Alcides de Castro Amorim Neto
Carlos Frank Lima dos Santos
Rogério Jacinto de Moraes Júnior

Tópicos essenciais de Cálculo e Geometria Analítica para o ensino superior

editora UEA

Tópicos essenciais de Cálculo
e Geometria Analítica
para o ensino superior

Alcides de Castro Amorim Neto
Carlos Frank Lima dos Santos
Rogério Jacinto de Moraes Júnior

Tópicos essenciais de Cálculo e Geometria Analítica para o ensino superior

editora
UEA

Wesley Sá
Coordenação Editorial

Loredane Queiroz
Diagramação

Loredane Queiroz
Projeto Gráfico

Loredane Queiroz
Finalização

André Teixeira
Lucas Ramos
Revisão

Esta edição foi revisada conforme as regras do Novo Acordo Ortográfico
da Língua Portuguesa

A524t
2024

Amorim Neto, Alcides de Castro
Tópicos essenciais de Cálculo e Geometria Analítica para o ensino superior / Alcides de Castro Amorim Neto, Carlos Frank Lima dos Santos, Rogério Jacinto de Moraes Júnior. – Manaus (AM): Editora UEA, 2024.
168 p.: il., color., 21 cm [E-book]

Formato PDF

ISBN 978-85-7883-650-4

Inclui referências bibliográficas

1. Cálculo. 2. Geometria Analítica. 3. Ensino Superior. I. Santos, Carlos Frank Lima dos. II. Moraes Júnior, Rogério Jacinto de. III. Título.

CDU 1997 – 514.142.2

Elaborada pela bibliotecária Sheyla Lobo Mota CRB11/ 484

Editora afiliada
Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

*editora***UEA**

Av. Djalma Batista, 3578 – Flores | Manaus – AM – Brasil
CEP 69050-010 | +55 92 38784463
editora.uea.edu.br | editora@uea.edu.br

Dedicamos esta obra a todos que gostam e admiram a matemática como uma ciência bela e de grande utilidade.

Agradecimentos

Agradecemos primeiramente a Deus pelo dom da vida e, assim, nos deu a possibilidade de realizarmos este trabalho;

Aos nossos familiares: esposas, filhos, pais, irmãos e amigos, que sempre nos incentivaram e compreenderam nossas eventuais ausências;

À Universidade do Estado do Amazonas – UEA, pelo aporte necessário para a divulgação desta obra;

À editora da UEA, pela colaboração total na confecção deste material.

Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.

François Viète

Sumário

Apresentação

A obra intitulada: ***Tópicos essenciais de Cálculo e Geometria Analítica para o ensino superior***, que trata de Matemática como grande área, aborda mais especificamente sobre Cálculo e Geometria Analítica, está organizada em 8 capítulos que abordam conteúdos do ensino fundamental e médio, como polinômios, funções, trigonometria, sistemas lineares e cônicas; outros conteúdos que são trabalhados no ensino superior como limites, derivadas e integrais são explanados de forma bem simples e intuitiva.

Para tanto, utilizamos a hierarquização de conteúdos para escolhermos aqueles a serem explicitados neste trabalho, uma vez que não seria possível abordar todos os conteúdos da educação básica ao início do superior. Também buscou-se usar uma linguagem mais simples para que leitores de outras áreas que tenham curiosidade na leitura do material possam também compreender sem, contudo, perder o rigor matemático das definições e conceitos aqui apresentados.

O foco dos exercícios está na utilização de aplicações contextualizadas, oportunizando o aumento de conceitos e definições a serem explorados através de pesquisas também externas a essa obra, com o objetivo que criar ao estudante o hábito da pesquisa, que é parte fundamental do tripé educacional juntamente com o ensino e a extensão.

Vale destacar que os gráficos das funções, cônicas e os esquemas apresentados no livro são de criação dos próprios autores, sendo os dois primeiros deles, construídos com o auxílio do software dinâmico GeoGebra, que é sugerido também para que os alunos utilizem, dada sua grande utilidade para a visualização geométrica e operações algébricas bastante usada no cálculo em geral.

Dessa forma, acreditamos que o material tem um impacto significativo para esta Universidade do Estado do Amazonas – UEA, por se tratar do ineditismo do mesmo e de sua funcionalidade. Além disso, acreditamos que os nossos alunos e professores possam utilizar, sejam nos cursos regulares como também nos especiais, tais como: mediados por tecnologia e Parfor, e também com escolas de educação básica, preferencialmente no ensino médio, cuja experiência anterior com materiais dessa natureza apresentou resultados bastante significativos.

Gratos.

Alcides de Castro Amorim Neto
Carlos Frank Lima dos Santos
Rogério Jacinto de Moraes Júnior

Prefácio

Este livro foi pensado para preparar alunos e auxiliar professores do ensino superior dos cursos que possuem como pré-requisito uma boa base de matemática em particular, no uso de ferramentas de cálculo e da geometria analítica, que são primordiais para qualquer curso de ciências exatas e/ou sociais.

Usando a experiência adquirida em mais de 20 anos de atuação tanto no ensino superior quanto na educação básica, atuando em disciplinas como Estágio Supervisionado, Cálculo, Geometria Analítica e a própria matemática do ensino médio; balizando também o conhecimento obtido nos projetos como PIBID (Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) e PAIC (Programa de Apoio à Iniciação Científica), além da atuação nos cursos de mestrado, como o Profmat (Mestrado profissional em rede) e o de Educação e Ensino de Ciências na Amazônia, foi possível observar a grande dificuldade apresentada pelos alunos egressos da educação básica (ensino médio) ao se deparar com o início do ensino superior, em particular de ciências exatas.

Dificuldade essa que também é vista pelo professor que não dispõe, muitas vezes, de uma literatura de fácil entendimento para que esses alunos possam consultar, com o objetivo de mitigar essas deficiências acadêmicas oriundas de ensino médio defasado.

Em função dessas e outras motivações, foi idealizada a elaboração de um material didático em forma de livro, em que fossem hierarquizados os conteúdos matemáticos necessários para se ter uma boa noção e, dessa forma facilitar o entendimento dos tópicos que são ensinados nos primeiros anos de faculdade, principalmente nas disciplinas de cálculo e geometria analítica, que são terrenos férteis para as bases das ciências exatas, a priori.

Ressaltamos que esta obra é destinada também a todos que gostam e admiram a matemática, mas que muitas vezes não compreendem a linguagem em que a mesma se apresenta. Dessa forma, nos esforçamos para apresentar uma linguagem simples e de fácil entendimento com intuito de alcançar o maior número possível de leitores.

Álgebra:

Produtos Notáveis, Fatoração e Função

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

Este capítulo propõe uma revisão de assuntos trabalhados no ensino fundamental, como: conjuntos numéricos, produtos notáveis, fatoração, simplificação de expressões algébricas e cálculo de valores numéricos. Elementos que subsidiam a operacionalidade de funções e gráficos.

Conjuntos numéricos são grupos de números que compartilham características e propriedades específicas. Esses conjuntos são fundamentais na matemática e são usados em várias áreas, como álgebra, análise, geometria e teoria dos números. Vamos abordar os principais conjuntos numéricos e suas propriedades básicas.

Números Naturais (N): O conjunto dos números naturais é representado por N e composto por todos os números inteiros positivos maiores que zero. Ou seja, N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}.

Números Inteiros (Z): O conjunto dos números inteiros é representado por Z e inclui todos os números naturais, seus negativos e também o zero. Portanto, Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

Números Racionais (Q): O conjunto dos números racionais é representado por Q e consiste em todos os números que podem ser expressos na forma de fração, onde o numerador e o denominador são inteiros e o denominador não é zero. Por exemplo, 1/2, -3/4, 5/1 (que é simplesmente 5), são números racionais.

Números Irracionais (I): O conjunto dos números irracionais é representado por I e inclui todos os números que não são racionais, ou seja, não podem ser expressos como uma fração exata. Exemplos de números irracionais incluem π (pi) e $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de 2).

Números Reais (R): O conjunto dos números reais é representado por R e é a união dos números racionais e irracionais. Portanto, R = Q ∪ I. Ele abrange todos os números possíveis na reta numérica, incluindo os números inteiros, fracionários, decimais e irracionais.

Operações básicas: Os conjuntos numéricos são fechados sob as operações de adição e multiplicação. Isso significa que, quando você executa essas operações com números pertencentes a um conjunto específico, o resultado também estará no mesmo conjunto.

Vamos nos remeter às propriedades do conjunto dos números Reais (R).

Comutatividade e associatividade: As operações de adição e multiplicação são comutativas, ou seja, a ordem dos números não afeta o resultado $a+b=b+a$ e $a \cdot b = b \cdot a$. Além disso, essas operações são associativas, o que significa que a forma como os números são agrupados não afeta o resultado $(a+b)+c=a+(b+c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Identidade e elemento inverso: Cada conjunto numérico possui um elemento identidade para as operações de adição (zero) $a+0=a$ e multiplicação (um) $a \cdot 1 = a$. Além disso, cada número tem um inverso aditivo (negativo) $a+(-a)=0$ e multiplicativo (recíproco), exceto o zero, $a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$.

Distributividade: A multiplicação é distributiva em relação à adição, o que significa que a multiplicação de um número pela soma de dois outros números é igual à soma das multiplicações individuais $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Por vezes, o aluno se depara com dificuldades em resolver expressões algébricas, não somente na matemática, mas também de outras disciplinas como na física, química, biologia. Como, por exemplo:

Cálculo dos juros simples - $j = c \cdot i \cdot t$; juros (j); capital (c); taxa (i); tempo (t).

Cálculo da densidade - $d = \frac{m}{V}$; densidade (d); massa (m); Volume (V).

Cálculo do índice de massa corporal - $IMC = \frac{p}{A^2}$; peso (p); Altura (A).

Cálculo da velocidade - $v = \frac{s}{t}$; velocidade (v); espaço (s); tempo (t).

Estas expressões ou outras podem aparecer no nosso cotidiano, e se não estivermos familiarizados com a sua operacionalidade e manipulação de letras e números, aumentam nossas chances de erro.

Para corrigir essas imprecisões, devemos entender os conceitos de produtos notáveis, fatoração e expressões algébricas e numéricas, mas também entender a sua dinâmica no tratamento das substituições das letras e números. Dessa forma, minimiza-se os erros no tratamento dessas informações, tanto no campo acadêmico, como também nas situações do cotidiano.

Produtos Notáveis e Fatoração

Os produtos notáveis são expressões algébricas que apresentam um padrão, uma regularidade em seus resultados. Esse padrão de multiplicar seus termos, nos permite economizar muitos cálculos. No que se refere à fatoração, é um processo de tomar uma expressão algébrica e transformá-la em um produto. Então, para facilitar o aprendizado, fixemos os seguintes conceitos.

Fatoração: transformar em produto (fatores).

Produtos notáveis: fórmulas que desenvolvem expressões algébricas através de produtos.

Vamos estudar os produtos notáveis conhecidos por quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cubo da soma e cubo da diferença.

Produtos Notáveis

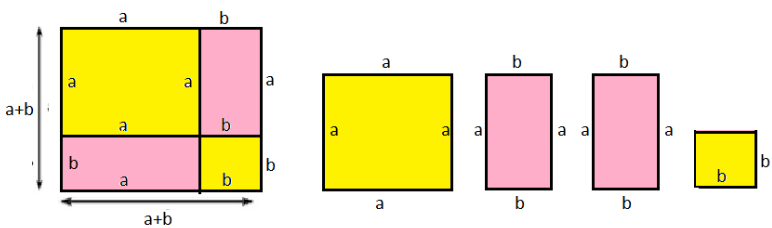
Quadrado da Soma: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a\ \ b + b \cdot a + b \cdot b;$$

Assim: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Geometricamente é o mesmo que calcular a área da região quadrada de lado $(a+b)$.

Figura 1 – Interpretação geométrica do quadrado da soma de 2 termos



Fonte: Os autores

Veja as seguintes situações:

$(3+4)^2 = ?$; inicialmente resolve o que está dentro do parêntese.

$(3+4)^2 = 7^2 = 49$. Mas existe outra maneira? A resposta a essa pergunta é sim, pelo quadrado da soma.

$$(3+4)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2 = 9 + 24 + 16 = 49$$

Note, no caso acima não é a maneira mais eficiente de resolver esta potência, mas é conveniente para potências com valor desconhecido.

$$(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Exemplos:

- $(y+7)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 7 + 7^2 = y^2 + 14y + 49$
- $(3b+1)^2 = (3b)^2 + 2 \cdot 3b \cdot 1 + 1^2 = 9b^2 + 6b + 1$
- $\left(\frac{5}{2} + m\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot m + m^2 = \frac{25}{4} + \frac{10}{2}m + m^2 = \frac{25}{4} + 5m + m^2$

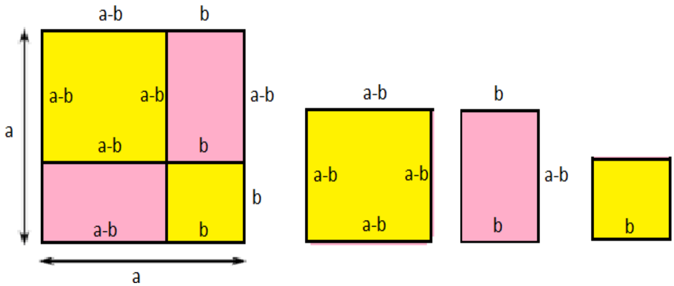
Quadrado da diferença: $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b;$$

Assim: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Geometricamente é o mesmo que calcular a área da região quadrada de lado $(a-b)$.

Figura 2 – Interpretação geométrica do quadrado da diferença de 2 termos



Fonte: Os autores

Área do quadrado maior é a^2, que é a soma dos dois quadrados menores (amarelo) mais os dois retângulos (rosa).

$$a^2 = (a-b)(a-b) + 2b(a-b) + b^2$$
$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2$$
$$a^2 = (a-b)^2 + 2ab - b^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Vamos estabelecer a seguinte regra:

Exemplo:

- $(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
- $(5n+3)^2 = (5n)^2 - 2 \cdot 5n \cdot 3 + 3^2 = 25n^2 - 30n + 9$
- $\left(\frac{2}{9} - a\right)^2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot a + a^2 = \frac{4}{81} - \frac{4}{9}a + a^2$

Observação: A expressão $a^2 \pm 2ab + b^2$ também é conhecida como **trinômio quadrado perfeito**, ou simplesmente quadrado perfeito, devido ao fato de ser possível reduzi-la à forma $(a \pm b)^2$. Assim, expressões como $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ são quadrados perfeitos. Entretanto, nem todas as expressões com 3 termos (trinômio) é um quadrado perfeito. Como, por exemplo, a expressão $x^2 + 8x + 15$ é apenas um trinômio qualquer, porque não pode ser escrita na forma $(a \pm b)^2$.

Produto da soma e diferença de dois termos:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Assim: $(a+b)(a-b) = a^2 - b$

Exemplo:

- $(5a+1)(5a-1) = (5a)^2 - 1^2 = 25a^2 - 1$

- $\left(\frac{4}{3} - m^2\right)\left(\frac{4}{3} + m^2\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - (m^2)^2 = \frac{16}{9} - m^4$

Tem-se algumas curiosidades sobre esse produto notável que podem facilitar algumas multiplicações, como, por exemplo. Qual o produto $51 \cdot 49$?

Uma maneira alternativa de multiplicar, seria usando o produto da soma pela diferença. Veja:

$$51 \cdot 49 = (50+1) \cdot (50-1) = (50)^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$$

Cubo da soma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b +$$

$$2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Assim: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Exemplo:

- $(x+3)^3 = x^3 + 3\cdot x^2 \cdot 3 + 3\cdot x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
- $(4a+1)^3 = (4a)^3 + 3\cdot(4a)^2 \cdot 1 + 3\cdot 4a \cdot 1^2 + 1^3 =$

  $64a^3 + 3\cdot 16a^2 + 3\cdot 4a + 1 = 64a^3 + 48a^2 + 12a + 1$

Cubo da diferença: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(a+b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplo:

- $(x-5)^3 = x^3 - 3\cdot x^2 \cdot 5 + 3\cdot x \cdot 5^2 - 5^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$
- $(2a-3)^3 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2 \cdot 3 + 3\cdot 2a \cdot 3^2 - 3^3 = 8a^3 - 3\cdot 4a^2$

  $+ 3\cdot 18a - 27 = 8a^3 - 12a^2 + 54a - 27$

Fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão algébrica é transformá-la em um produto.

Existem vários casos de fatoração que devem ser utilizados de acordo com as características da expressão algébrica a ser fatorada.

1º Caso de fatoração: colocando um termo em evidência

Como o próprio título sugere, esse modo de fatorar é retirar o fator comum e colocá-lo em evidência. Veja o exemplo:

Exemplo:

- $3xy + 5xz$, veja que o termo comum aos dois monômios é o x. $x(3y + 5z)$, fazendo o produto, chega-se à expressão de origem.

- $3a^2 + 3ab = 3a(a + b)$

2º Caso de fatoração: agrupamento

Veja a expressão algébrica de quatro termos $ax + 2a + 5x + 10$. Não existe um fator comum aos quatro termos. Mas, agrupando-os de forma conveniente, podemos fazer sua fatoração aplicando duas vezes o 1º caso de fatoração. Veja:

$$ax + 2a + 5x + 10$$
$$a(x + 2) + 5(x + 2)$$
$$(a + 5)(x + 2)$$

Exemplo:

- $mn + 5m + 9n + 15 = m(n+5) + 3(n+5) = (m+3)(n+5)$
- $x^2 + xy + x + y = x(x+y) + x + y = x(x+y) + 1.(x+y) =$
  $(x+1)(x+y)$

3º Caso de fatoração: trinômio quadrado perfeito

No caso dos produtos notáveis, observou-se que o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos nos dão trinômios. Agora é fazer o caminho inverso:

$$x^2 + 10x + 25 =$$

Quadrado de x   quadrado de 5

o dobro de x e 5

Nessa combinação, podemos obter $(x+5)^2$

Exemplo:

a) $a^2 + 8a + 16 =$

$a^2 \longrightarrow a$

$16 \longrightarrow 4$

$8a \longrightarrow 2 \cdot 4 \cdot a$

Logo, $(a+4)^2$

4º Caso de fatoração: diferença de dois quadrados

É o caminho inverso do produto da soma pela diferença.

$x^2 - 64 =$

quadrado de x quadrado de 8, nessa situação, obtém-se o quadrado da soma pela diferença $(x+8)(x-8)$

Exemplo:

- $25x^2 - 81 = (5x+9)(5x-9)$
- $100 - a^2 = (10+a)(10-a)$

5º Caso de fatoração: soma de dois cubos

Observe o produto:

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 - \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} + \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} + y^3 = x^3 + y^3$$

Exemplo:

a) $125x^3 + 8 =$

$5x$ $\quad$ 2

$(5x+2)(25x^2 - 10x + 4)$

6º Caso de fatoração: diferença de dois cubos

O raciocínio é o mesmo do caso anterior.

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$$

Exemplo:

a) $x^3 - 64 =$

$x \qquad\qquad 4$

$(x-4)(x^2+4x+16)$

Exercício proposto

1º) Use as regras dos produtos notáveis para desenvolver as expressões:

a) $(m+7)^2$

b) $\left(5y+\dfrac{1}{2}\right)^2$

c) $(a+20)(a-20)$

d) $(5x+8)(5x-8)$

e) $(a-6)^2$

f) $(x-2b)^2$

g) $(x+2)^3$

h) $(a-4b)^3$

2º) Fatore as expressões abaixo:

a) $2x^2+4xy$

b) $a^2-a-ab+b$

c) $49x^2-14x+1$

e) $9x^2-64$

f) a^3+1000

g) $27a^3-8x^3y^4$

3º) Sendo $(x+y)^2-(x-y)^2=30$, então $2xy$ é igual a:

a) 0 b) $\dfrac{5}{2}$ c) 15 d) $\dfrac{5}{3}$ e) 36

Funções

Ao lermos um jornal ou uma revista, podemos observar gráficos, tabelas ou ilustrações. Estes instrumentos são muito utilizados nos meios de comunicação por serem mais chamativos, agradáveis e de fácil compreensão. Não é somente nos jornais e revistas que encontramos os gráficos, existem outras inúmeras situações do cotidiano que vemos essas representações que associam duas grandezas. Em matemática essa associação é chamada de função.

Quando vamos fazer uma simples compra de pães em uma padaria, relacionamos a quantidade que podemos comprar ao valor unitário do pão. Por exemplo, tenho 5 reais e o valor unitário do pão é de 50 centavos, posso comprar 10 pães.

Outras situações do nosso dia a dia que fazem relações entre grandezas são:

- Número de questões que acertei num teste com minha nota;
- Medidas de um contorno de um terreno;
- Cálculo de área;
- Velocidade de um automóvel com o tempo de duração de uma viagem.

