frac{dQ}{dt} = T_e \cdot C_e - T_s \cdot C_s$$

Onde $\frac{dQ}{dt}$ representa a variação de concentração da substância ao longo do tempo, T_e representa a taxa de entrada, T_s a taxa de saída, C_e a concentração de entrada, V_0 o volume inicial da substância, Q é a quantidade da substância no tanque, t é o tempo em minutos e a concentração de saída C_s .

$$C_s = \frac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)t}$$

O sexto objetivo específico foi avaliar a eficácia e a aplicabilidade dos modelos matemáticos desenvolvidos em diferentes cenários de mistura e drenagem em um tanque, considerando variações nos parâmetros do sistema, condições iniciais e de contorno e propriedades físicas dos fluidos. Verificou-se que esses modelos são eficazes porque permitem a modelagem matemática de processos complexos de mistura e drenagem em um tanque, permitindo a previsão de comportamentos como no caso de determinar a quantidade de uma mistura dentro de um tanque em um instante qualquer e a identificação de fatores críticos que influenciam o desempenho do sistema como as leis físicas e químicas que governam esses problemas a exemplo da velocidade de escoamento da água no tanque e da concentração de uma mistura.

A aplicabilidade desses modelos também é alta, pois são capazes de prever o comportamento de sistemas de mistura e drenagem em tanques de diferentes tamanhos e formas, permitindo o design e a otimização de processos de produção ou tratamento de fluidos, como exemplificado nos problemas em usamos tanques de forma cilíndrica e cônica.

Além disso, os modelos matemáticos de mistura e drenagem em um tanque com equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser facilmente adaptados, como exemplificado no problema 5 no qual foi utilizado novos parâmetros para a equação que modela o problema para a possibilidade de lidar com diferentes tipos de vazão, permitindo a sua aplicação em uma ampla gama de contextos industriais e científicos.

Sendo assim, as equações diferenciais de primeira ordem são amplamente utilizadas na resolução de problemas de mistura e drenagem em um tanque porque permitem descrever o comportamento dinâmico do sistema de forma matemática. Essas equações relacionam a taxa de variação do volume, da concentração ou de

outras variáveis relevantes do fluido dentro do tanque com o tempo e outras variáveis do sistema.

Em um problema de mistura em um tanque, as equações diferenciais de primeira ordem podem ser usadas para modelar como as diferentes correntes de líquido são misturadas no tanque e a partir das equações, é possível prever como as concentrações de mistura mudam ao longo do tempo e como o escoamento do fluido afeta o processo de mistura.

Em um problema de drenagem em um tanque, as equações diferenciais de primeira ordem são usadas para modelar como o fluido é escoado do tanque, levando em conta as taxas de escoamento, a geometria do tanque e outras variáveis relevantes e partir das equações, é possível prever como o volume do fluido no tanque diminui ao longo do tempo. Dessa forma, em ambos os casos, as soluções encontradas podem ser usadas para otimizar o processo de mistura ou drenagem, ajustando as variáveis relevantes do sistema para atender a determinados objetivos.

Em relação as ferramentas do software Geogebra pode ser verificado que as resposta obtidas eram condizentes com as soluções encontradas através do cálculo, além disso, a ferramenta é de fácil acesso e não tem custos.

Em pesquisas futuras, pode-se aprofundar a revisão bibliográfica para identificação de possíveis lacunas no conhecimento do tema, além disso, os modelos matemáticos utilizados na pesquisa podem não capturar todos os nuances do problema de mistura e drenagem em um tanque, podendo ser ajustado com equações de ordem superior.

A coleta de dados pode ser aprimorada por meio do uso de instrumentos mais precisos, ou do ajuste da abordagem de coleta de dados para melhor se adequar ao problema em questão. Embora os resultados possam ter aplicação imediata em problemas de mistura e drenagem em um tanque, é possível que haja outras áreas de aplicação. Portanto, a pesquisa pode ser aprimorada por meio da exploração de novas possibilidades de aplicação dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

- ABUNAHMAN, S. A. **Equações Diferenciais**. 2. ed. Rio de Janeiro: EDC - Editora Didática e Científica, 1989.
- ALMEIDA, A. S. O. et al. **Determinação do coeficiente de descarga para orifícios de parede delgada considerando números de Reynolds reduzido**. Fortaleza: DAE, 2017.
- BASSANEZI, R. **Ensino - aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3^o. ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- CORREA, F. N. **Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias em Circuitos Elétricos RL e RLC**. Manaus: UEA, 2022.
- FONTANA, É. **Métodos aplicados à Engenharia Química I**. Curitiba: UFPR, 2020.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- GRESSLER, L. A. **Introdução à pesquisa: projetos e relatórios**. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2004. 295 p.
- KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. Tradução de Maria Cristina Variale. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, v. I, 2019.
- MACHADO, I. M. F. **Matemática Aplicada: o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos**. Anápolis: IFG, 2016.
- MARTINS, M. D. C. Matemática em família: Os Bernoulli. **Correio dos Açores**, Açores, p. 1, 15 Maio 2014.
- ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução de Márcio Koji Umezawa. 3^o. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.