Por certo, em algum momento já nos deparamos com algumas dessas situações, e não nos damos conta que por trás está a ideia de função.

Vamos colocar aqui quatro formas de representação de funções.

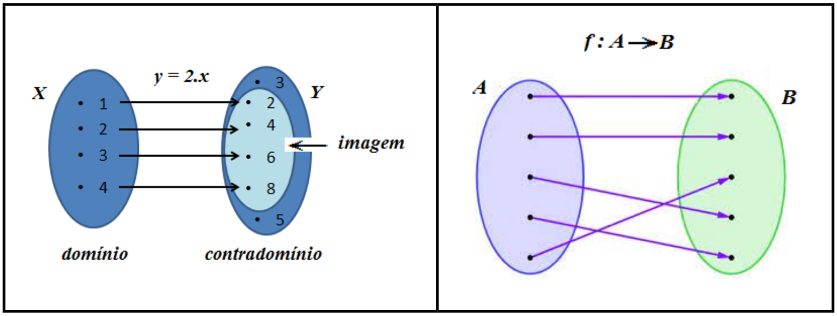
- Verbalmente (descrevendo-a com palavras);
- Numericamente (por meio de uma tabela de valores);
- Visualmente (através de um gráfico);
- Algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita).

Em matemática, utiliza-se das definições como alicerce para uma construção teórica. Com as funções não é diferente, então formalizamos as funções da seguinte forma:

Uma função $f : A \longrightarrow B$ consta de três partes, um conjunto A, chamado de domínio da função (conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado contradomínio da função (lugar onde a função toma valores) e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$ um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x.

Podemos visualizar a ideia de funções através de diagramas, como sugere os exemplos a seguir:

Figura 3 – Diagramas de flechas para funções



Fonte: Os autores

Nossos estudos se concentram nas funções que essencialmente têm uma fórmula matemática como regra de associação.

Fugindo um pouco da formalidade, podemos ilustrar uma função como uma máquina. Onde a entrada dessa máquina são os valores de x, dentro da máquina esses valores são processados e finalmente são expelidos como o valor $f(x)$.

Figura 4 – Ideia de função: valores de entrada, lei de formação e valores de saída

Fonte: Os autores

Por exemplo, uma máquina que dobre os números naturais, ou seja, uma função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, definida por $f(n)=2n$. Considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Tabela 1: Construção de pares ordenados

n	 $f(n)=2n$	$f(n)$
0	Processamento (dobrar o número)	0
1	Processamento (dobrar o número)	2
2	Processamento (dobrar o número)	4
3	Processamento (dobrar o número)	6
4	Processamento (dobrar o número)	8

Fonte: Os autores

Os valores de $f(n)$ são chamados de imagem da função. Observe que os valores de $f(n)=\{0,2,4,6,8,\ldots\}\subset\mathbb{N}$. Os valores de $f(n)$ estão contidos nos naturais. De forma geral, a imagem está contida no contradomínio.

É importante salientar a dependência e independência das variáveis, ou seja, o símbolo que representa um número arbitrário no domínio de uma função f é denominado uma **variável independente**. Um símbolo que representa um número na imagem de f é denominado uma **variável dependente**.

Gráfico de funções

A maneira mais comum de representar função é através de gráfico, se f for uma função com domínio D, então seu gráfico será o conjunto de pontos dos pares ordenados $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

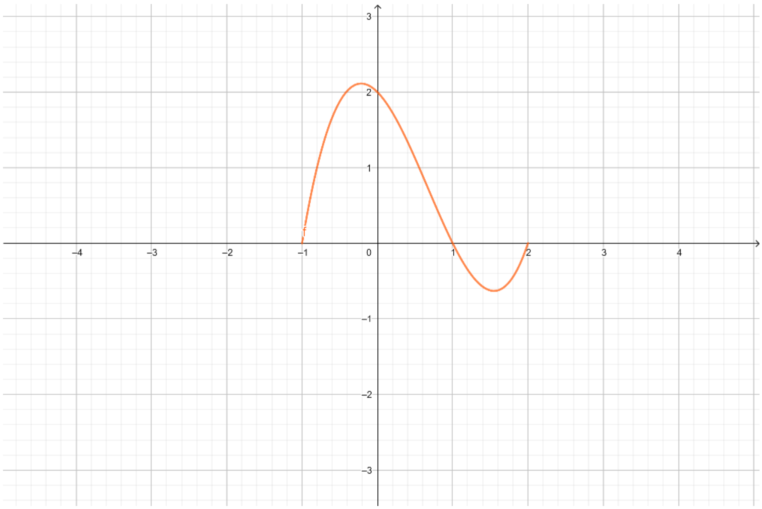
Para isso, vamos compreender o conceito de plano cartesiano. Desenvolvido pelo filósofo e matemático francês René Descartes, no século XVII, é um dos conceitos fundamentais da geometria analítica.

O plano cartesiano é um sistema de coordenadas usado para representar pontos, linhas, curvas e figuras geométricas no espaço bidimensional. Consiste em duas linhas perpendiculares que se cruzam em um ponto central, chamado origem. Essas linhas são conhecidas como eixos e são rotuladas como eixo x e eixo y. O eixo x é horizontal, estendendo-se para a direita e para a esquerda da origem, enquanto o eixo y é vertical, estendendo-se para cima e para baixo da origem.

Dessa forma, podemos representar as funções através dos gráficos de um plano cartesiano.

Exemplo: Observe o gráfico a seguir.

Figura 5 – Gráfico de função construído no Geogebra



Fonte: Os autores

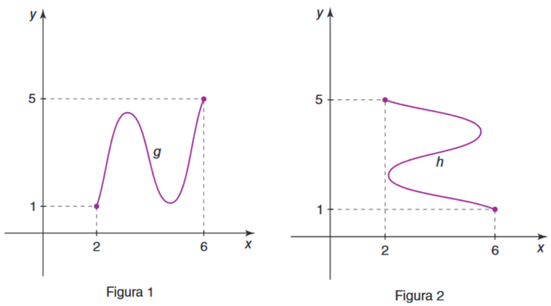
Encontre os valores de $f(0)$ e $f(1)$. Determine o domínio da função.

Solução: observando o gráfico, verifica-se que quando $x = 0$ (eixo horizontal), o valor de $f(x) = 2$ (eixo vertical), Portanto, $f(0) = 2$. De forma análoga, para $x = 1$, tem-se $f(x) = 1$, portanto $f(1) = 1$.

No que se trata do domínio, observa-se que o gráfico varia entre os pontos $x = -1$ e $x = 2$ (eixo horizontal). Portanto, o domínio é o intervalo fechado $[-1, 2]$.

Exemplo: Qual dos gráficos abaixo representa a função de $A = [2,6]$ em $B = [1,5]$?

Figura 6 – Representação de uma relação que é uma função (figura 1) e uma que não é função (figura 2)

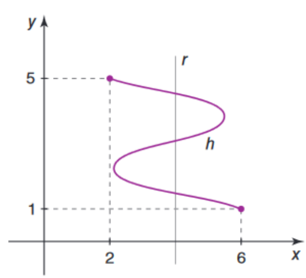


Fonte: Os autores

Solução: Na figura 1, qualquer ponto $x \in [2, 6]$ está associado a um único $f(x) \in [1, 5]$. Então, *g* é uma função de *A* em *B*. Podemos concluir, também, que é uma função, quando passamos qualquer reta paralela ao eixo 0y passando pelo gráfico de *g* intercepta-o em um único ponto.

Na figura 2, existe pelo menos um ponto $x \in [2, 6]$, tal que se associa a mais de um ponto $f(x) \in [1, 5]$. Então, *h* não é função. Podemos concluir, também, que não é função, quando traçamos uma reta paralela ao eixo 0y e intercepta o gráfico de *h* em mais de um ponto.

Figura 7 – Representação de uma relação que não é função



Fonte: Os autores

Exercícios

1º) Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças.

b) calcule o custo para 100 peças.

2º) Considere a função *f*, dada por: $f(x)=\begin{cases}4x,\ se\ 0\le x\le 1\\ x^2-7x+10\ se\ 1<x\le 6\\ -4x+28\ se\ 6<x\le 7\end{cases}$. Calcule:

a) $f\left(\frac{9}{4}\right)$

b) $f(1)-f(6)$

c) $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

3º) Escreva a função afim ***f(x) = ax + b***, sabendo que:

a) $f(1)=5$ e $f(-3)=-7$

b) $f(-1)=7$ e $f(2)=1$

c) $f(1)=5$ e $f(-2)=-4$

4º) Atribua valores à variável independente e, em seguida, esboce o gráfico da seguinte função: $f(x)=x^2-5x+6$.

5º) Pesquise um exemplo de função, cuja lei de formação seja comum na natureza.

Geometria

e Trigonometria

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

Neste capítulo iremos abordar conceitos de geometria e trigonometria que se apresentam como ferramentas fundamentais no estudo do Cálculo e da Álgebra Linear, entre outras componentes curriculares.

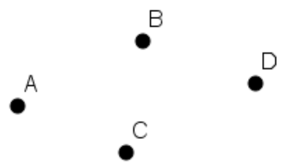
A geometria se mostra importante na abordagem vetorial, cálculo de áreas e na semelhança de figuras planas, enquanto a trigonometria auxilia em problemas que envolvem medidas onde podemos relacionar os lados e os ângulos.

Dessa forma, ao estudar os conteúdos deste tópico, os estudantes terão suas dificuldades mitigadas e assim, conseguir desenvolver as habilidades necessárias para ter uma boa formação.

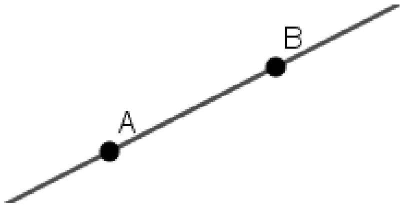
Conceitos Primitivos

Em geometria, existem alguns axiomas, da geometria Euclidiana, que formam toda sua base, que são chamados entes geométricos primitivos, ou seja, entidades sem demonstração. São eles: Ponto, Reta e Plano.

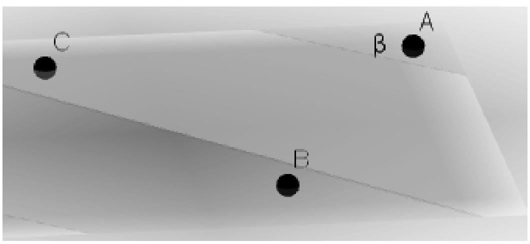
Ponto – é um elemento do espaço que define uma posição e geralmente se representa por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.



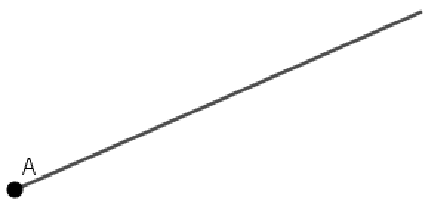
Reta – é um conjunto infinito de pontos, sendo determinada por 2 pontos ou por um ponto e uma inclinação da mesma. A reta é representada por letras minúsculas do nosso alfabeto e é infinita.



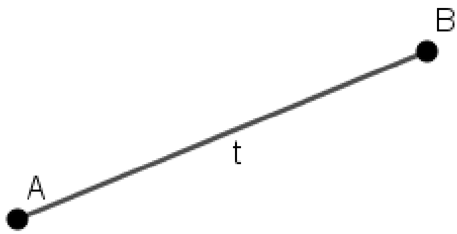
Plano – é um conjunto infinito de retas, sendo determinada por 3 pontos não colineares. O plano é representado por letras do alfabeto grego e é infinito.



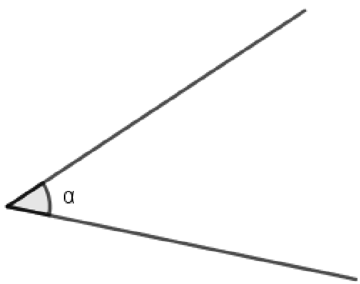
Semirreta – inicia num ponto e se estende indefinidamente.



Segmento de reta – inicia num ponto e termina num outro.



Ângulo – é a região formada pela união de 2 semirretas ou segmentos de retas.



Medidas de Ângulos – os ângulos podem ser medidos em graus (º), radianos (rad) ou grados (grad), sendo a correspondência entre elas da seguinte maneira:

$$180^o = \pi\, rad = 200\, grad$$

A medida em graus possui as seguintes subdivisões:

$1^o = 60' = 3600''$ (Graus em Minutos e em Segundos)

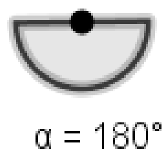
Exemplos:

a) $45^o = \frac{1}{4}\pi\, rad$, pois $45^o = \frac{180^o}{4}$ e $180^o = \pi\, rad$

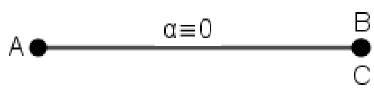
b) $35,26^o = 35^o 15' 36''$

Temos alguns ângulos que recebem nomes particulares, são eles:

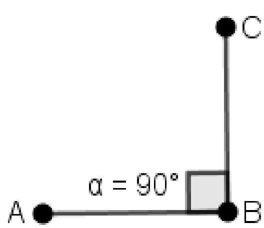
Raso – cuja medida vale 180º.



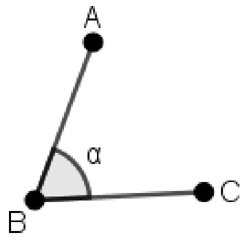
Nulo – cuja medida é igual a 0º.



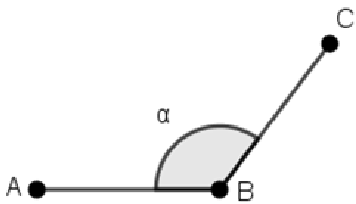
Reto – cuja medida vale 90º.



Agudo – cuja medida é maior que 0º e menor que 90º.



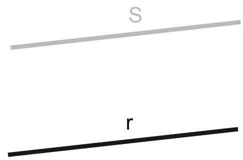
Obtuso – cuja medida é maior que 90º e menor que 180º.



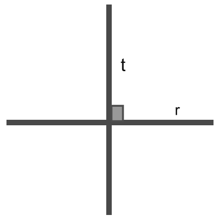
Vale ressaltar que, dados dois ângulos, cuja soma é 90º eles são chamados de *Complementares*, se a soma for 180º, *suplementares* e quando a soma vale 360º, eles são chamados de *Replementares*.

Posições Relativas entre duas retas

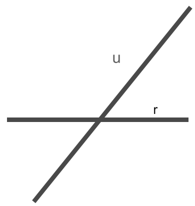
Retas Paralelas



Retas Concorrentes Perpendiculares



Retas Concorrentes Não Perpendiculares



Retas Coincidentes

Retas Reversas (não coplanares)

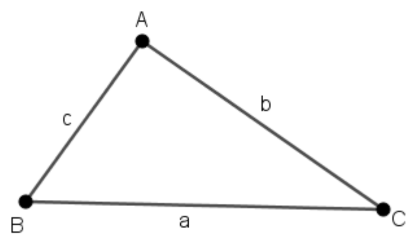
Figuras geométricas planas

Neste tópico, faremos uma breve revisão sobre as principais figuras planas, onde iremos destacar suas principais características tais como: elementos, área e propriedades. As figuras que serão abordadas são os triângulos, os quadriláteros e o círculo.

Para uma melhor compreensão, define-se a área como a medida total de uma superfície ou a região interna de um polígono, no caso, convexo.

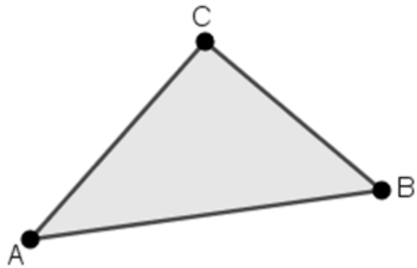
Triângulos

São figuras geométricas planas formadas por três pontos não alinhados, chamados vértices, unidos por semirretas que unem esses pontos. São classificados quanto aos seus lados e ângulos.

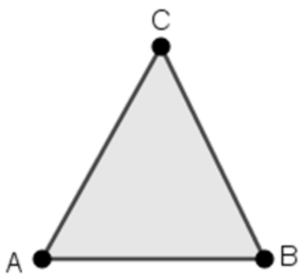


Classificação quanto aos lados

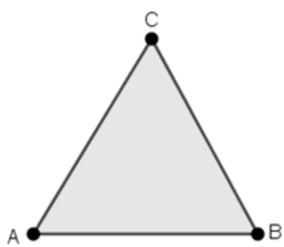
Escaleno – possui lados com medidas diferentes;



Isósceles – Possui dois lados e, consequentemente dois ângulos, iguais;

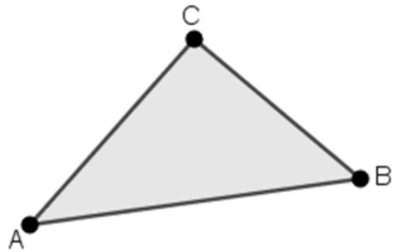


Equilátero – Possui os três lados e, consequentemente três ângulos, iguais.

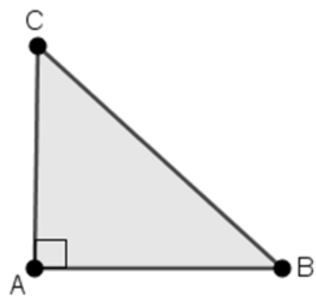


Classificação quanto aos Ângulos

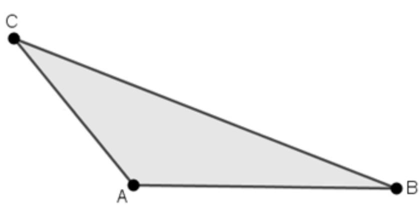
Acutângulo – possui os três ângulos internos agudos (menores que 90 graus cada);



Retângulo – possui um ângulo reto (90 graus). Na ilustração a seguir, o ângulo reto é o A;



Obtusângulo – possui um ângulo interno obtuso (maior que 90 graus). Na figura a seguir, o ângulo A.



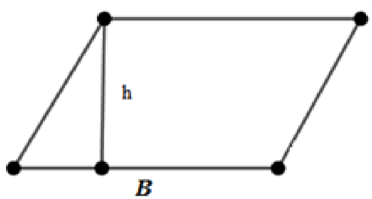
Propriedades

- A soma dos ângulos internos de todo e qualquer triângulo é igual a 180º.
- A soma dos ângulos externos de todo e qualquer triângulo é igual a 360º.
- Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos, não adjacentes a ele.
- O maior lado do triângulo se opõe ao maior ângulo assim como o menor lado ao menor ângulo.
- **Desigualdade Triangular**: Sejam a, b e c os lados de um triângulo, é sempre válida a desigualdade: $|a-b| \leq c \leq |a+b|$.

Quadriláteros

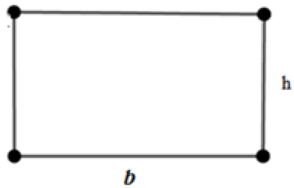
São polígonos de 4 lados ou de gênero 4. Uma das principais características desses polígonos é que a soma dos ângulos internos e externos é igual a 360º. A seguir, veremos os principais.

Paralelogramo – É o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e suas diagonais se cortam ao meio.



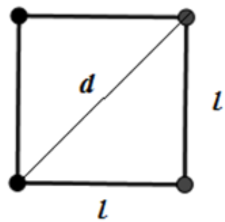
Sua área é dada por: $A = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h$.

Retângulo – É um paralelogramo que possui os quatro ângulos congruentes e as suas diagonais são congruentes.



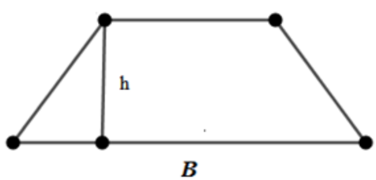
Sua área é dada por: $A = B \cdot h$.

Quadrado – É um paralelogramo que possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados iguais. Vale ressaltar que, as diagonais são congruentes e são bissetrizes dos ângulos de seus vértices (divide o ângulo ao meio) e cortam-se perpendicularmente (formando um ângulo de 90º).



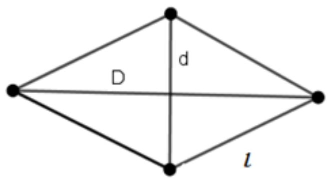
Sua área é dada por: $A = l^2$ e sua diagonal é $d = l \cdot \sqrt{2}$.

Trapézio – É um paralelogramo que possui um par de lados paralelos, chamados de bases. A soma dos seus ângulos internos mede 180º.



Sua área é dada por: $A = \frac{h}{2} \cdot (B + h)$. Onde B é a base maior e b é a base menor.

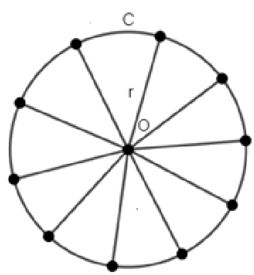
Losango – É um paralelogramo que possui os quatro lados iguais, suas diagonais são bissetrizes dos ângulos de seus vértices e cortam-se perpendicularmente.



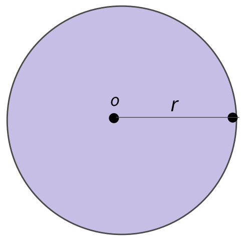
Sua área é dada por: $A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d$. Onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor.

Círculo

Para não confundir o leitor, é importante diferenciar circunferência e círculo. A circunferência é uma região do plano formada por pontos que são equidistantes (estão à mesma distância) de um ponto fixo (centro) da circunferência. Observa-se que a circunferência é apenas o contorno.



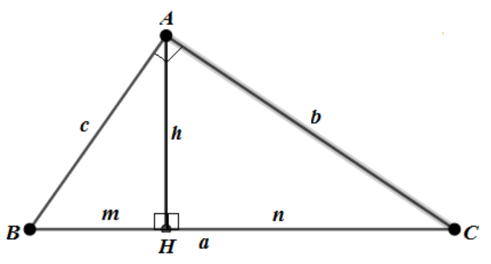
O círculo é a união de uma circunferência (contorno) com todos os pontos internos a ela. Seus principais elementos são o raio (r), que é a distância do centro à sua extremidade e o diâmetro (D), que é o dobro do raio.



Sua área é dada por: $A = \pi \cdot r^2$

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Considere o triângulo retângulo *ABC*, reto em *A*.



Onde ***a*** é a hipotenusa, ***b*** e ***c*** são os catetos, ***m*** e ***n*** são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e ***h*** é a altura. Através da semelhança entre os triângulos *ABC*, *ABH* e *AHC*, que é verificada através da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados obtém-se as seguintes relações:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{h}\Rightarrow a\cdot h=b\cdot c$$

$$\frac{h}{m}=\frac{n}{h}\Rightarrow h^2=m\cdot n$$

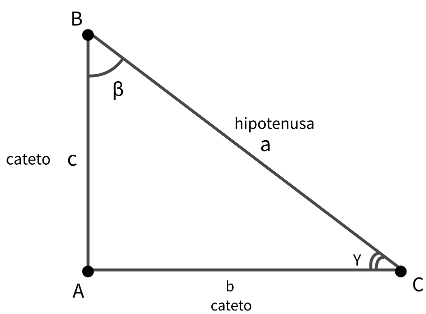
O principal resultado destas relações é o Teorema de Pitágoras, que é obtido através da soma, membro a membro, das equações a seguir:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{n}\Rightarrow b^2=a.n \text{ e } \frac{a}{c}=\frac{c}{m}\Rightarrow c^2=a.m$$

$\begin{cases} b^2=a.n \\ c^2=a.m \end{cases}\Rightarrow b^2+c^2=a.(m+n)$ tem-se por construção que a hipotenusa é igual à soma das projeções, ou seja, $a=m+n$ e, substituindo na expressão anterior, obtém-se $b^2+c^2=a.a$ ou $a^2=b^2+c^2$.

Razões Trigonométricas do Triângulo Retângulo

Observe o triângulo retângulo a seguir.



Note que o maior lado é a hipotenusa e os outros dois lados são os catetos. A hipotenusa é o lado que fica oposto ao ângulo reto (ângulo de 90º). Além do ângulo reto, há dois ângulos agudos, $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$. A trigonometria estabelece relações entre os ângulos agudos do triângulo retângulo e as medidas de seus lados. Tais relações são essas:

Seno (sen)

O seno de um ângulo agudo no triângulo retângulo é definido como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$Seno = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$$

Cosseno (cos)

O cosseno de um ângulo agudo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

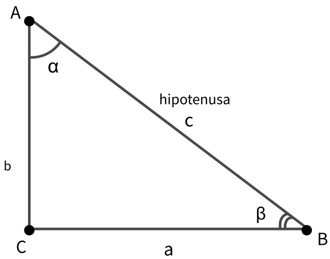
$$Cosseno = \frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$$

Tangente (tg)

A tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ou entre o seno e o cosseno do ângulo.

$$Tangente = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{Seno}{Cosseno}$$

Definidas as razões trigonométricas, obtemos as seguintes igualdades para o triângulo retângulo a seguir:



$$sen\alpha = \frac{a}{c} \qquad sen\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{b}{a}$$

Obs.: Representando por *x* um ângulo qualquer, vale a seguinte Identidade Trigonométrica Fundamental: $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

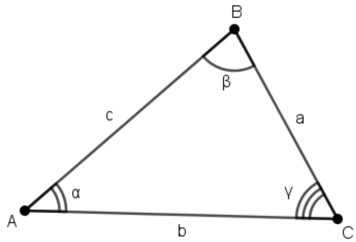
Razões trigonométricas dos ângulos de 0º, 30º, 45º, 60º e 90º

	30º	**45º**	**60º**	**0º**	**90º**
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	*não existe*

Razões Trigonométricas do Triângulo Qualquer

Lei dos Senos - em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

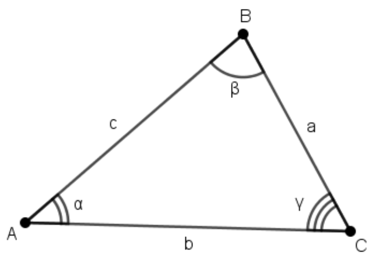
Essa lei permite estabelecer uma relação entre os lados e os ângulos opostos de um triângulo qualquer, através dos valores dos senos. É bastante utilizada para encontrar medidas de lados, dados dois ângulos e um lado ou ainda, para determinar ângulos, dados dois lados e um ângulo.



$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$

Lei dos Cossenos - Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

É uma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer, através dos valores dos cossenos. É utilizada para encontrar medidas de lados, dados os outros dois lados e o ângulo entre eles ou ainda, para determinar um ângulo, dados os lados do triângulo.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Exemplos de aplicação

1) Dado um triângulo retângulo cujos catetos medem 3cm e 4cm, calcule a hipotenusa, a altura, as projeções, a área e o perímetro.

Solução: Dados os catetos, é possível calcular a hipotenusa através do Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Assim, $a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5cm$

Para determinar a altura utilizamos a relação $a \cdot h = b \cdot c$ Substituindo os valores temos:

$$5 \cdot h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5} \Rightarrow h = 2{,}4cm$$

Através das relações $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$ encontramos as projeções assim:

$$b^2 = a.n \ \Rightarrow 3^2 = 5.n \Rightarrow n = \frac{9}{5} \Rightarrow n = 1{,}8cm$$

$$c^2 = a.m \Rightarrow 4^2 = 5.m \Rightarrow m = \frac{16}{5} \Rightarrow n = 3{,}2cm$$

Para determinar a área, por se tratar de um triângulo retângulo, entre outras maneiras podemos utilizar a seguinte expressão:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{12}{2} \Rightarrow A = 6cm^2$$

E, por fim, o perímetro, que é a soma dos lados vale:

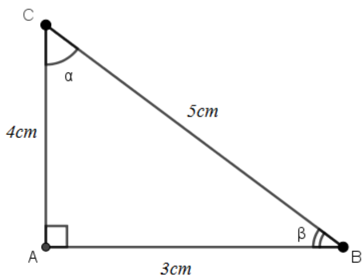
$$2p = a + b + c = 5 + 3 + 4 = 12cm$$

Obs.: Vale ressaltar que quando temos os lados de um triângulo, podemos calcular sua área através da Fórmula de Herão:

$A=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, onde a, b e c são os lados e $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

2) Com relação ao triângulo retângulo da questão anterior, calcule as razões trigonométricas dos ângulos agudos.

Solução: Para a resolução dessa questão vamos considerar o triângulo disposto da seguinte forma:



$$sen\alpha=\frac{3}{5} \qquad sen\beta=\frac{4}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5} \qquad \cos\beta=\frac{3}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{3}{4} \qquad tg\beta=\frac{4}{3}$$

Obs.: Uma maneira de verificar a veracidade da resolução é através da identidade trigonométrica fundamental que consiste no fato de $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Substituindo os valores temos que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{25}{25}=1$$

3) Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 20cm$ e $\hat{A} = 30^o$.

Solução: Como o problema nos dá um lado e o ângulo oposto a ele, então podemos usar a lei dos Senos: $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$ Como essa razão é constante podemos escrever assim:

$$\frac{a}{sen\alpha} = 2R \Rightarrow \frac{20}{sen30^o} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 40 = 2R$$

Donde encontramos $R = 20cm$.

4) Dois lados de um triângulo medem 4cm e 6cm e formam entre si um ângulo de 120º. Determine a medida do terceiro lado desse triângulo e calcule sua área.

Solução: Como temos dois lados e um ângulo entre eles, trata-se de uma aplicação direta da Lei dos Cossenos. Chamando os lados de *b* e *c*, respectivamente, temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$.

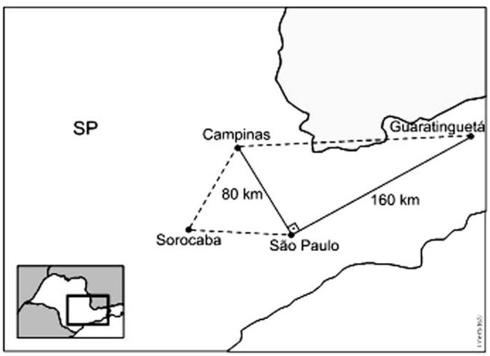
Substituindo os valores encontramos: $a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 12$

e realizando as operações vem: $a^2 = 16 + 36 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$ $16 + 36 + 24 = 76$.

Assim, $a^2 = 76 \Rightarrow a = \sqrt{76} \Rightarrow a = 2\sqrt{19}cm$.

Exercícios complementares

1º) (Unesp, 2013 – 1 fase) Um professor de geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80 km e 160 km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.



Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

a) $80 \cdot \sqrt{2 + 5 \cdot \sqrt{3}}$

b) $80 \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{3}}$

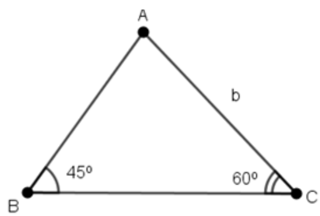
c) $80 \cdot \sqrt{6}$

d) $80 \cdot \sqrt{5 + 3 \cdot \sqrt{2}}$

e) $80 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3}}$

2º) Uma pessoa de 1,80m está observando o ponto mais alto de uma montanha, sob um ângulo de 30º com a linha do horizonte. Determine a altura da montanha, sabendo que ele está a uma distância de 600m em relação à sua base.

3º) Observe o triângulo a seguir e em função da medida ***b*** do lado AC, determine as medidas dos lados AB e BC.

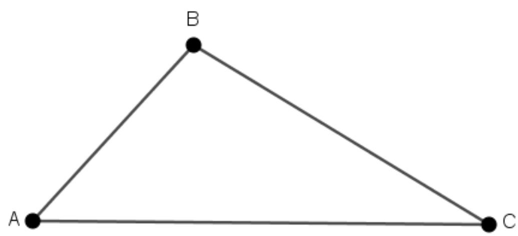


4º) No triângulo a seguir, determine a medida do segmento BC. Dados:

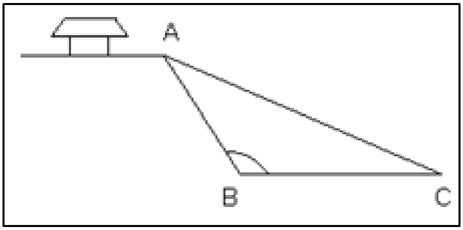
$\measuredangle ABC = 135^\circ$

$\measuredangle BCA = 15^\circ$

$\overline{AC} = 2 \cdot \sqrt{2}$



5º) (UEPA – 2017) A figura a seguir mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta, $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos à casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de A a B é de 6m, de B a C, 10m e o ângulo ABC mede 120º. Qual deve ser o valor do comprimento da rampa em metros?



Matrizes
e Determinantes

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

Os trabalhos envolvendo matrizes e determinantes iniciaram no século II a.C. Os babilônios estudaram problemas que tiveram como soluções sistemas lineares de duas variáveis. As contribuições para o desenvolvimento das matrizes vieram de Josefh Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, que atribuiu o nome de tableau (tabela), Arthur Cayley e James Joseph Sylvester, este último, em 1850, que colocou o nome matriz (local onde algo se gera ou cria).

A definição da função determinante é atribuída ao matemático alemão Gottfried Leibniz (1693), referente ao estudo sobre a solução de sistemas lineares, tal solução foi publicada em 1750, pelo matemático suíço Gabriel Cramer através da *Regra de Cramer.* O Teorema de Laplace, conforme o próprio nome indica, foi demonstrado pelo francês Pierre Simon Laplace. Vale ressaltar que um dos matemáticos que mais contribuiu na consolidação da teoria dos determinantes, foi o alemão Carl Gustav Jakob Jacobi, conhecido como “o grande alegorista”. Que para muitos, ele é o responsável pela forma simples e didática que o estudo é apresentado atualmente.[1]

----

[1] Texto baseado em BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo:Blücher, 1996.

Introdução e conceitos básicos

Definição: Uma matriz é uma representação de dados geralmente numéricos em forma de tabela com elementos dispostos em linhas e colunas.

Os elementos que constituem a matriz são denominados entradas. Uma matriz $m \times n$ (m por n), com m, n inteiros positivos, com $m \cdot n$ elementos.

Os elementos de uma matriz A podem ser: números reais ou complexos, funções, polinômios, vetores, etc. Aqui, vamos considerar apenas matrizes cujas entradas são números reais. Uma matriz será sempre representada por letra maiúscula e seus elementos serão agrupados entre colchetes ou parênteses. Veja alguns exemplos de representação de matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 9 \\ 0 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dimensão: é o par ordenado de números inteiros positivos (m,n) que descrevem a quantidade de linhas e a quantidade de colunas, respectivamente, $A_{m,n}$.

Quando $m = n$, diz-se que a matriz é quadrada.

A matriz A tem duas linhas e duas colunas, assim sua dimensão é 2×2, $A_{2,2}$. Na descrição de dimensão, o primeiro número se refere à quantidade de linhas e o segundo número à quantidade de colunas da matriz.

A matriz B tem uma linha e três colunas, $B_{1,3}$, a matriz C tem três linhas e três colunas, $C_{3,3}$.

Em geral, uma matriz qualquer pode ser escrita na forma $A_{m,n}(a_{ij})$ com i, $i = 1, \ldots, m$ e j, $j = 1, \ldots, n$, podendo ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{Ou} \quad A_{mn} = \{a_{ij}\}$$

As linhas e colunas de uma matriz são de especial importância, podem ser referidas como vetores linhas e vetores colunas respectivamente.

Tipos mais comuns de matrizes

Aqui serão apresentados alguns tipos de matrizes mais comuns.

Matriz quadrada: quando o número de linhas for igual ao número de colunas, ou seja $m = n$, então A_n ou A_m é uma matriz quadrada de dimensão m ou n.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular: é uma matriz quadrada A_n que tem nulos todos os elementos abaixo ou acima da diagonal principal.

Exemplo: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

A matriz A é triangular superior e a matriz B é triangular inferior.

Matriz diagonal: é uma matriz quadrada A_n em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja, todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade: é toda matriz diagonal, tal que, $a_{ii} = 1$; é representada por I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz transposta: Se $A_{m,n} = \{a_{ij}\}$ é uma matriz, então sua transposta é dada por: $A^t{}_{nm} = \{a_{ji}\}$, ou seja, as linhas viram colunas e as colunas viram linhas.

Exemplo: $A_{1,3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^t{}_{3,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Matriz simétrica: Seja A_n uma matriz quadrada de ordem n, se $A = A^t$, então A é uma matriz simétrica, ou seja, A é simétrica se, $\{a_{ij}\} = \{a_{ji}\} \forall (i, j)$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja $A = A^t$

Portanto, A é simétrica.

Matriz antissimétrica: $A_{n,n}$ é dita antissimétrica, se $A = -A^t$

ou seja $\begin{cases} 0, \; se \; i = j, \\ -a_{ji}, \; se \; i \neq j. \end{cases}$

Exemplo: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Matrizes iguais: Sejam $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ duas matrizes de mesma ordem, dizemos que $A = B$ se, $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\} \forall (i, j)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B$$

Posto de uma matriz: Posto, característica ou *rank* de uma matriz A é definido como sendo o número de linhas não nulas da matriz, quando escrita na forma escalonada por linhas.

Operações básicas com matrizes

Antes de iniciarmos as operações entre matrizes, é necessário relembrar as definições de igualdade entre elas e matriz nula.

Sejam $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ duas matrizes de mesma ordem, dizemos que $A = B$ se, $\{a_{ij}\} = \{b_{ij}\} \forall (i, j)$.

Uma Matriz é dita nula quando todos os seus elementos são iguais a zero, independentemente do número de linhas e colunas.

Podendo ser representada por $0_{m \times n}$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adição ou Soma

Seja $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ duas matrizes de mesma ordem, denomina-se adição da matriz A com a matriz B, e denota-se por $A + B$, a matriz $C = \left(c_{ij}\right)$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall \left(i, j\right)$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};\ A + B = C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Subtração ou diferença

Seja $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$ duas matrizes de mesma ordem, denomina-se subtração ou diferença entre matriz A e a matriz B, e denota-se por $A - B$, a matriz $C = \left(c_{ij}\right)$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $\forall \left(i, j\right)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix};\ A - B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};\ A + B = C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, então vale as seguintes propriedades:

- **Comutativa**: $A + B = B + A$
- **Associativa**: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Elemento neutro**: $A + \Phi = \Phi + A = A$, em que Φ é a matriz nula.
- **Simétrico ou oposto**: $A + B = \Phi$, em que Φ é a matriz nula. Sendo assim, tem-se que $B = -A$.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Seja $A = \{a_{ij}\}$, uma matriz qualquer e $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar), denomina-se produto de λ por A, a matriz $B = \{b_{ij}\}$, tais que $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Denotada por λA.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e o escalar $\lambda = 3$, então λA é igual a:

$$\lambda A = 3\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-1) & 3\times 7 \\ 3\times 3 & 3\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 21 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Sejam λ e α são constantes reais.

- $\lambda(\alpha A) = (\lambda\alpha)A$;
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- $(\lambda + \alpha)A = \lambda A + \alpha A$;
- $1A = A$.

Multiplicação de duas matrizes

Para que o produto entre duas matrizes seja possível, é necessário que o número de colunas da primeira matriz (A) seja igual ao número de linhas da segunda matriz (B). Sendo assim, sejam as matrizes $A_{m,n} = \{a_{ij}\}$ e $B_{n,p} = \{b_{jk}\}$, define-se produto de A por B como sendo a matriz $C_{m,p} = \{c_{ik}\}$, em que $c_{ik} = a_{j1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k}$ $+ \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

Obs.: A matriz resultante desse produto terá o número de linhas igual ao número de linhas da primeira matriz (A) e o número de colunas igual ao número de colunas da segunda matriz (B).

Regra: multiplicam-se as linhas da primeira matriz pelas colunas da segunda matriz. Este produto é realizado, multiplicando-se os elementos correspondentes da linha e da coluna e somam-se os resultados. Cada produto de linha por coluna fornece um único elemento para a matriz resultante.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$,

então $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

O elemento c_{11} é o resultado do produto da primeira linha da primeira matriz pela primeira coluna da segunda matriz;

O elemento c_{12} é o resultado do produto da primeira linha da primeira matriz pela segunda coluna da segunda matriz;

O elemento c_{13} é o resultado do produto da primeira linha da primeira matriz pela terceira coluna da segunda matriz;

O elemento c_{21} é o resultado do produto da segunda linha da primeira matriz pela primeira coluna da segunda matriz;

O elemento c_{22} é o resultado do produto da segunda linha da primeira matriz pela segunda coluna da segunda matriz;

O elemento c_{23} é o resultado do produto da segunda linha da primeira matriz pela terceira coluna da segunda matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3\times 2+1\times 5 & 3\times 3+1\times 4 & 3\times 1+1\times 2 \\ 4\times 2+2\times 5 & 4\times 3+2\times 4 & 4\times 1+2\times 2 \\ 5\times 2+1\times 5 & 5\times 3+1\times 4 & 5\times 1+1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 5 \\ 18 & 20 & 8 \\ 15 & 19 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Sejam A, B e C matrizes, tais que o produto entre elas esteja definido, então as seguintes propriedades são válidas.

- **Associativa**: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- **Distributiva em relação à soma**: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- **Elemento neutro**: $I \cdot A = A \cdot I = A$; I é a matriz identidade; $(k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B) = k \cdot (A \cdot B)$, $k \in \mathbb{R}$.

Obs.: Em geral a multiplicação de matrizes não obedece a propriedade comutativa, pois $A \cdot B$, pode ser diferente de $B \cdot A$.

Potência de matriz quadrada

Seja A_n uma matriz quadrada de ordem n e k um número inteiro positivo, a k-ésima potência de A é $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots A$ (multiplica-se A k vezes).

Definição: Dada uma matriz A_n quadrada de ordem n, em relação a sua segunda potência, ela pode ser:

- **Idempotente**: Se $A \cdot A = A^2 = A$;

Exemplo: $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- **Nilpotente**: Se $A \cdot A = A^2 = \Phi$, em que Φ é a matriz nula;

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 14 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

- **Unipotente**: Se $A \cdot A = A^2 = I$ em que I é a matriz identidade.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercícios

1º) Uma matriz quadrada A de ordem 5 possui lei de formação igual a $a_{ij} = 2i - j^2$. Determine soma dos termos da diagonal principal.

2º) Uma matriz quadrada A de ordem 2 possui lei de formação igual a $a_{ij} = 2i + j - 5$. Determine a matriz A.

3º) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2y-1 \\ 3x-4 & 3 \end{pmatrix}$. Sabendo que A e B são iguais. Determine o valor de $x + y$.

4º) Construir a matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 3, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & se\ i < j \\ i + j & se\ i > j \\ 2i - j^2 & se\ i = j \end{cases}.$$

5º) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determine AB e BA.

6º) Considere a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular $A + A^t$ e verifique se esse resultado é uma matriz simétrica.

b) Calcular $A - A^t$ e verifique se esse resultado é uma matriz antissimétrica.

Determinantes

Definição: É uma função matricial que associa cada matriz quadrada a um número real de forma única, ou seja, é uma função que transforma uma matriz quadrada em um número real. $f : A_n \to \mathbb{R}$.

Neste caso, a função $f : A_n \to \mathbb{R}$, será denotada por $\det A_n \to \mathbb{R}$ e definida por $\det A_n = |A_n| \to \mathbb{R}$. Vale ressaltar que existem casos que nos permite formas alternativas para determinar o valor do determinante sem fazer uso da definição.

Obs.: Para efetuar o cálculo do determinante é necessário considerar a ordem da matriz. Para cada ordem, existem maneiras distintas para encontrar o valor do determinante.

Cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 1

Seja A uma matriz quadrada de ordem 1, denotada por $A = (a_{11})$. Por definição, o determinante de A, ou seja, $\det A = |A| = a_{11}$ é o próprio elemento.

Exemplo: Se $A = (5)$, então $\det A = |A| = 5$

Cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2, o cálculo de seu determinante é efetuado realizando o *produto da diagonal principal menos o produto da diaginal secundária.*

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, define-se seu determinante assim:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 10 - 5 \times 8 = 20 - 40 = -20$$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, define-se o determinante de A como sendo: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 10 - 5 \times 8 = 20 - 40 = -20$, portanto o $\det A = -20$

Obs.: Alguns cuidados devem ser tomados para que não haja confusão entre as notações determinantes e matrizes.

É incorreto escrever $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = -20$, pois não é a matriz igual a -20 e sim o $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -20$

Quando nos referimos a matrizes de ordem n, fica entendido que a matriz é quadrada cuja ordem é o valor de n.

Cálculo de determinantes de ordem 3

É o que corresponde à matriz de ordem 3.

Para encontrar o valor do determinante dessa ordem existem várias maneiras, aqui vamos apresentar apenas a regra de *Sarrus* que têm os seguintes procedimentos:

- Repetem-se as duas primeiras colunas à direita do quadro de determinantes onde estão os elementos da matriz quadrada A de terceira ordem;
- Multiplica-se os três elementos da diagonal principal, bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, conservando o sinal de cada parcela;
- Multiplica-se os três elementos da diagonal secundária, bem como os três elementos de cada paralela a essa diagonal, faz-se preceder cada produto com o sinal de menos $(-)$, assim:

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, seu determinante é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \Bigg| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{3}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo: Seja a matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ cujo cálculo de seu determinante é:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=3\times 0\times(-3)+1\times(-2)\times(-1)+5\times 2\times 4-5\times 0\times$$

$$(-1)-3\times(-2)\times 4-1\times 2\times(-3)=$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0+2+40+0+24+6=72.$$ Portanto, $\det A=72$.

Propriedades:

Serão apresentadas algumas das principais propriedades do determinante.

Dadas as matrizes A_n e B_n e o escalar k.

- Se A_n possui uma linha ou uma coluna de zeros, então o $\det A=0$;
- Se A_n é uma matriz diagonal ou triangular, então seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal, ou seja, $\det A=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$;
- Se A_n possui uma linha ou uma coluna sendo uma combinação linear das outras, então o $\det A=0$;
- Se A_n possui duas linhas ou duas colunas proporcionais, então $\det A=0$;

- $\det(kA) = k^n \det A$;
- $\det(AB) = \det A \times \det B$;
- $\det A = \det A^t$.

Cálculo de determinantes para ordem superior a três cofator (Teorema de Laplace)

Para calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem n menor ou igual a 3 $(n \leq 3)$ existem algumas regras práticas já vistas anteriormente.

Quando a ordem da matriz é superior a 3 $(n > 3)$, tais regras não são aplicáveis. Por isso veremos o teorema de Laplace que utilizando o conceito do cofator para calcular os determinantes de ordem maiores que 3.

Teorema de Laplace: Seja A uma matriz quadrada, o determinante de A, ou seja, $\det(A)$ é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Definição: Considere uma matriz quadrada A de ordem n, seja a_{ij} um elemento de A. Define-se complemento algébrico do elemento a_{ij} (cofator de a_{ij}) e indicado por A_{ij} como sendo o número $(-1)^{i+j} \times D_{ij}$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ cujo seu determinante é calculado da seguinte forma: $\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$.

Isto é, o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ é soma dos produtos dos elementos da primeira coluna pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo: Considere a matriz quadrada $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 7\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 3 & -4 & 5 & 1\\ 1 & 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$

De acordo com o teorema de Laplace, devemos escolher uma fila (linha ou coluna) para calcular o determinante. Vamos utilizar a primeira coluna:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

$$A_{i1} = (-1)^{i+1} \times D_{i1}$$

Agora vamos calcular os $D_{i1} : i = 1, \cdots, 4$

Os determinantes de terceira ordem serão calculados usando a regra de *Sarrus* visto anteriormente.

$A_{11} = (-1)^{1+1} D_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ -4 & 5 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix} = 1\times[5+8-2-8] = 1\times 3 = 3$, portanto, $A_{11} = 3$

$A_{21} = 0 \times D_{21} = 0$. Portanto, $A_{21} = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1} D_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix}3 & 1 & 7\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix} = 1\times[-6+14+6-1] = 1\times 13 = 13,$

portanto, $A_{31} = 13$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} D_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times [6 - 4 - 35 + 56 - 15 + 1] = -1 \times 9 = -9,$$

portanto, $A_{41} = -9$

Sendo assim, pelo teorema de Laplace, o determinante da matriz A é dado pela seguinte expressão:

$$\det A = (-2) \times A_{11} + 0 \times A_{21} + 3 \times A_{31} + 1 \times A_{41}$$
$$\det A = (-2) \times 3 + 0 \times A_{21} + 3 \times 13 + 1 \times (-9)$$
$$\det A = -6 + 39 - 9 = 24$$

Portanto, $\det A = 24$

Obs.: Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada A_n admita inversa é que seu $\det A \neq 0$.

Uma das grandes aplicações dos determinantes é nas inversões de matrizes que veremos a seguir.

Inversão de matrizes

Dada uma matriz quadrada A_n de ordem n. Diz-se que A_n admite inversa se existir uma matriz quadrada B_n de mesma ordem, que satisfaça a condição: $AB = BA = I$, diz-se nesse caso que B é inversa de A e se denota por A^{-1}, ou seja $B = A^{-1}$.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Quando uma matriz quadrada A admite inversa, diz-se que A é *inversível* ou *não-singular.*

Exemplo: Dada as matrizes $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ A é inversa de B ou (B é inversa de A).

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 8-5\times 3 & 2\times 5-5\times 2 \\ -3\times 8+8\times 3 & -3\times 5+8\times 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\times 8-5\times 3 & 2\times 5-5\times 2 \\ -3\times 8+8\times 3 & -3\times 5+8\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Portanto, $B = A^{-1}$

Matriz singular: É a matriz quadrada de ordem n cujo determinante é nulo, ou seja, $\det A = 0$. Consequentemente não admite inversa.

Uma matriz quadrada $A=[a_{ij}]_{nxn}$ é dita não-singular ou invertível, se existe uma matriz $B=[b_{ij}]_{nxn}$ tal que: $A.B = B.A = I_n$ onde I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada de inversa de A.

Propriedades da matriz inversa

- $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$;
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}, k \in \mathbb{R}^*$;
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- $I^{-1} = I$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Obs.: Uma maneira prática para determinar a inversa de matrizes de ordem 2 (**somente de ordem** 2) é a seguinte:

permuta-se os dois elementos da diagonal principal, troca-se o sinal dos dois elementos da diagonal secundária e depois divide todos os elementos da matriz pelo valor do determinante.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, a inversa de A será obtida da seguinte forma:

Permutando os dois elementos da diagonal principal $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

trocando o sinal dos elementos da diagonal secundária $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$,

dividindo cada entrada da matriz pelo valor do determinante de

A, $\det A = 28 - 18 = 10$, assim temos $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$

Obs: A existência ou não de matriz inversa se dá por meio do determinante, se $\det A \neq 0$, então a matriz A tem inversa. Sua determinação quando existir será apresentada a seguir. Vamos apresentar a obtenção da matriz inversa a partir da solução de sistemas lineares, (método bastante trabalhoso para matrizes de ordem maiores que 2). Existem outros métodos de inversão de matrizes, mas que também são bastante trabalhosos. Em muitos casos as noções teóricas de matrizes inversas são mais importantes que sua própria determinação prática.

Vamos apresentar aqui outra forma de determinar uma matriz inversa, quando ela existe. Por conveniência iremos apresentar uma matriz de ordem 2, para matrizes de ordem maiores o processo é análogo (apenas mais trabalhoso).

Exemplo: Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ cujo determinante $\det A=-1$, logo A admite inversa.

Considere a matriz $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como sendo a inversa de A, então por definição tem-se que $AB=I$, ou seja $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, realizando a multiplicação de matrizes, tem-se que $\begin{pmatrix} 5a+8c & 5b+8d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, agora fazendo igualdade de matrizes temos: $\begin{cases} 5a+8c=1 \\ 2a+3c=0 \end{cases}$ sistema cuja solução é $a=-3,\ c=2$

$\begin{cases} 5b+8d=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases}$ sistema cuja solução é $b=8,\ d=-5$

Substituindo os valores de a,b,c e d na matriz B, tem-se

$B=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, portanto, $B=A^{-1}$, pois $AB=I$, $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De modo geral, para determinar a matriz inversa pode-se aplicar o **método de inversão por matriz adjunta**. É um método simples, pois não recaem em n sistemas de n equações. A utilização desse método depende do teorema: $M^{-1}=\dfrac{1}{\det(M)}\cdot\overline{M}$

M^{-1} é a inversa da matriz M;
$\det(M)$ é o determinante da matriz M;
$\overline{M}$ é a matriz adjunta de M.

Definição: uma **matriz adjunta** de uma matriz quadrada é a transposta de sua matriz dos cofatores.

Exercícios

1º) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine $AB^t - A^{-1}B$.

2º) Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} x-4 & 15 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Sabendo que $\det B = 15$, determine o valor de x.

3º) Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & -9 & 8 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $\det A$, $\det B$, $\det C$;

b) Verifique se $\det C = \det C^t$;

c) Determine A^{-1}, B^{-1}, C^{-1};

d) Determine $\det A^{-1}$, $\det B^{-1}$, $\det C^{-1}$ e compare os resultados com os da letra a).

e) Se permutarmos a primeira linha com segunda em A, B e C. O que acontece com $\det A$, $\det B$, $\det C$?

4º) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Verifique se A é uma matriz ortogonal, ou seja, verifique se $A^t = A^{-1}$.

5º) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & -7 \\ -3 & 8 & -6 & 9 \\ 5 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ cujo $\det A = 0$. Dê uma justificativa para este resultado.

Sistemas Lineares

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim, acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).[2]

Equações Lineares

Uma equação linear é toda equação que pode ser escrita na forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = \mathrm{b}$. Em que $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$, são as incógnitas (variáveis) $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, são os coeficientes (constantes reais) b é o termo independente (constante reais), em muitos casos as incógnitas x_1, x_2, x_3 são escritas como x, y, z.

[2] Texto baseado em EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 2011.

Exemplo 1:

- $2x - y = 1$; em que as incógnitas são x e y, os coeficientes numéricos são 2 e -1, o termo independente é 1.

- $3x + y - 4z = 18$; as incógnitas são x, y e z, os coeficientes numéricos são $3, 1, -4$ e o termo independente é 18.

- $5x - 2y = 6$; as incógnitas são x e y, os coeficientes numéricos são $5, -2$ e o termo independente é 6.

As equações lineares variam quanto ao tipo, que depende do número de variáveis.

Exemplo 2:

- Equação com uma variável: $5x = 1 - x$;
- Equações com duas variáveis: $-x + y = 7$;
- Equações com três variáveis: $4x + 5y - 7z = 9$.

Os valores numéricos atribuídos às incógnitas que transformam a equação linear em uma igualdade, ou seja, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores se existirem são chamados **raízes** da equação linear.

Exemplo 3:

- A equação $2x + y = 10$, admite entre outras as raízes $x = 3$ e $y = 4$.

Sistema de Equações Lineares

Chamamos sistema de equações lineares $m \times n$ ao conjunto S com m equações lineares em n incógnitas, escrito da seguinte forma:

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n=b_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Onde a_{ij}, b_k são constantes reais, para $j=1,\cdots,n$ e $i,k=1,\ldots,m$.
Escrevendo o sistema (1) na forma matricial, ficará:

$$AX=B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dessa forma temos que:

- A é a matriz do sistema linear;
- X é o vetor solução do sistema, se existir;
- B é o vetor com os termos independentes.

Obs.: Vale lembrar que os vetores B e X são matrizes colunas.

Exemplo 4: Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x-y-z=3 \\ x+y-z=6 \end{cases} \qquad (2)$$

Sua representação na forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solução de um sistema de equações lineares.

Dizemos que $X = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n)$ é solução de um sistema linear.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Quando X é solução de cada equação do sistema linear.

Exemplo 5: Considere o sistema (**2**), nele observe que $X = (1,\ 3, -2)$ é uma solução do sistema, pois X satisfaz todas as equações ao mesmo tempo.

$$\begin{cases} 1 + 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 1 \\ 4 \times 1 - 3 - (-2) = 3 \\ 1 + 3 - (-2) = 6 \end{cases}$$

Quanto a solução de um sistema de equações lineares podem ser classificados em:

Possível ou Compatível: É o sistema de equações lineares que possui solução. Os sistemas Possíveis ou Compatíveis podem ser classificados em:

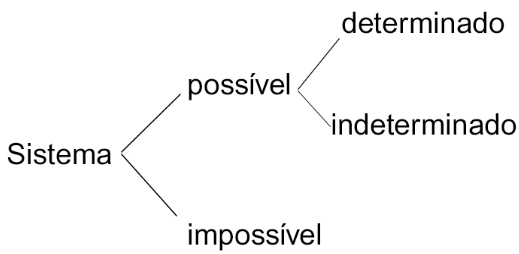
Determinados: Se possui uma única solução;

Indeterminados: Se possuem infinitas soluções;

Impossível ou Incompatível: É o sistema de equações lineares que não possui solução.

Resumidamente, temos:

Figura 8 – Classificação de um Sistema de Equações



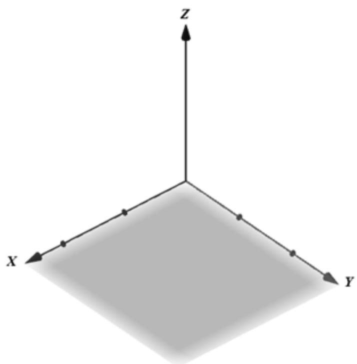
Fonte: Os autores

Plano Tridimensional: Ponto, Reta e Plano no espaço

Anteriormente foram abordados conceitos referentes aos axiomas da geometria plana, que são eles: ponto, reta e plano. Para facilitar o entendimento bem como a visualização da solução de um sistema linear, é fundamental o conhecimento sobre reta e plano no espaço, ou seja, tridimensional, tais conceitos serão expostos a seguir.

Primeiramente, considere um ponto O do espaço, chamado origem e três segmentos de reta unitários (tamanho igual a unidade) e ortogonais entre si (formando ângulo reto): *OA*, *OB* e *OC*, formando assim um triedo. Denota-se por *OX*, *OY* e *OZ* as retas que contêm os segmentos de retas formados por *OA*, *OB* e *OC*, tendo assim, o plano tridimensional.

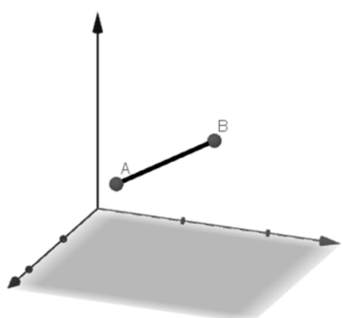
Figura 9 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra



Fonte: Os autores

Um ponto no espaço é representado por 3 coordenadas e possui a seguinte notação *P(x,y,z)*. E, de maneira análoga aos conceitos de ponto, reta e plano no plano, pode-se definir para o espaço, com a diferença que aparecerá uma coordenada a mais. A seguir, observa-se alguns exemplos de ponto, reta e plano no espaço.

Figura 10 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando um segmento de reta



Fonte: Os autores

É possível observar os pontos A e B, que determinam uma reta que passa por AB e contém esse segmento. Em cinza, está destacado um plano do triedo. Essas definições serão bastante úteis para compreender a interpretação geométrica da solução de sistemas de equações com 3 variáveis, que será apresentada a seguir.

Interpretação geométrica da solução de um sistema de 3 variáveis: Posição relativa entre os três planos.

Existem 8 possibilidades de posições relativas para os três planos do sistema linear (**3**) e todas elas estão relacionadas com o conjunto solução **S** do referido sistema.

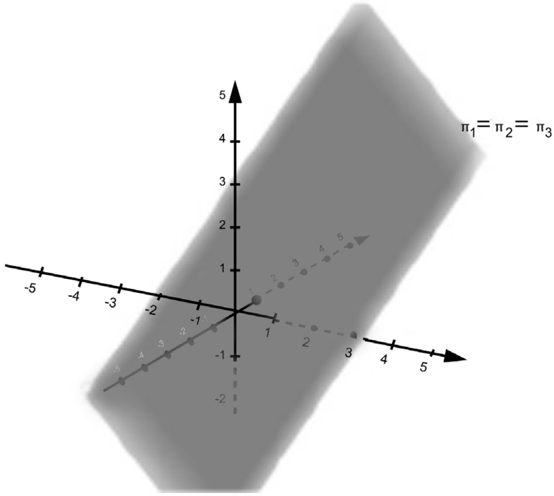
Sejam π_1, π_2, π_3 os planos definidos respectivamente pelas equações (1), (2) e (3) do sistema linear:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

As posições relativas entre elas são:

Os três planos são paralelos coincidentes: Nesta situação, cada ponto $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_1$, $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_2$ e $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_3$ é solução do sistema linear, nesta condição o sistema é **Possível Indeterminado**, ou seja, apresenta infinitas soluções.

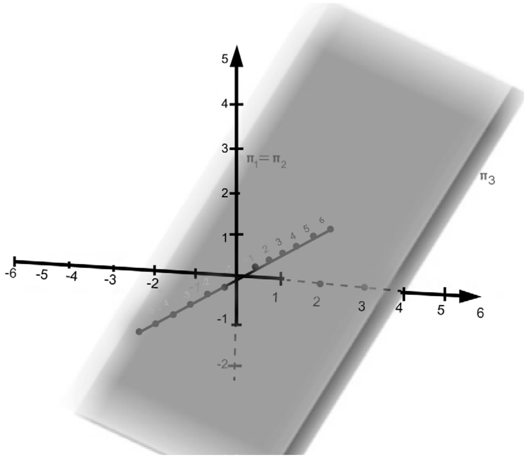
Figura 11 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando planos coincidentes



Fonte: Os autores

Dois planos são coincidentes e o terceiro é paralelo e distintos a eles: Neste caso o ponto $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_1, \pi_2$ mas $P\ (x_1, x_2, x_3) \notin \pi_3$. Nesta condição o sistema linear é impossível, ou seja, não tem solução S = ∅.

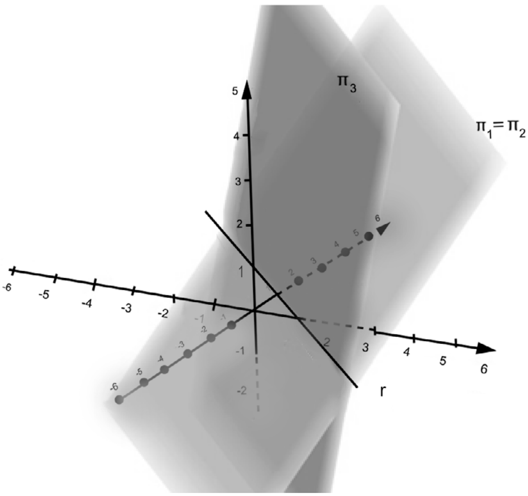
Figura 12 – Espaço tridimensional construído no Geogebra mostrando planos paralelos



Fonte: Os autores

Dois planos são coincidentes e o terceiro os intercepta por uma reta r: Nessa situação, todos os pontos $P\ (x_1, x_2, x_3) \in r$, tem-se que, $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_1, \pi_2, \pi_3$, e os pontos $P\ (x_1, x_2, x_3) \in r$ são soluções do sistema linear. Assim, o sistema linear é **Possível e Indeterminado**, ou seja, têm infinitas soluções.

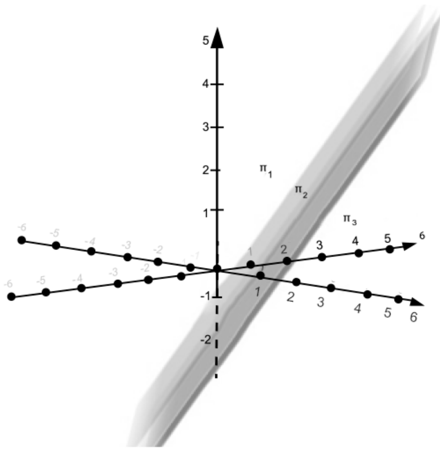
Figura 13 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando 2 planos coincidentes e um interceptando ambos



Fonte: Os autores

Os três planos são paralelos e distintos: Nesta situação, cada ponto $P\ (x_1, x_2, x_3) \in \pi_1$, tem-se que $P\ (x_1, x_2, x_3) \notin \pi_2, \pi_3$ e, portanto, sistema linear nesta condição é **Impossível**, ou seja, não tem **solução**, S = ∅.

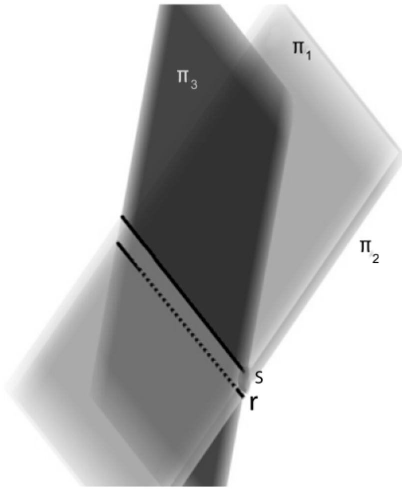
Figura 14 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando 3 planos paralelos e distintos



Fonte: Os autores

Dois planos são paralelos distintos e o terceiro os intercepta por meio de duas retas paralelas: Nesta situação temos que π_1 e π_2 são paralelos distintos, então $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$. Daí já podemos concluir que o sistema é **Impossível**, ou seja, não tem solução, **solução**, $S = \varnothing$.

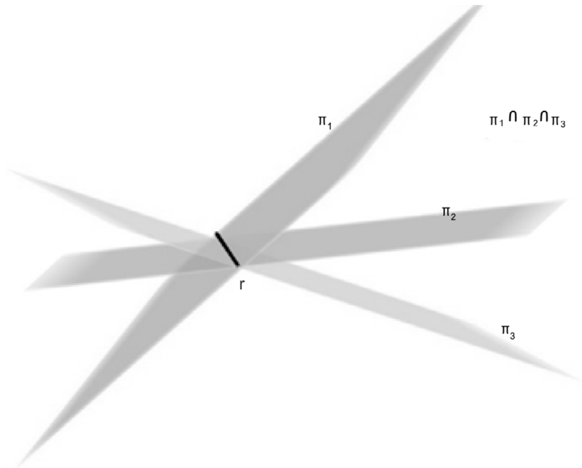
Figura 15 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando 2 planos paralelos e um interceptando ambos



Fonte: Os autores

Os três planos são distintos e possuem uma reta em comum: Se os trêsplanos π_1, π_2, π_3 possuem uma reta r em comum, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ então essa reta r é a solução do sistema proposto. Nesta condição, cada ponto $P(x_1,\ x_2,\ x_3) \in r$ é uma solução do sistema. Assim, o referido sistema é **Possível Indeterminado**, ou seja, possui infinitas soluções.

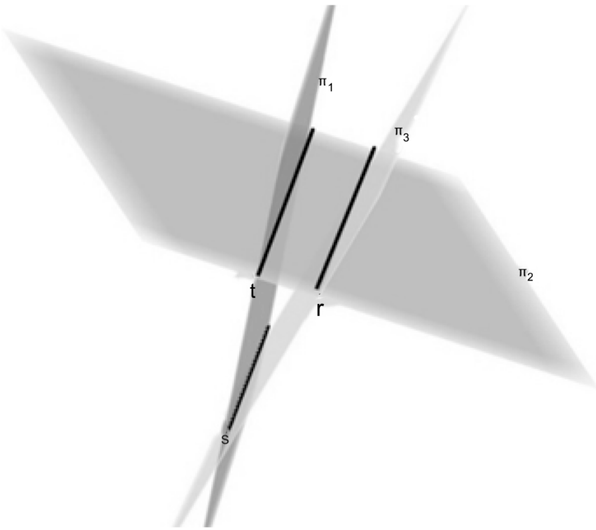
Figura 16 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando 3 planos distintos



Fonte: Os autores

Os três planos se interceptam dois a dois: Neste caso, temos que $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = t$, como as retas r, s, t são paralelas distintas, ou seja, $r \cap s \cap t = \varnothing$. O sistema é **Impossível**, ou seja, **não** tem solução.

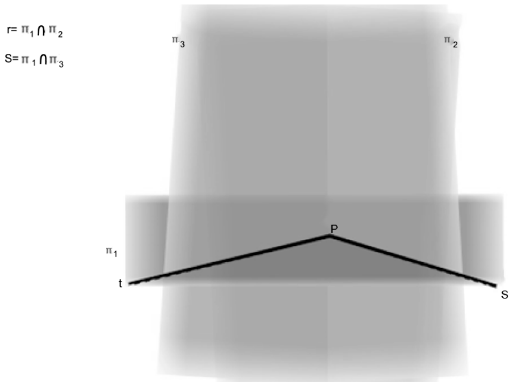
Figura 17 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando 3 planos que se interceptam dois a dois



Fonte: Os autores

Os três planos têm um único ponto em comum: Neste caso, temos que existe um único ponto $P(x_1,\ x_2,\ x_3)$ tal que $P(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, com isso temos que $P(x_1,\ x_2,\ x_3)$ é a única solução do sistema. Dessa forma, o sistema linear é **Possível Determinado**, tem solução única $S = P(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

Figura 18 – Espaço Tridimensional construído no Geogebra mostrando a intersecção entre 3 planos



Fonte: Os autores

Resolução de Sistemas Lineares por Escalonamento

Escalonamento é um método para resolver e discutir sistemas lineares de quaisquer ordens. Considere um sistema $m \times n$, diz-se que ele está na sua forma escalonada se a matriz dos coeficientes tiver em cada uma de suas linhas o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte.

O processo para escalonar um sistema linear é aplicar operações elementares sobre suas linhas. Para transformar um sistema linear não escalonado num sistema equivalente escalonado podemos seguir os seguintes passos:

- Podemos trocar posições das equações;
- Podemos multiplicar todos os coeficientes de uma equação por $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- Podemos multiplicar todos os coeficientes de uma equação pelo mesmo número $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e somar o resultado aos membros correspondentes da outra equação.

Obs.: Ao escalonar um sistema de equações se obtivermos uma equação com todos os coeficientes nulos e o termo independente diferente de zero, este resultado é suficiente para afirmarmos que o sistema é Impossível, ou seja, não possui solução real.

Quando se escalona um sistema, este sistema e a sua versão escalonada possuem as mesmas soluções.

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21 \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -8 \end{cases}$$

Para que o sistema fique na sua forma escalonada é necessário:

- Zerar o primeiro termo da segunda equação;
- Zerar o primeiro e o segundo termos na terceira equação;
- Que é equivalente a zerar todos os elementos abaixo ou acima da diagonal principal.

Vamos escrever o sistema na sua forma matricial.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 2 & 7 & 1 & \vdots & 21 \\ -3 & -5 & 2 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

Essa forma de escrever a matriz do sistema é chamada de matriz estendida, pois ela contém os coeficientes das variáveis e os termos independentes. Nessa matriz serão realizadas todas as operações necessárias para escalonar o sistema.

Para facilitar à escrita e o entendimento vamos chamar **a primeira linha da matriz A de L_1 a segunda de L_2 e a terceira de L_3**.

Primeiramente, devemos repetir a primeira linha (L_1). Para zerar o **primeiro termo de** L_2 , devemos **reescrever** toda a segunda equação do sistema, ou seja, reescrever a segunda linha da matriz estendida. Da seguinte forma:

$$L_2 = 2\times L_1 - L_2\text{, assim vamos ter:}$$

$$L_2 = 2\times 1 - 2 = 0$$
$$L_2 = 2\times 2 - 7 = -3$$
$$L_2 = 2\times 1 - 1 = 1$$
$$L_2 = 2\times 7 - 21 = -7$$

Com isso temos que a segunda linha (L_2) da matriz *A* será substituída por $(0,-3,\ 1 \ \vdots\ -7)$. Assim, construiremos uma nova matriz que vamos chamar de A_1, a matriz estendida ficará:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & -7 \\ -3 & -5 & 2 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

Agora precisamos zerar o **primeiro e segundo termo na terceira equação**, vamos zerar um de cada vez. Primeiramente vamos zerar o **primeiro termo na terceira equação**, para isso precisamos reescrever L_3 da seguinte forma:

$$L_3 = 3\times L_1 + L_3\text{, assim vamos ter:}$$

$$L_3 = 3\times 1 + (-3) = 0$$
$$L_3 = 3\times 2 + (-5) = 1$$
$$L_3 = 3\times 1 + 2 = 5$$
$$L_3 = 3\times 7 + (-8) = 13$$

Com isso, temos que a terceira linha (L_3) da matriz A será substituída por $(0,1,5 \vdots 13)$. Assim, construiremos uma nova matriz que vamos chamar de A_2, a matriz estendida ficará:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 13 \end{pmatrix}$$

Observe que, na matriz A_2 ainda precisamos zerar o **segundo termo na terceira equação**, para isso precisamos reescrever L_3 da seguinte forma:

$L_3 = L_2 + 3 \times L_3$, assim vamos ter:

$$\begin{gathered} L_3 = 0 + 3 \times 0 = 0 \\ L_3 = -3 + 3 \times 1 = 0 \\ L_3 = 1 + 3 \times 5 = 16 \\ L_3 = -7 + 3 \times 13 = 32 \end{gathered}$$

Com isso, temos que a terceira linha (L_3) da matriz A_2 será substituída por $(0,0,16 \vdots 32)$. Assim, construiremos uma nova matriz que vamos chamar de A_3, a matriz estendida ficará:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 7 \\ 0 & -3 & 1 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 16 & \vdots & 32 \end{pmatrix}$$

A matriz A_3 é a forma estendida escalonada da matriz A, sendo assim podemos reescrever o sistema na sua forma escalonada equivalente.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ \cdots -3x_2 + x_3 = -7 \\ \cdots\cdots\cdots +16x_3 = 32 \end{cases}$$

De L_3 temos que $x_3 = 2$. Substituindo este valor na segunda linha (L_2), vamos obter $x_2 = 3$ e substituindo $x_3 = 2,\ x_2 = 3$ em L_1 vamos ter $x_1 = -1$. Sendo assim, o conjunto solução para o sistema equivalente é $S = (-1,\ 3, 2)$. Como sistemas equivalentes têm o mesmo conjunto solução, então o sistema original também tem como solução o conjunto $S = (-1,\ 3, 2)$. Portanto, o sistema é **Possível** e **Determinado**.

Aplicação de Determinantes – Regra de Cramer

Aqui iremos fazer uso de uma importante aplicação dos determinantes, usando a regra de Cramer. Esta regra é uma das maneiras de resolver sistemas lineares, mas só poderá ser utilizada quando o sistema de equações for quadrado, ou seja, quando os números de equações forem iguais ao número de variáveis, ou seja, $n \times n$.

Esta regra consiste em calcular o determinante (D) da matriz dos coeficientes das equações incompleta (sem os termos independentes) do sistema e depois substituirmos os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes. Nesta regra, devemos seguir os seguintes passos:

- Calcula-se o determinante $\det(A) = (D)$ da matriz dos coeficientes das variáveis;
- Calcula-se o determinante $\det(A_i) = (D_i)$ da matriz que se obtém substituindo, na matriz dos coeficientes das variáveis, a coluna dos coeficientes da variável (x_i) pela coluna dos termos independentes;

- Calcula-se o valor de (x_i) pela fórmula: $x_i = \dfrac{D_i}{D}$;
- i é a quantidade de variáveis do sistema;
- Para um sistema 3×3 seu conjunto solução se existir é dado

por $S = \left(\dfrac{D_1}{D}, \dfrac{D_2}{D}, \dfrac{D_3}{D} \right)$.

Para sabermos em que condições o sistema linear é *Possível Determinado*, *Possível Indeterminado* ou *Impossível*, precisamos encontrar o valor do determinante da matriz **A** que representa o sistema linear ou seja, encontrar o $\mathbf{det}(\mathbf{A})$.

Se o $\det(A) \neq 0$, o sistema linear é **Possível Determinado** e se o $\det(A) = 0$, não podemos fazer nenhuma afirmação sobre seu conjunto solução, o sistema pode ser: **Possível Indeterminado ou Impossível**.

Para resolver essa situação, precisamos calcular $det(A) = 0$ e os determinantes secundários $det(A_i)$, substituindo cada coluna do x_i na matriz dos coeficientes pela coluna dos termos independentes, daí temos dois casos a considerar:

- Se $det(A) = 0$ e $\det(A_i) = 0$, $\forall\, i : 1, \cdots, n$. Nesse caso, tem-se que o sistema é **possível** e **indeterminado**;
- Se $det(A) = 0$ e $\det(A_i) \neq 0$, para algum $i : 1, \cdots, n$. Nesse caso, tem-se que o sistema é **impossível**.

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21 \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -8 \end{cases}$

A matriz do sistema é dada por: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, cujo determinante principal é: $\det(A) = 16$. Agora temos que substituir a primeira coluna da matriz A pela coluna dos termos independentes para encontrarmos o valor da variável x_1, tem-se:

$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 21 & 7 & 1 \\ -8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, cujo $\det(A_1) = -16$. Dessa forma, tem-se que

$$x_1 = -\frac{16}{16} = -1$$

Agora, voltando à formação inicial da matriz A e substituindo a segunda coluna pela coluna dos termos independentes tem-se:

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 21 & 1 \\ -3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$, cujo $\det(A_2) = 48$. Dessa forma, tem-se que

$$x_2 = \frac{48}{16} = 3$$

Agora, voltando à formação inicial da matriz A e substituindo a terceira coluna pela coluna dos termos independentes tem-se:

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$, cujo $\det(A_2) = 32$. Dessa forma, tem-se que

$$x_3 = \frac{32}{16} = 2$$

Dessa forma, o conjunto solução do sistema pelo método de Cramer, é o mesmo encontrado quando resolvido pelo escalonamento. $S = (-1,\ 3, 2)$.

Exemplo 2: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$, cuja matriz é dada por: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, com $\det(B) = 0$. Agora, vamos calcular os determinantes secundários, ou seja, $\det(B_i)$. Substituindo os termos independentes na primeira coluna de B tem-se $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ cujo $\det(B_1) = -3$. Substituindo agora os termos independentes na segunda coluna de B tem-se, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ cujo $\det(B_2) = 3$. Analogamente, substituindo os termos independentes na terceira coluna de B tem-se, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ cujo $\det(B_3) = 0$.

Daí, temos que $S = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D} \right) = \left(-\frac{3}{0}, \frac{3}{0}, \frac{0}{0} \right)$, o que nos dá um **Sistema Impossível**, tendo em vista a indeterminação obtida em $x_3 = \frac{0}{0}$.

Exercícios propostos

1°) Faça a discussão dos sistemas lineares abaixo apresentando o conjunto solução em cada caso, em seguida resolva também pelo método de Cramer e compare os resultados obtidos.

a) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21 \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -8 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -38 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$$

2º) Use o processo de Cramer para mostrar que os sistemas abaixo são impossíveis.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 3x + 4y + 6z = 23 \\ 3x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = -10 \\ 2x + y + z = -20 \\ 0x + y + z = -40 \end{cases}$$

3º) Estabeleça a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes a, b e c para que o sistema abaixo seja possível.

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ \quad\;\; y + 2z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$$

Cônicas

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

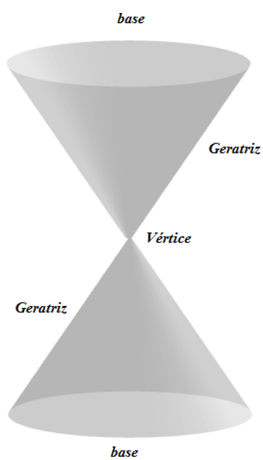
O estudo das secções cônicas iniciou na Grécia antiga, onde foram identificadas diversas das suas propriedades geométricas. Entretanto, foram necessários alguns séculos para que a utilidade prática dessas curvas fosse identificada. A primeira série de teoremas sobre as secções cônicas confirmados, porém, apareceram nos trabalhos de Arquimedes (287 a. C. – 212 a. C.). Na obra, encontram-se as primeiras referências a afirmações contidas nos "elementos das cônicas", conhecimentos atribuídos a Euclides e a Aristeu. Foi, porém, Apolônio, na sua monumental obra *As Cônicas*, composta de oito livros dos quais apenas o último se perdeu, que desenvolveu generalizações, aplicou novos métodos, descobriu e provou teoremas e praticamente exauriu as conclusões puramente geométricas envolvidas nas seções cônicas, façanha pela qual ficou conhecido na sua época como "O Grande Geômetra". As cônicas ou secções cônicas são curvas planas obtidas pela intersecção de um único plano com um cone circular reto (cone duplo). De acordo com a inclinação desse plano, a curva será chamada de círculo, elipse, hipérbole ou parábola.[3]

[3] Texto baseado em EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 2004.

Introdução

Durante o estudo das cônicas, um conceito que será utilizado é o de cone duplo de revolução, uma vez que as superfícies cônicas são originadas da intersecção entre um plano e o cone duplo, dependendo do ângulo em que ocorre essa intersecção. A figura a seguir apresenta um cone duplo de revolução.

Figura 19 – Cone duplo de revolução

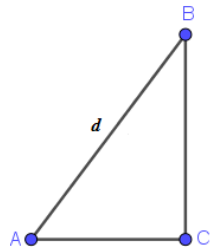


Fonte: Os autores

Os principais elementos do Cone Duplo são as bases (círculos superior e inferior), o vértice e as geratrizes. Todos os elementos são apresentados na figura anterior.

Vale ressaltar, que o tratamento matemático das cônicas é baseado nas expressões da geometria analítica que calcula a distância entre ponto e reta e entre pontos, expressões essas que são deduzidas através de simples aplicações do teorema de Pitágoras. A seguir, tais conteúdos serão abordados.

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ no plano, a distância entre eles será: $d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Geometricamente, temos:

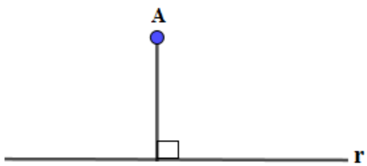


Para obtermos a expressão matemática acima que determina a distância (***d***), basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo acima. Dessa forma, obtemos:

$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 .$$

Outra definição, não menos importante, que também é utilizada é a distância entre ponto e reta. A distância entre um ponto e uma reta é calculada unindo o próprio ponto à reta através de um segmento perpendicular a ela. Para estabelecer essa distância, necessita-se da equação geral da reta e da coordenada do ponto.

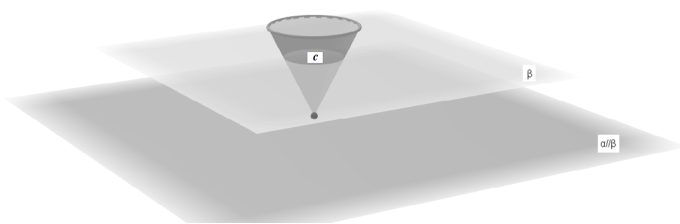
Considere uma equação geral genérica de uma reta ***r*** dada por $ax + by + c = 0$ e um ponto de coordenadas $A(x_0, y_0)$. A distância entre ***r*** e ***A*** será dada por: $d_{p,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Geometricamente, tem-se:



Circunferência

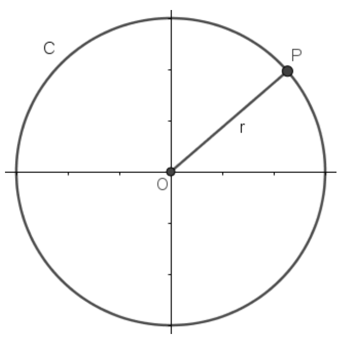
Quando o plano que corta a superfície está paralelo ao plano da base (perpendicular ao eixo de simetria) do cone, a curva é um círculo. Conforme mostrado na imagem a seguir:

Figura 20 – Cone cortado por um plano paralelo à base obtendo uma circunferência



Fonte: Os autores

Figura 21 – Circunferência obtida pela intersecção do plano com o cone de revolução



Fonte: Os autores

A intersecção de um plano com o vértice do cone pode ainda dar origem a um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes. Neste caso, são chamadas de cônicas degeneradas.

Equação Geral e Reduzida da Circunferência

A circunferência pode ser representada de forma algébrica por uma equação, obtida a partir da distância entre dois pontos. Tal equação é chamada de reduzida e, ao desenvolver os produtos notáveis que aparecem nela e em seguida agrupar os termos semelhantes, obtém-se a sua forma geral. Para isso, se faz necessário conhecer apenas um ponto qualquer dela e o seu centro.

Considere um ponto $P(x,y)$ da circunferência e o centro $C(a,b)$. Sendo a distância entre esses dois pontos o raio (***r***), através da expressão matemática para o cálculo da distância entre dois pontos tem-se:

$d_{p,c}^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2$. Essa é a equação reduzida da circunferência.

Desenvolvendo os produtos notáveis tem-se que:

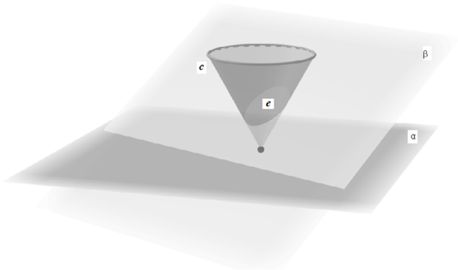
$(a-x)^2 + (b-y)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2 - r^2 = 0$. Arrumando os termos, encontra-se a expressão conhecida como equação geral da circunferência, ou seja, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.

Elipse

A curva gerada quando um plano corta todas as geratrizes de um cone é chamada de elipse, neste caso, o plano não é paralelo à geratriz.

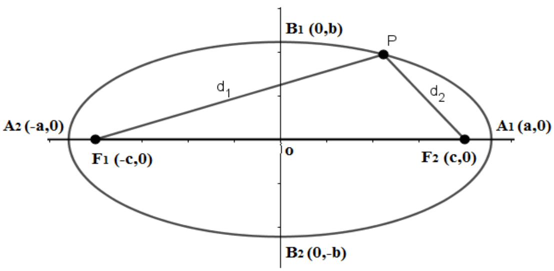
Desta forma, a elipse é o lugar geométrico dos pontos *P(x,y)*, no plano cuja soma das distâncias ($d_1 + d_2$) a dois pontos fixos do plano, chamados de foco (F_1 e F_2), é um valor constante.

Figura 22 – Cone cortado por um plano obliquo à base obtendo uma Elipse



Fonte: Os autores

Figura 23 – Elipse no plano cartesiano



Fonte: Os autores

A soma das distâncias d_1 e d_2 é indicada por 2a, ou seja $2a = d_1 + d_2$ e a distância entre os focos é chamada de 2c, sendo que 2a > 2c.

A maior distância entre dois pontos pertencentes à elipse é chamada de eixo maior e seu valor é igual a 2a. Já a menor distância é chamada de eixo menor e é indicada por 2b.

O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado de excentricidade e indica o quanto a elipse é "achatada". Temos ainda a seguinte relação: a2 = b2 + c2

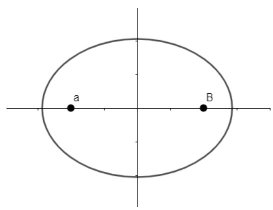
Sendo:
a: medida do semi-eixo maior
b: medida do semi-eixo menor
c: metade da distância focal

Equação reduzida

Podemos representar uma elipse usando um plano cartesiano, conforme figura abaixo:

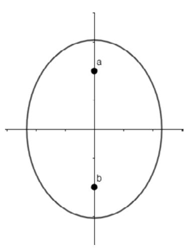
Neste caso, a elipse possui centro na origem do plano e focos no eixo *x*. Desta forma, sua equação reduzida é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



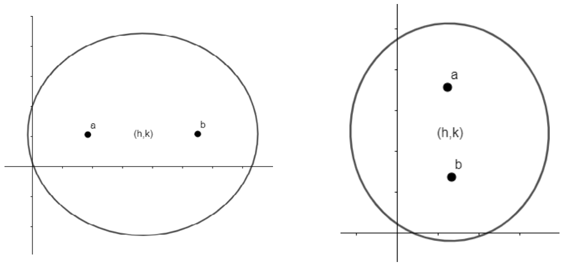
Se os focos estiverem sobre o eixo *y* e centro na origem, a equação reduzida será igual a:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



Considerando que o centro não seja na origem, ou seja, num ponto (h,k) qualquer, temos:

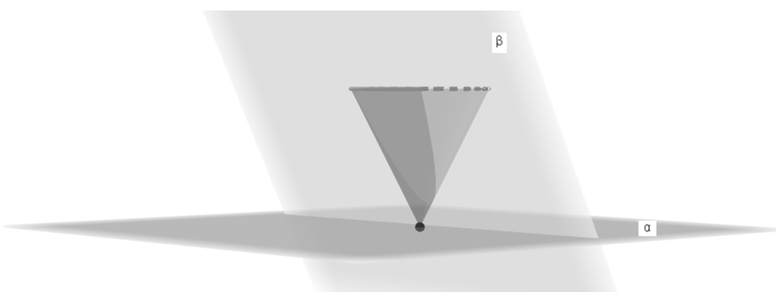
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ e $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, para os focos sobre os eixos x e y, respectivamente.



Parábola

Quando um plano intercepta um cone com uma inclinação paralela a uma de suas geratrizes, a figura que surge é uma parábola.

Figura 24 – Cone cortado por um plano obliquo à base obtendo uma Parábola



Fonte: Os autores

Dessa maneira, a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano, que equidistam de uma reta fixa ***r*** e de um ponto fixo, ***F***.

Esse ponto fixo é chamado de foco da parábola e a reta recebe o nome de diretriz. A reta que passa pelo foco, perpendicular à diretriz, é chamada de eixo de simetria da parábola.

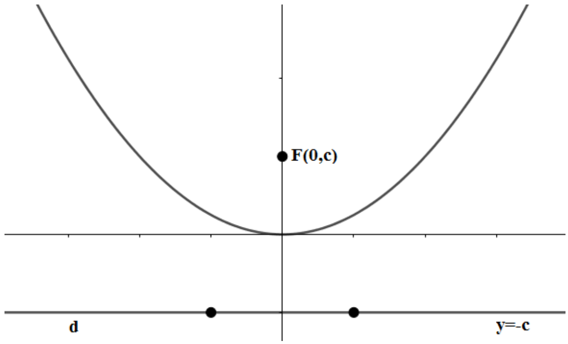
O vértice é o ponto de intersecção entre a parábola e o seu eixo, sendo que a distância entre o vértice e o foco é igual à distância do vértice a reta diretriz.

Equação reduzida da Parábola

Representando uma parábola em um plano cartesiano com o vértice coincidindo com a origem dos eixos e considerando ***c*** igual à distância entre o foco e o vértice, temos 4 situações possíveis (2 com focos na abscissa e 2 com focos na ordenadas), embora aqui iremos abordar as duas principais, a saber, relacionadas ao eixo de simetria em y.

1º) Eixo de simetria coincidente com o eixo y e reta diretriz $y = -c$, a equação será: $x^2 = 4cy$

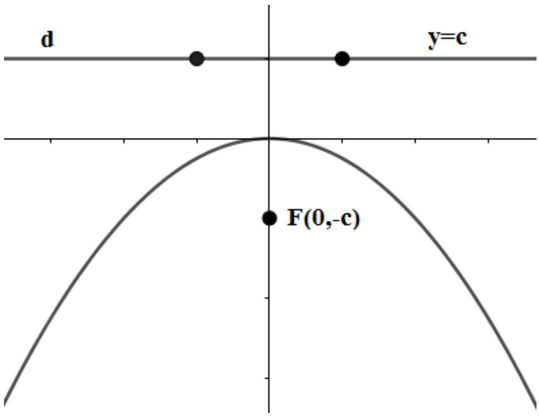
Figura 25 – Eixo de simetria coincidente com o eixo y e reta diretriz com ordenada negativa



Fonte: Os autores

2º) Eixo de simetria coincidente com o eixo ***x*** e reta diretriz $y = c$, a equação será: $x^2 = -4cy$

Figura 26 – Eixo de simetria coincidente com o eixo y e reta diretriz com ordenada positiva



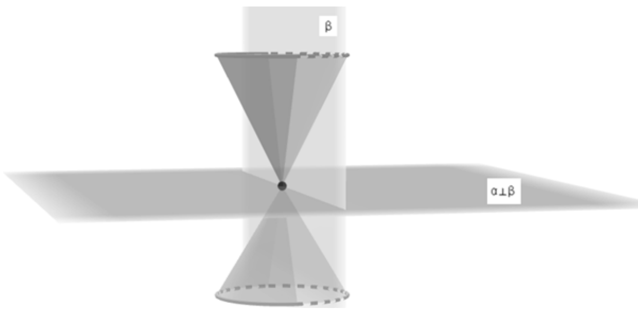
Fonte: Os autores

Se o vértice de uma parábola estiver transladado para um ponto de coordenadas $V(x_0, y_0)$ e sua reta diretriz for paralela ao eixo *x*, então sua equação será: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. Caso a reta diretriz seja paralela ao eixo ***y***, então sua equação é: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.

Hipérbole

Hipérbole é o nome da curva que surge quando um cone duplo é interceptado por um plano paralelo ao seu eixo.

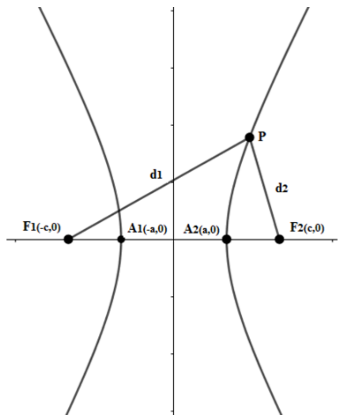
Figura 27 – Cone cortado por um plano obliquo à base obtendo uma Hipérbole



Fonte: Os autores

Assim, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos no plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos do plano (foco) é um valor constante, ou seja, $\left|d_{PF_1} - d_{PF_2}\right| = \left|d_1 - d_2\right| = k$.

Figura 28 – Hipérbole no plano cartesiano



Fonte: Os autores

Equação reduzida

A equação reduzida da hipérbole com os focos localizados no eixo ***x*** e o centro na origem $C(0,0)$ é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Caso os focos estejam sobre o eixo ***y*** e centro também na origem, a equação será:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Se o centro da hipérbole for o ponto $C(x_0, y_0)$ fora da origem e seu eixo real for paralelo ao eixo **x**, então sua equação será:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Para encontrar os vértices basta somar/subtrair a medida ***a*** da coordenada *x* do centro e o mesmo com a medida *c* para encontrar os focos.

Caso o eixo real seja paralelo ao eixo y, então a equação é:

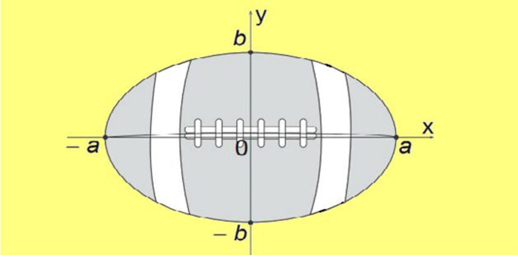
$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Para encontrar os vértices basta somar/subtrair a medida ***a*** da coordenada ***y*** do centro e o mesmo com a medida *c* para encontrar os focos.

É importante ressaltar que, em qualquer caso, o centro é o ponto médio entre os focos e dos vértices da hipérbole.

Exercícios Propostos

1º) (Enem – 2015) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por:

a) $8b^3$

b) $6b^3$

c) $5b^3$

d) $4b^3$

e) $2b^3$

2º) (UEA – 2020) Considere as equações I, II e III.

I. $x + y + 3 = 0$

II. $x^2 + 2y + 2 = 0$

III. $x^2 + y^2 - 5 = 0$

No plano cartesiano, as representações gráficas das equações I, II e III correspondem, respectivamente, a

a) Circunferência, parábola e reta.

b) Parábola, reta e circunferência.

c) Reta, circunferência e parábola.

d) Circunferência, reta e parábola.

e) Reta, parábola e circunferência.

3º) (UEL PR – 2020) Em uma praça dispõe-se de uma região retangular de 20m de comprimento por 16m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguá-lo, serão colocados dois aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre os aspersores?

a) 4m
b) 6m
c) 8m
d) 10m
e) 12m

4º) (Enem 2017 – adaptada) O fisiologista inglês Archibald Vivian Hill propôs, em seus estudos, que a velocidade v de contração de um músculo ao ser submetido a um peso p é dada pela equação (p + a) (v + b) = K, com a, b e K constantes. O fisioterapeuta analisou a dependência entre v e p na equação de Hill e a classificou de acordo com sua representação geométrica no plano cartesiano, utilizando o par de coordenadas (p; v). Admita que K > 0.

O gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou para maximizar o efeito dos exercícios é do tipo

a) semirreta oblíqua.
b) semirreta horizontal.
c) ramo de parábola.
d) arco de circunferência.
e) ramo de hipérbole.

5º) (VUNESP – 2010) A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5m de largura, separadas por uma pista de 7m de largura. Vamos admitir que:

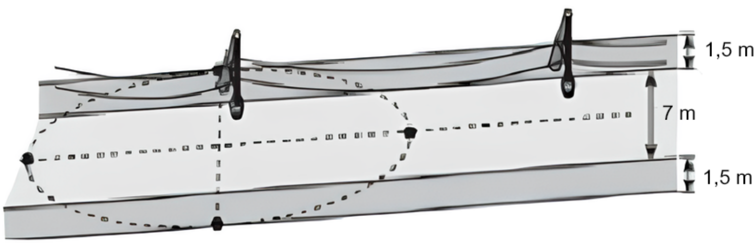
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dado: $0,943^2 \approx 0,889$ e $\sqrt{0,111} \approx 0,333$.



a) 15 b) 20 c) 25 d) 30 e) 35

Noções de Limites

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

Um pouco de história – Paradoxo de Zenão

Zenão de Eleia (490-430 a. C.) é conhecido por causa de seus paradoxos, como o Paradoxo da Dicotomia, que consiste em um corredor que pretende cobrir uma certa extensão. Antes de chegar ao final, ele terá que passar por um ponto localizado no meio do percurso, $\frac{1}{2}$ da extensão total. Após isso, ele tem que passar pelo ponto que corresponde a $\frac{3}{4}$ do percurso. Depois disso, pelo ponto $\frac{7}{8}$, depois $\frac{15}{16}$, depois $\frac{31}{32}$ etc.

Como, por hipótese, o espaço é divisível sem limite, há um número infinito de pontos que o corredor deve percorrer antes de chegar ao final de seu percurso. Assim, conclui Zenão, ele nunca chega ao final. Este é o paradoxo da Dicotomia "progressivo"; há também a versão "regressiva", que consiste no argumento de que antes de chegar à metade do percurso, o corredor tem que atingir $\frac{1}{4}$ da extensão total; mas para chegar neste ponto, tem que antes atingir o percurso $\frac{1}{8}$; e antes disso, $\frac{1}{16}$, etc. Desta maneira, o corredor nem conseguiria, sequer, iniciar sua corrida. E, nisso, consiste a ideia de limites de funções![4]

Ideia Intuitiva de Limite

Considere a função $y = 2x + 1$. Para facilitar a análise, observe a tabela a seguir.

Tabela 2: Ideia intuitiva de limite de função

x	$y = 2x + 1$	y
1	$y = 2.1 + 1 = 3$	3
2	$y = 2.2 + 1 = 5$	5
2,5	$y = 2.(2,5) + 1 = 6$	6
2,9	$y = 2.(2,9) + 1 = 6,8$	6,8
3	$y = 2.3 + 1 = 7$	7
3,1	$y = 2.(3,1) + 1 = 7,1$	7,1
3,5	$y = 2.(3,5) + 1 = 8$	8
4	$y = 2.4 + 1 = 9$	9
5	$y = 2.5 + 1 = 11$	11

Fonte: Os autores

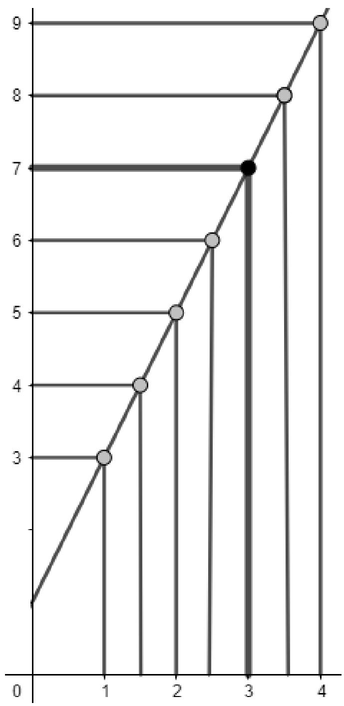
[4] Texto baseado em BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, 1974.

Considerando o ponto $p = 3$ do domínio da função podemos observar que à medida que nos aproximamos dele, por valores menores e maiores que ele, a imagem desse respectivo ponto se aproxima de 7. Dessa forma, podemos escrever que $\lim\limits_{x \to 3^-} 2x + 1 = 7 = \lim\limits_{x \to 3^+} 2x + 1.$

Os sinais, negativo e positivo, no expoente do ponto de tendência da variável x, indica que os limites pela esquerda e pela direita são iguais.

Geometricamente tem-se que:

Figura 29 – Ideia de limites laterais de função



Fonte: Os autores

Então o cálculo desse limite pode ser resumido a:

$$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

Definição (Formal) de Limite

De forma intuitiva diz-se que uma função $f(x)$ tem limite ***L*** quando ***x*** tende para ***a***, se é possível tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de ***L***, desde que tomamos valores de ***x***, $x \neq a$, suficientemente próximos de ***a***.

Matematicamente pode-se escrever:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

Exemplo: Mostrar, pela definição, que $\lim_{x \to 3} x + 1 = 4$

$$\lim_{x \to 3} x + 1 = 4 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x + 1 - 4| < \delta$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$. Logo, obtemos:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 0 < |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 4| = |x + 1 - 4| = |x - 3| = \varepsilon$$

Operações com limites

As principais regras para o cálculo de limites de funções elementares dizem respeito às operações de soma, produto e quociente, conforme segue.

$\lim_{x \to a} x = a$, neste caso temos uma função polinomial (identidade), contínua, ou seja, seu gráfico não apresenta “saltos”, dessa forma, para calcular o limite basta substituir o ponto de tendência (no caso $\boldsymbol{x \to a}$) na variável da função.

Seja $k \in \mathbb{R}$ uma função constante, então $\lim\limits_{x\to a} k = k$, ou seja, limite de uma função constante é a própria constante.

Tem-se também que, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então:

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = L\cdot M$

- $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}\ \left(M \neq 0\right)$

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$ (Dadas as condições de

  existência da raiz).

- $\lim\limits_{x\to a}\ln\left[f(x)\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right] = \ln L,\ L > 0.$ (Logaritmo Natural)

- $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = e^L$

- $\lim\limits_{x\to a} sen\left[f(x)\right] = sen\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right] = sen\, L$

- $\lim\limits_{x\to a}\cos\left[f(x)\right] = \cos\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right] = \cos L$

Exemplos: Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 2} 7\cdot x-1=\lim_{x\to 2} 7\cdot x-\lim_{x\to 2} 1=7\cdot 2-1=14-1=13$

(Regra da Subtração).

b) $\lim_{x\to 4} 2x\cdot(3\cdot x-1)=\left(\lim_{x\to 4} 2\cdot x\right)\cdot\left[\lim_{x\to 4}(3\cdot x-1)\right]=$

$\left(\lim_{x\to 4} 2\cdot x\right)\cdot\left[\lim_{x\to 4}(3\cdot x-1)\right]=(2\cdot 4)\cdot(3\cdot 4-1)=8\cdot 11=88$

(Regra do Produto).

c) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+2\cdot x-3}{1-x}\right)=\left(\dfrac{\lim_{x\to -2}\left(x^2+2\cdot x-3\right)}{\lim_{x\to -2}(1-x)}\right)=\dfrac{\left[(-2)^2+2\cdot(-2)-3\right]}{1-(-2)}\Rightarrow$

$\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+2\cdot x-3}{1-x}\right)=\dfrac{4-4-3}{1+2}=\dfrac{-3}{3}=-1$

(Regra do Quociente).

d) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-5\cdot x+6}{x^2-4}\right)=\dfrac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-5\cdot x+6\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right)}.$

Aplicando a regra do quociente, é possível observar que, ao substituir o limite, no caso $x=2$, o denominador da função assume valor zero, o que não pode, pois a divisão por zero não está definida em Reais. Dessa forma, faz-se necessário reescrever tais expressões na forma fatorada, para eliminar a indeterminação. Ficando assim:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5\cdot x+6}{x^2-4}\right)=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-5\cdot x+6\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x^2-4\right)}=\frac{\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot(x-3)\right]}{\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\cdot(x+2)\right]}$$

Podemos observar que o fator de indeterminação pode ser cancelado, eliminando assim a indeterminação, o que torna possível a substituição do valor de *x* na nova expressão conforme segue:

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2 - 5 \cdot x + 6}{x^2 - 4}\right) = \frac{\lim_{x \to 2}(x-3)}{\lim_{x \to 2}(x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

Limites Infinitos e no infinito

Neste tópico, a proposta é deixar uma breve ideia, bem introdutória, do cálculo de limites quando a variável tende ao infinito e, também, quando o resultado do limite vai para o infinito.

O símbolo utilizado para representar o infinito é ∞, sendo utilizada as notações ∞+ e ∞- para representar limites laterais à direita e esquerda, respectivamente. Quanto ao resultado do limite, se usa +∞ e -∞, para uma interpretação geométrica de um valor muito grande ou muito pequeno, respectivamente, tanto quanto se queira ou seja necessário.

Vejamos alguns exemplos clássicos sobre limites infinitos e no infinito.

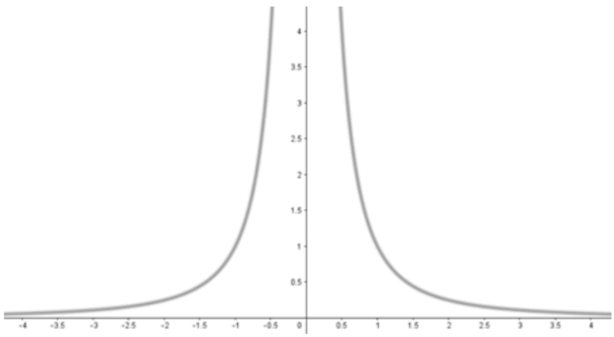
a) $$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} \to \infty$$

b) $$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} \to 0$$

Observe nos exemplos anteriores que o denominador é elevado ao quadrado, então será positivo. Tomando um valor muito grande (infinito), o mesmo tende a ficar maior ainda, e dado um número numerador qualquer, no caso é 1, dividido por um valor muito maior que ele, o resultado tende a ser zero.

De forma análoga, se tomarmos um valor muito pequeno (tendendo a zero), sabendo que a divisão por zero não está definida, mas estamos tomando um valor próximo de zero, o resultado da divisão tende a ser algo muito grande, no caso o infinito. Geometricamente, pode-se observar no gráfico a seguir.

Figura 30 – Gráfico da função 1/x2 quando *x* tende a zero



Fonte: Os autores

No gráfico, é possível observar os dois exemplos, à medida que os valores, no eixo x, se aproximam de zero, os valores de y tendem a subir infinitamente. Por outro lado, quando os valores se afastam da origem, o gráfico tem um comportamento assintótico ao eixo das abscissas, ou seja, tende a zero.

Outro exemplo numérico importante, envolvem funções polinomiais. A seguir serão apresentados.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2+7x-3}$

Para resolver esse limite, aplica-se a regra do quociente e em seguida, segue de forma análoga ao exemplo *(b)* visto anteriormente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2+7x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{3}{2}$$

Coloca-se a variável de maior grau em evidência no numerador e denominador da fração. Cancelando os fatores em evidência em virtude de serem iguais e aplicando o limite no infinito nos denominadores dos termos dentro dos parênteses, que tenderão a zero, se chega ao resultado do limite.

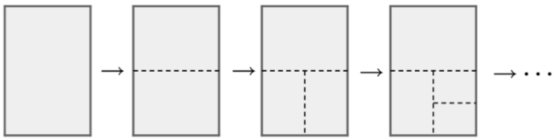
Vale ressaltar que o estudo sobre limites infinitos e no infinito é bastante extenso, o objetivo aqui é apenas deixar uma breve introdução, que possa aguçar a curiosidade e assim, o interesse do leitor pesquisar um pouco mais.

Exercícios de Aplicação

1º) Uma montadora de computadores determina que um empregador após x dias de treinamento, monte n computadores por dia, onde $n(x)=\dfrac{20x^2}{x^2+x+5}$. Qual o comportamento $n=n(x)$ para treinamentos longos?

R = 20; comentário: a ideia é associar longos dias a um limite no infinito.

2º) Pegue uma folha de papel e divida-a em duas partes iguais. Em seguida, pegue uma dessas partes e divida novamente, em duas partes iguais. Repita esse processo até uma etapa n. A figura abaixo ilustra esse processo.



As divisões são: $\frac{1}{2}$ folha; $\frac{1}{4}$ folha; $\frac{1}{8}$ folha; ...; $\frac{1}{n}$ folha. Considere um processo infinito de divisões e a soma dessas divisões é representada por:

a) Qual o valor dessa soma infinita?

R=1; comentário: **a soma de uma PG infinita.** $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

b) Observe:

1º divisão: $\frac{1}{2}\text{ folha} + \frac{1}{2}\text{ folha} = 1\text{ folha};$

2º divisão: $\frac{1}{2}\text{ folha} + \frac{1}{4}\text{ folha} + \frac{1}{4}\text{ folha} = 1;$

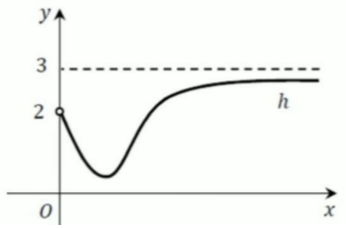
3º divisão: $\frac{1}{2}\text{ folha} + \frac{1}{4}\text{ folha} + \frac{1}{8}\text{ folha} + \frac{1}{8}\text{ folha} = 1\ldots$

Descreva a relação existente entre a resposta da letra (a) com a observação da letra (b).

R = Subjetiva.

Comentário: **caso o aluno encontre "1" como resposta em (a) e compare com a observação de (b), pode comentar que uma soma infinita e uma soma finita chegam ao mesmo resultado. Pode surgir comentários sobre a ideia de convergência. Enfim, esse item é de caráter subjetivo.**

3º) O gráfico a seguir representa a densidade de uma variável y em x.



Determine, caso existam, os limites:

a) $\lim_{x \to 0^+} y(x)$

R= 2

b) $\lim_{x \to \infty} y(x)$

R= 3

4º) Num certo país, o montante de imposto de renda $T(x)$ devido por uma pessoa física que recebe x u.m (unidade monetária) é modelado por:

$$T(x) = \begin{cases} 0,15 \cdot x & \text{se } 0 \leq x \leq 25000 \\ 3750 + 0,25 \cdot (x - 25000) & \text{se } 25000 \leq x < 60000 \end{cases}$$

Como se comporta o imposto de renda, $T(x)$, para valores x recebidos superiores ou inferiores a 25000.

R = o limite à esquerda é 3750, como também o limite à direita é 3750. O que sugere para valores recebidos próximos de 25000 o valor T(x) é 3750.

5º) Na Teoria da Relatividade, a fórmula da concentração de Lorentz $L = L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz.

Encontre $\lim\limits_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

R = *L* tende a zero; comentário: A velocidade da luz é de aproximadamente $30\text{x}10^8$ m/s. Na teoria da relatividade é conhecido que nenhum objeto pode ir além da velocidade da luz, logo só existe o limite à esquerda de *v*.

Noções

de Derivadas

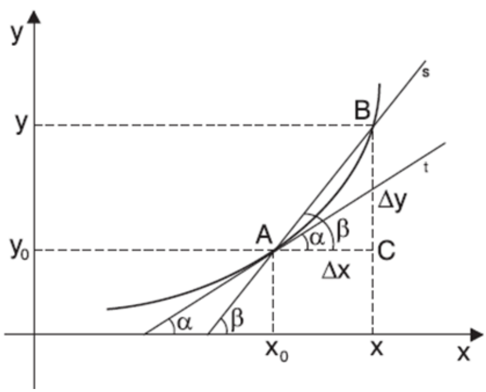
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

O problema fundamental do cálculo diferencial é estabelecer uma medida para a variação da função com precisão matemática. Foi investigando problemas dessa natureza, lidando com grandezas que variam com continuidade, que os matemáticos Newton e Leibniz foram conduzidos à descoberta dos princípios fundamentais do cálculo ou cálculo infinitesimal.

Para determinar a reta tangente a uma curva num determinado ponto, consideramos o gráfico da função $y = f(x)$ representado por uma curva que possui uma reta t, tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto (x_0, y_0).

Figura 31 – Interpretação geométrica da derivada



Fonte: Guidorizzi, 2013

- $\Delta x = x - x_0 \rightarrow$ incremento na variável x;
- $\Delta y = y - y_0 \rightarrow$ incremento na variável y;
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow$ razão incremental.

Na figura 1, temos:

- $f(x)$ é o gráfico da função (curva);
- s é uma reta secante a curva $f(x)$;
- t é uma reta tangente a curva $f(x)$;
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\beta$ no triângulo ABC.

Observe que, quando o valor de Δx se aproxima de zero (tende a zero), o ponto B se aproxima (tende à A) do ponto A e a reta secante s se aproxima da reta tangente t (tende à t), consequentemente o ângulo β tente ao ângulo α. Dessa forma podemos escrever:

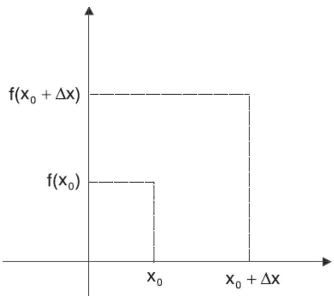
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = tg\alpha$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente t é o valor limite dos coeficientes angulares das secantes quando Δx tende a zero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O valor desse limite quando existe e for finito, é chamado derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 e será denotado por $f'(x_0)$.

Figura 32 – Representação geométrica de um acréscimo infinitesimal



Fonte: Os autores

Considere uma função $f(x)$ definida em um intervalo $I=(a,b)$ e tome um ponto de abscissa $x_0 \in I$.

Dessa forma chama-se derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa $x_0 \in I$, o limite, se existir e for finito, da razão $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, quando Δx tende a zero, ou seja, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ou $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Obs.: Geometricamente, a derivada da função $f(x)$ quando existe, indica o valor do coeficiente angular da reta tangente t ao gráfico de $f(x)$ no ponto x_0.

Exemplo: Determinar a derivada da função definida por $f(x)=2x^2$ no ponto $x_0=3$.

Tem-se que:

$$f(x)=2x^2 \text{ e } f(x_0)=2{x_0}^2=2\cdot 3^2=2\cdot 9=18$$

Pela definição de derivada, vista anteriormente, temos que:

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ temos que:}$$

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x^2 - 2x_0^{\,2}}{x - x_0} = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 2 \cdot 3^2}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2\left(x^2 - 9\right)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2\left(\cancel{x-3}\right) \cdot \left(x+3\right)}{\cancel{x-3}} \Rightarrow f^{'}(3) = \lim_{x \to 3} 2\left(x+3\right) = 2\left(3+3\right) = 12$$

Algumas derivadas especiais

Apresentamos o cálculo de derivadas de uma função $f(x)$ usando a definição de derivadas, porém esse processo é um pouco extenso, sendo assim iremos apresentar agora algumas regras que facilitam determinar a derivada de uma função $f(x)$.

Derivada da função constante:

Sejam k uma constante e $f(x)$ uma função, tal que $f(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (Leia: para todo ou qualquer x que pertence ao conjunto dos números reais), tem-se $f^{'}(x) = 0$. Então:

$$f(x) = k \Rightarrow f^{'}(x) = 0$$

Exemplos:

- $f(x) = 34 \Rightarrow f^{'}(x) = 0;$
- $f(x) = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow f^{'}(x) = 0;$
- $f(x) = \sqrt[3]{41} \Rightarrow f^{'}(x) = 0.$

Derivada da função polinomial

Considere a função definida por $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$. Então:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$

Exemplos:

- $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5.x^4$;
- $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3.x^{-4}$;
- $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Derivada do produto de uma constante k por uma função $f(x)$

Considere $h(x) = k \cdot f(x)$, em que k é constante e $f(x)$ derivável. A derivada da função $h(x)$ é dada por: $h'(x) = k \cdot f'(x)$. Dessa forma:

$$h'(x) = k \cdot f'(x)$$

Exemplos:

- $h(x) = 3x^4 \Rightarrow h'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 12x^3$;
- $g(x) = \frac{1}{2}x^7 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot x^{7-1} = \frac{7}{2}x^6$;
- $f(x) = \frac{2}{x^2} = 2 \cdot x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$.

Propriedades operatórias das derivadas

Neste tópico, será mostrado como derivar funções que se apresentem em forma de adição, produto e quociente ou combinadas juntas.

Considere duas funções $u(x)$ e $v(x)$ deriváveis, então valem as seguintes propriedades:

- Se $h(x) = u(x) + v(x)$, então $h'(x) = u'(x) + v'(x)$
- Se $h(x) = u(x) - v(x)$, então $h'(x) = u'(x) - v'(x)$

Esses resultados nos dão o teorema a seguir, que iremos apresentar sem demonstração.

Teorema: Se $u(x)$ e $v(x)$ são funções deriváveis, então a derivada da soma de funções é igual à soma das derivadas das referidas funções. Equivalentemente, a derivada da diferença de funções é igual à diferença das derivadas das referidas funções.

Exemplos:

- $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 1 \cdot x^{1-1}$

$+ 0 = 9x^2 - 8x + x^0 = 9x^2 - 8x + 1;$

- $g(x) = 5x^2 + 3x \Rightarrow g'(x) = 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1}$

$= 10x^1 + 3x^0 = 10x + 3.$

Derivada de Funções Produto

Teorema: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções deriváveis, se $f(x)$ é definida como $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, então $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Em palavras, podemos dizer que a derivada da função $f'(x)$ é a derivada da primeira função multiplicada pela segunda função $u'(x)\cdot v(x)$ somada a primeira função multiplicada pela derivada da segunda função $u(x)\cdot v'(x)$.

Exemplos:

- $f(x)=3x.\left(x+2x^2\right)\Rightarrow f'(x)=\left(3x\right)'\cdot\left(x+2x^2\right)+3x\cdot\left(x+2x^2\right)'=$

$3\cdot\left(x+2x^2\right)+3x\cdot\left(1+4x\right)$

Organizando, tem-se que: $f'(x)=3x+6x^2+3x+12x^2=18x^2+6x;$

- $f(x)=x^3\cdot\left(2x^2-3x\right)\Rightarrow f'(x)=\left(x^3\right)'\cdot\left(2x^2-3x\right)+x^3\cdot\left(2x^2-3x\right)'=$

$3x^2\cdot\left(2x^2-3x\right)+x^3\cdot\left(4x-3\right)$

Organizando, tem-se que: $f'(x)=6x^4-9x^3+4x^4-3x^3=10x^4-12x^3$

Derivada da função quociente

Teorema: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções deriváveis com $v(x)\neq 0$, se $f(x)$ for definida como $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, então sua derivada será da forma: $f'(x)=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$. Em palavras, pode-se dizer que a derivada de um quociente de funções é a derivada da função do numerador multiplicada pela função do denominador subtraída da função do numerador multiplicada pela derivada da função do denominador, dividido pelo quadrado da função do denominador.

Exemplos:

- $f(x)=\dfrac{2x+5}{4x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+5)'\cdot 4x-(2x+5)\cdot(4x)'}{(4x)^2}=$

$$\frac{(2x+5)'\cdot 4x-(2x+5)\cdot(4x)'}{(4x)^2}=\frac{2\cdot 4x-(2x+5)\cdot 4}{16x^2}=\frac{\cancel{8x}-\cancel{8x}-20}{16x^2}=-\frac{5}{4x^2};$$

- $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x)'\cdot\left(x^2+1\right)-(2x)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$$\frac{(2x)'\cdot\left(x^2+1\right)-(2x)\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)-(2x)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Derivadas de funções compostas (Regra da cadeia)

Para relembrar, chama-se função composta (ou função de função) à função obtida, substituindo-se a variável independente *x*, por uma outra função.

Notação: $f\circ g(x)=f(g(x))$ ou $g\circ f(x)=g(f(x))$.

Vale ressaltar que a composição de função não é comutativa.

Considere as funções $u(x)$ e $v(x)$ ambas deriváveis, se a função $f(x)$ é definida tal que $f(x)=u[v(x)]$, então sua derivada será da forma: $f'(x)=u'(v)\cdot v'(x)$.

Obs.: Observe que a função $v(x)$ está no domínio da função $u(x)$, assim vamos chamar $u(x)$ de função externa e $v(x)$ de função interna. Dessa forma sua derivada será dada pela derivada da função externa multiplicada pela derivada da função interna.

Exemplos:

- $f(x)=\left(2x-1\right)^{3} \Rightarrow f^{'}(x)=3\cdot\left(2x-1\right)^{2}\cdot 2=6\cdot\left(2x-1\right)^{2}$;

- $f(x)=\left(x^{4}-3x^{2}+1\right)^{2} \Rightarrow f^{'}(x)=2\cdot\left(x^{4}-3x^{2}+1\right)\cdot\left(4\cdot x^{3}-3\cdot 2\cdot x+0\right)$

$=8x^{7}-36x^{5}+44x^{3}-12x;$

- $f(x)=\sqrt{1-x^{2}}=\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f^{'}(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(-2x\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\cdot\left(-2x\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2x\right)=\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}.$

Derivadas da função exponencial

Seja $f(x)$ uma função definida da forma $f(x)=a^{x}$ em que $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 1$ e $x\in\mathbb{R}$, sendo assim, sua derivada será definida por: $f^{'}(x)=a^{x}\cdot\ln a.$

Obs: Se $f(x)=a^{g(x)}$ com $g(x)$ sendo uma função derivável, então deve-se aplicar neste caso a ***regra da cadeia,*** ou seja $f^{'}(x)=a^{g(x)}\cdot g^{'}(x)\cdot\ln a.$

Exemplos:

- $f(x)=5^{x} \Rightarrow f^{'}(x)=5^{x}\cdot\ln 5;$
- $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x} \Rightarrow f^{'}(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\cdot\ln\left(\frac{3}{4}\right);$
- $f(x)=3^{2x+1} \Rightarrow f^{'}(x)=3^{2x+1}\cdot 2\cdot\ln 3;$
- $f(x)=e^{x} \Rightarrow f^{'}(x)=e^{x}\cdot\ln e=e^{x}\cdot 1=e^{x}.$

Derivada da função logarítmica

Considere $f(x)$ como sendo uma função definida por $f(x)=\log_a x$, com $0<a\neq 1$ e $x\in \mathbb{R}^*_+$, assim, sua derivada é definida por: $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot \ln a}$.

Obs.: No caso do *logaritmo Natural* $(\ln x)$, isto é, quando $f(x)=\ln x$, temos que sua derivada é então definida por: $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot \ln e}=\dfrac{1}{x\cdot 1}=\dfrac{1}{x}$, ou seja, se $f(x)=\ln x$, então $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Onde ***e*** é chamado de número *Neperiano* (John Napier, 1550-1617) e vale aproximadamente 2,718... .

Exemplos:

- $f(x)=\log_3 x \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot \ln 3}$;

- $f(x)=(\ln x)^2 \Rightarrow f'(x)=2\cdot(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\cdot(\ln x)}{x}$;

- $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot \ln x - \cancel{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x\cdot\ln x - x}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\cdot(2\cdot \ln x-1)}{(\ln x)^2}$.

Derivadas das funções trigonométricas

Se $f(x)$ é uma função definida tal que $f(x)=sen\,x$, então sua derivada é $f'(x)=\cos x$.

Se $f(x)$ é uma função definida tal que $f(x)=\cos x$, então sua derivada é $f'(x)=-sen\,x$.

Obs.: As demonstrações desses resultados não é o objetivo desse estudo no momento e, portanto, vamos aceitar como verdadeiro.

Para as demais derivadas trigonométricas, podemos aplicar a regra do quociente de funções apresentada anteriormente.

Exemplos:

- Se $f(x) = tg\, x$, essa função pode ser escrita da forma $f(x) = \frac{sen\, x}{\cos x}$.

Daí se aplica a regre do quociente de funções:

$$f(x) = \frac{sen\, x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(sen\, x)' \cdot \cos x - sen\, x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$\frac{\cos x \cdot \cos x - sen\, x \cdot (-sen\, x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = \sec^2 x$$

Portanto, se $f(x) = tg\, x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

- Se $f(x) = \sec x$, essa função pode ser escrita da forma $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Daí se aplica a regra do quociente de funções:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1' \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cancel{0 \cdot \cos x} - 1 \cdot (-sen\, x)}{(\cos x)^2} =$$

$$\frac{sen\,x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{sen\,x}{\cos x} = \sec x \cdot tg\,x$$

Portanto, se $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \cdot tg\,x$

Os demais casos ficam a cargo do leitor a chegarem nos resultados dispostos no quadro a seguir:

Tabela 3: Derivadas de funções trigonométricas

$f(x) = sen\,x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -sen\,x$
$f(x) = tg\,x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \cot g\,x$	$f'(x) = -\text{cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \cdot tg\,x$
$f(x) = \text{cosec}\,x$	$f'(x) = -\text{cosec}\,x \cdot \cot g\,x$

Fonte: Os autores

Derivadas sucessivas ou de ordem superior

Seja $f(x)$ uma função definida num domínio D.

Se $f(x)$ for derivável num conjunto $D_1 \subset D$ e $f'(x)$ é sua derivada em D_1, então $f'(x)$ denomina-se derivada primeira ou derivada de primeira ordem de $f(x)$.

Se $f'(x)$ for derivável num conjunto $D_2 \subset D_1$ e $f''(x)$ é sua derivada em D_2, então $f''(x)$ denomina-se derivada segunda ou derivada de segunda ordem de $f(x)$.

Prosseguindo desse modo, podemos determinar as derivadas seguintes como: terceira ordem, quarta ordem, enésima ordem da função $f(x)$.

Exemplos:

a) Determinar as derivadas sucessivas da função $f(x)$ definida por

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 5 \cdot 2 \cdot x + 0 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 10x$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 10$$

$$f'''(x) = 72x - 24$$

b) Determinar as derivadas sucessivas até a quinta ordem da função

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 + 1$$

$$f'(x) = -4x^3 - 12x^2$$

$$f''(x) = -12x^2 - 24x$$

$$f'''(x) = -24x - 24$$

$$f^{iv}(x) = -24$$

$$f^{v}(x) = 0$$

Exercícios de Fixação e Aplicação

1º) Um móvel desloca-se de acordo com a equação horária $S = 2t^2 + 5t + 10$, S é dado em metros e t em segundos. Obter a velocidade:

a) No instante $t = 1$. **Resposta**: $V(1) = 9m/s$

b) No instante qualquer $t = t_0$. **Resposta**: $V(t) = 4t + 5$

2º) Construir o gráfico que representa o custo de uma empresa de sapatos, segundo a função dada por:

$C(x) = \begin{cases} 210, x \leq 100 \\ 2x + 10, \ x > 100 \end{cases}$. Onde x é a quantidade de sapatos e $C(x)$ dado em reais.

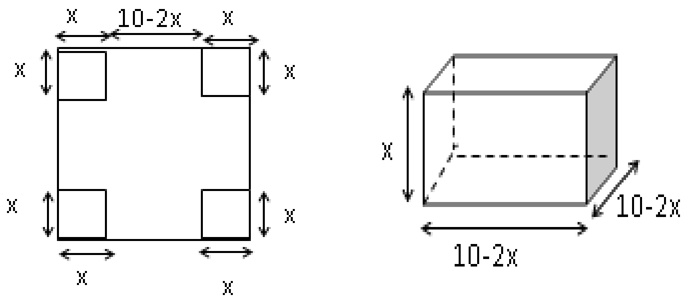
3º) Uma fábrica de componentes eletrônicos tem um custo para produzir x componentes dado por $C(x) = \dfrac{x^3}{3000} - \dfrac{x^2}{2} + 260x + 200$, com $C(x)$ em reais. Qual é o custo marginal que essa fábrica tem para produzir mais um componente quando:

a) $x = 0$? **Resposta**: 260 reais

b) $x = 100$? **Resposta**: 170 reais

c) $x = 400$? **Resposta**: 20 reais

4º) Cortando-se de um quadrado de 10cm de lado outros quadrados de cada um dos seus cantos, deseja-se construir uma caixa sem tampa de volume máximo. Qual deve ser a medida do lado do quadrado menor a ser recortado e qual o volume máximo?



Resposta: $x_{máximo} = \frac{5}{3} cm$ medida do lado do quadrado.

Resposta: $V_{máximo} = 74,07\, cm^3$

5º) Calcular o raio da base de uma lata de refrigerante cilíndrica cujo volume é $350\, ml$, de modo que o material gasto na confecção da lata seja mínimo $\left(1\, ml = 1\, cm^3\right)$.

Resposta: Com o raio da base da lata de refrigerante aproximadamente $r = 3,82\, cm$, o material gasto na confecção da lata será mínimo.

Noções

de Integrais

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$

O século XVII foi o período de muitos avanços na ciência, principalmente na matemática. Uma das maiores criações nesse ramo foi a invenção do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz. Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz como analítico. Leibniz usava a integração como uma soma e acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz, sendo utilizada até os dias de hoje, ou seja, a letra *S* (*summa*) escrito um pouco longo assumindo a forma ∫, para representar a área de uma figura através da soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas.

Diferentemente da forma que é ensinada nos cursos de cálculo, a integral surgiu antes da derivada. A integral foi desenvolvida a partir da necessidade de resolver problemas relacionados com comprimentos, áreas e volumes e a diferenciabilidade através dos problemas de tangentes de curvas.

Hoje em dia, o Cálculo Integral é largamente utilizado em diversas áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não apenas de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, entre outras, por exemplo.[5]

---

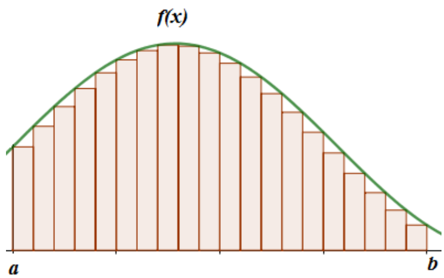
[5] Texto baseado em COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?* Editora Moderna, 2000.

Introdução

Uma das principais motivações para o desenvolvimento e estudo das Integrais parte da ideia do cálculo de área sob uma curva através da partição da região em retângulos infinitesimais.

Para isso vamos considerar uma função variando no tempo, como, por exemplo, velocidade, aceleração, etc. Descrita por um gráfico conforme segue:

Figura 33 – Partição em retângulos, de uma região sob uma curva f(x) num intervalo [a,b]



Fonte: Os autores

Para calcular a área hachurada sob a curva é necessário calcular a área de cada retângulo dessa região, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i$ onde os índices x_1, x_2, ..., x_n representam os subintervalos, conhecida como soma de Riemann, em homenagem a Georg Riemann (1826-1866), pois o mesmo determinou as funções para as quais tais somas têm limite para uma quantidade infinita de retângulos.

Matematicamente se escreve: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, desde que o limite exista, diz-se que a função é integrável em $[a,b]$.

Outro resultado importante que será usado no estudo do cálculo integral, é o Teorema do Valor Médio para Integrais (TVMI) cujo enunciado diz: Seja *f* uma função contínua num intervalo [*a*,*b*]. Então existe um valor ***c*** nesse intervalo tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$. Esse resultado será muito importante para o cálculo de integrais definidas, que faz uso do Teorema Fundamental do Cálculo, que será estudado posteriormente.

Primitiva de uma função ou antiderivada

Nesta seção, iremos definir o conceito de *primitiva* ou *antiderivada* de uma função, fundamental para o entendimento do cálculo integral.

Se f(x) é função derivada da função F(x), então F(x) é a função primitiva de f(x), isto é, F(x) é primitiva de f(x) se: $F'(x) = f(x)$.

Para facilitar a compreensão, vamos utilizar um exemplo numérico.

Considere a função $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$. Uma de suas primitivas é $F(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + c, c \in \mathbb{R}$, pois se calcularmos a derivada de $F(x)$ obteremos novamente a função $f(x)$. A constante *c* que aparece na primitiva é o que diferencia uma função dentro de uma *família* de funções.

Integrais indefinidas

Se *F(x)* é uma primitiva de *f(x)*, a expressão *F(x)+C* é chamada de integral indefinida da função *f(x)* e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Onde:

f(x) é o integrando;

dx é o indicativo da variável de integração;

F(x) é a primitiva de f(x);

C é a constante de integração.

Obs.: Em *toda integral indefinida deverá aparecer a constante* ***C.***

Regras de Integração (Principais Integrais Imediatas)

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \neq 0$ (Logaritmo Natural)
4. $\int e^x dx = e^x + c$ (Exponencial)
5. $\int sen(x)\, dx = \cos(x) + c$
6. $\int \cos(x)\, dx = -sen(x) + c$

Propriedades Operatórias

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ uma constante. Então:

- $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$
- $\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = f(x)dx \pm g(x)dx$

Integrais definidas

Seja uma função *f(x)* definida e contínua num intervalo real [a, b]. A integral definida de *f(x),* de **a** até **b**, é um número real, e é indicada pelo símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Onde:

f(x) é o integrando;

a é o limite inferior;

b é o limite superior.

F(a) e *F(b)* é a primitiva ou integral da função *f(x)* aplicada nos limites inferiores e superiores, respectivamente.

Exemplos:

a) $\int_1^2 \left(x^2 + 2x - 1 \right) dx$

b) $\int_0^1 3e^x \, dx$

Resolução:

a) $\int_1^2 \left(x^2+2x-1\right)dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 2xdx - \int_1^2 1 \cdot dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \left.x^2\right|_1^2 - \left.x\right|_1^2.$

Substituindo os valores temos:

$$\int_1^2 \left(x^2+2x-1\right)dx = \left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+\left(2^2-1^2\right)-\left(2-1\right)=\frac{7}{3}+3-1=\frac{13}{3}.$$

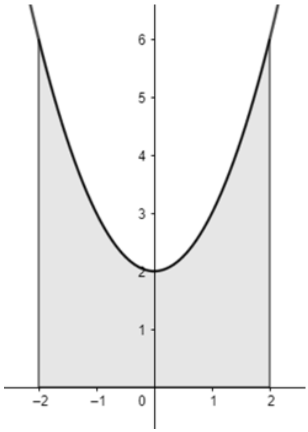
b) $\int_0^1 3e^x\,dx = 3\cdot e^x \Big|_0^1 = 3e^1-3e^0 = 3e-3 = 3(e-1).$

Interpretação geométrica da integral – Cálculo de Áreas

Toda Integral Definida possui um valor definido (número real). Tal valor dessa integral pode ser interpretado geometricamente como uma área sob uma dada curva (função) num intervalo fechado qualquer. Para melhor compreender, observe os exemplos que seguem.

1. Considere a Função $f(x)=x^2+2$ no intervalo entre [-2,2], conforme o gráfico da figura a seguir.

Figura 34 – Interpretação geométrica de integrais: Área de uma função



Fonte: Os autores

A área da região hachurada é numericamente a integral $\int_{-2}^{2}\left(x^2+2\right)dx$.

Calculando a integral temos:

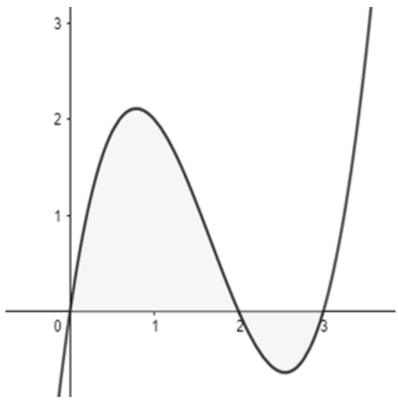
$$A=\int_{-2}^{2}\left(x^2+2\right)dx=\int_{-2}^{2}x^2dx+\int_{-2}^{2}2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}+\left.2x\right|_{-2}^{2}=$$

$$\underbrace{\left[\left(\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)\right]}_{=\frac{16}{3}}+\underbrace{\left[2.2-2.(-2)\right]}_{=8}=\frac{16}{3}+8=\frac{40}{3}u.a.$$

Portanto, a área da região é $\frac{16}{3}u.a.$ (unidade de área).

2. Considere agora a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ no intervalo entre [0,3].

Figura 35 – Gráfico de uma função com intervalos positivo e negativo



Fonte: Os autores

Observe que essa função é positiva em [0,2] e negativa em [2,3]. Dessa forma, para o cálculo da área, procede-se da seguinte maneira:

$$A = \underbrace{\int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx}_{A_1} - \underbrace{\int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx}_{A_2}. \qquad (1)$$

Vamos calcular separadamente, e em seguida efetuar a subtração.

$$A_1 = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 - \left.\frac{5x^3}{3}\right|_0^2 + \left.3x^2\right|_0^2$$. Como o limite inferior é zero e temos variáveis em todas as parcelas, basta substituir o limite superior. Assim, tem-se que:

$$A_1 = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \frac{2^4}{4} - \frac{5.2^3}{3} + 3.2^2 = 4 - \frac{40}{3} + 12 \Rightarrow$$

$$A_1 = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = 16 - \frac{40}{3} = \frac{8}{3}$$

Calculando a segunda integral, tem-se:

$A_2 = \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_2^3 - \left.\frac{5x^3}{3}\right|_2^3 + \left.3x^2\right|_2^3$. Substituindo os limites superiores e inferiores, respectivamente, temos:

$$A_2 = \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \left(\frac{3^4}{4} - \frac{5.3^3}{3} + 3.3^2\right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{5.2^3}{3} + 3.2^2\right) \Rightarrow$$

$$A_2 = \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \underbrace{\left(\frac{81}{4} - \frac{135}{3} + 27\right)}_{=\frac{9}{4}} - \underbrace{\left(4 - \frac{40}{3} + 12\right)}_{=\frac{8}{3}} \Rightarrow$$

$$A_2 = \int_2^3 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \frac{9}{4} - \frac{8}{3} = -\frac{5}{12}$$

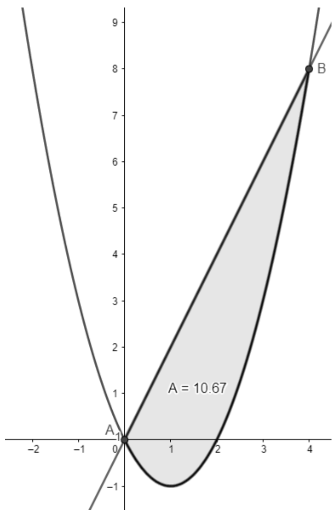
Substituindo os valores de A_1 e A_2 em (1), temos:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} u.a.$$

1. Determinar a área da região compreendida entre as curvas $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = 2x$.

Para a solução desse problema se faz necessário encontrar a interseção entre as duas curvas, uma vez que tal região é limitada entre duas funções. Para isso, igualamos as funções e resolvemos a equação resultante. Assim, para $f(x) = g(x)$, encontramos as raízes 0 e 4, e o seu respectivo gráfico:

Figura 36 – Interpretação geométrica: Área de uma função definida por duas curvas



Fonte: Os autores

Para o cálculo da área dessa região, procede-se da seguinte maneira:

$$A = \int_0^4 \left[g(x) - f(x) \right] dx = \int_0^4 \left[2x - x^2 + 2x \right] dx = \int_0^4 \left[-x^2 + 4x \right] dx$$

$$A = \left(\frac{-x^3}{3} + 2x^2 \right) \Bigg|_0^2 = -\frac{(4)^3}{3} + 2 \cdot 4^2 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3} \cong 10.67$$

Exercícios de Aplicação

1º) Calcule a área sob a curva $y = x^3$ no intervalo $[2,3]$. Represente geometricamente.

Resposta: $\frac{65}{4}u.a$

2º) Ache a área total entre a curva $y = x^2 - 3x - 10$ e o eixo x no intervalo $[-3,8]$. Faça um esboço da região.

Resposta: $\frac{9}{2}u.a$

3º) Suponha $f(x)$ uma função conhecida e que queiramos encontrar uma função $F(x)$, tal que $y = F(x)$ satisfaça a equação $\frac{dy}{dx} = f(x)$. As soluções desta equação são as antiderivadas de $f(x)$. A equação $\frac{dy}{dx} = f(x)$ é chamada de equação diferencial. Com base nessa informação, resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2$, $y(1) = 2$.

Resposta: $y = \frac{x^3 + 5}{3}$

4º) Uma bola é jogada para cima com velocidade inicial a 64 m/s de uma altura inicial de 80 m. Determine:

a) A função posição da altura s em função do tempo *t*.

b) O tempo necessário para a bola atingir o chão?

Sugestão: Use a equação $S = S_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

5º) Na Lua, a aceleração da gravidade é 1,6 m/s2. Um objeto é solto de um penhasco na Lua e atinge sua superfície 20s após. Determine:

a) Qual profundidade ela caiu?

Resposta: 320m

b) Qual era a velocidade no instante do impacto?

Resposta: 32 m/s

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática?* Editora Moderna, 2000.

ENEM 2015. Ministério da Educação. Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_07_AZUL.pdf. Acesso em: 10 jun. 2023.

ENEM 2017. Ministério da Educação. Exame Nacional do Ensino Médio. INEP – *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_7_prova_azul_12112017.pdf. Acesso em: 10 jun. 2023.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

UEA 2020. Universidade do Estado do Amazonas. *Vestibular 2020, Acesso 2021*. Prova de Conhecimentos Gerais. Disponível em: https://s5.static.brasilescola.uol.com.br/vestibular/2021/06/provas-e-gabaritos-uea-2020-2021.pdf. Acesso em: 10 jun. 2023.

Sobre os autores

Alcides de Castro Amorim Neto

Doutor em Clima e Ambiente com ênfase em Interações Biosfera-Atmosfera da Amazônia pela UEA/INPA (2013). Mestre em Matemática Pura com ênfase em Geometria Diferencial pela UFAM (2007). Especialista em Metodologia do Ensino Superior pela UNINORTE (2004). Graduado em Tecnologia Elétrica pela UTAM (UEA) (1998) e em Matemática pela UFAM (2000). Tem experiência em Matemática Pura, Aplicada e Educação Matemática. Professor Associado da Universidade do Estado do Amazonas – UEA, atuando em nível de graduação no curso de Licenciatura em Matemática e na Pós-graduação no Mestrado Acadêmico em Educação e Ciências na Amazônia – PPGEEC e no Mestrado Profissionalizante em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Carlos Frank Lima dos Santos

Doutor em Matemática Aplicada e Estatística pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/2022). Mestre em Matemática Aplicada pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP/2013). Especialista em Educação Matemática pela Universidade do Estado do Amazonas (UEA/2009) e Licenciado em Matemática pela Escola Superior Batista do Amazonas (ESBAM/2003). Atua na área de Matemática e Matemática Aplicada com ênfase em Biomatemática atuando na linha de Modelagem Matemática e simulação computacional em: ecologia matemática, impacto ambiental, dinâmica de população e educação matemática.

Rogério Jacinto de Moraes Júnior

Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - REAMEC (2022). Possui Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT (2015). Especialista em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (2009). Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (2001). Atualmente é professor do colegiado de matemática e física do Instituto de Ciências Exatas e Tecnologia (ICET-UFAM). Desenvolve pesquisas sobre Formação de Professores e História da educação matemática.

título Tópicos essenciais de Cálculo e Geometria Analítica para o ensino superior

Autores Alcides de Castro Amorim Neto
Carlos Frank Lima dos Santos
Rogério Jacinto de Moraes Júnior

tipografias Sora
Tinos

número de páginas 168

Março de dois mil e vinte e quatro, nove anos da publicação de Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função, de Alessandro Jacques Ribeiro e Helena Noronha Cury.

editora UEA

para conhecer mais da *editora***UEA** e de nossas publicações,
acesse o qr code abaixo

ueaeditora

Este livro trata dos principais conteúdos que qualquer estudante, principalmente da área de exatas, do ensino superior, precisa conhecer e entender para que possa ter um nível bom de aprendizagem. A obra aborda desde a ideia de conjuntos numéricos, conceitos de funções, geometria, trigonometria e cônicas até as noções de limites, derivadas e integrais, que constitui a base fundamental da matemática em nível superior, sempre apresentando contextos históricos. Com uma linguagem simples e objetiva, sem perder o rigor matemático, apresentamos exemplos e exercícios de aplicação, despertando a curiosidade do leitor em pesquisar.

Alcides de Castro Amorim Neto
Carlos Frank Lima dos Santos
Rogério Jacinto de Moraes Júnior

editora UEA
UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
AMAZONAS GOVERNO DO ESTADO