UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAMERSON CHAVES DO CARMO

RADICAL DUPLO: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES

MANAUS, MARÇO
2023

JAMERSON CHAVES DO CARMO

RADICAL DUPLO: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso elaborado junto à disciplina TCCII, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidadde do Estado do Amazonas, para a obtenção do grau de licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Alessandro Monteiro de Menezes

MANAUS, MARÇO
2023

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **JAMERSON CHAVES DO CARMO.**

Em 14 de março de 2023, às 18:00h, na Sala Maria Clara Dantas da Escola Normal Superior da UEA na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Me. Alessandro Monteiro de Menezes, Me. Fábio de Souza Costa e Dr. Almir Cunha da Graça Neto, o(a) aluno(a) **JAMERSON CHAVES DO CARMO** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: **"RADICAL DUPLO: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES."** A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela Aprovação do referido trabalho, com o conceito 9,6 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Agradecemos a sua colaboração.

Manaus, 14 de março de 2023.

Elisângela Ramos da Costa

Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Fábio de Souza Costa

Avaliador 1

Almir Neto

Avaliador 2

Jamerson Chaves do Carmo

Aluno

Resumo

Essa pesquisa delimita-se ao estudo de Radical Duplo da forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ ou $\sqrt{a \pm q\sqrt{b}}$, na qual o objetivo é apresentar os métodos para resolução de Radical Duplo, transfor mando-o em soma ou diferença de dois radicais simples, aplicando-os em questões de concursos, especialmente em olimpíadas de matemática. Para isso, foi necessário abordar conceitos elementares tais como potenciação, fatoração, produtos notáveis e racionalização, nos quais, foram desenvolvidos cinco métodos de resolução a partir dessas identidades algébricas.

Palavras-chave: Radical Duplo; métodos de resolução; questões (olimpíadas e concurso)

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus toda honra e glória por ter me dado sabedoria e forças para concluir este trabalho. A minha esposa Vania, pela ajuda em suas orações e companheirismo. Ao Mestre Alessandro Monteiro de Menezes, por ter me dado a oportunidade através de seus ensinos do curso de matemática básica, o qual me incentivou e despertou o tema deste trabalho. A minha querida professora Me. Helisângela Ramos da Costa, que me ajudou a motivar minhas limitações físicas e mentais. E ao meu grande amigo Bruno do Nascimento, hoje aluno do ITA, pela sua gentileza, parceria e por acreditar no meu potencial, ajudando sempre no que era preciso.

Sumário

Introdução

O conteúdo de Radical Duplo geralmente surge com uma abordagem superficial nas escolas, pela própria abordagem traduzida nos livros didáticos, sendo apresentada apenas como uma fórmula de resolução dos problemas, que não se adapta a todas as questões e são raras as abordagens que envolvem a parte da construção e associação. Observou-se que as questões apresentadas nos livros não são bem exploradas, dificultando o melhor aprendizado do conteúdo no ensino fundamental.

A pesquisa justifica-se em mostrar outros métodos de resolução de Radical Duplo, além da fórmula elementar apresentada nos livros didáticos, a fim de compreensão e entendimento do aluno através de diferentes formas que estimule o pensamento lógico-dedutivo, proporcionando assim, a compreensão do educando, dando habilidades de enxergar os métodos de decomposição de números, potenciação, fatoração, racionalização, soma e produto, produtos notáveis e outros, de maneira a facilitar o entendimento das resoluções. Sendo assim, a pergunta diretriz da pesquisa é: Como os métodos de resolução de Radical Duplo podem ser aplicados em questões de concursos e de olimpíadas?

Nesse contexto, o objetivo geral da pesquisa é apresentar os métodos para resolução de Radical Duplo, transformando-o em soma ou diferença de dois radicais simples, aplicando-os em questões de concursos, especialmente em olimpíadas de matemática.

Dentre os objetivos específicos da pesquisa destacam-se: compreender aspectos históricos sobre os estudos relacionados a Radical Duplo; introduzir os conceitos que são necessários para a construção dos métodos de resolução de Radical Duplo; demonstrar outros métodos elementares de transformação do Radical Duplo em soma ou diferença de radicais simples e aplicar esses métodos em questões de concursos e de olimpíadas de matemática.

A pesquisa segue uma abordagem quantitativa que visa mostras métodos de produzir modelos de resolução com aplicações em questões, seguindo uma estratégia explicativa no qual se aprofunda o conhecimento do assunto possibilitando a resolução de questões mais específica, usando o procedimento bibliográfico baseados em livros e publicações de artigos de autores que trabalharam a temática mais afinco, os quais não foram possíveis encontrar nos livros didáticos brasileiros.

A pesquisa está estruturada em 4 capítulos: No capítulo 1, destaca sobre a Revisão da Literatura, na qual aborda-se os aspectos histórico e preliminares bem como alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da álgebra, e aborda algumas identidades algébricas que são bases para o desenvolvimento de resolução de Radical Duplo.

O capítulo 2, refere-se à metodologia da pesquisa que particulariza os parâmetros metodológicos tais como: abordagem, estratégia e procedimento para a construção da pesquisa.

No capítulo 3, discorre os métodos trabalhados de resolução de Radical Duplo, demonstrando o método elementar bem como outros métodos que auxiliam no desenvolvimento de questões mais complexas.

Por fim, o capítulo 4 apresenta os métodos de resolução aplicados em questões de concursos e olimpíadas, apresentando as identidades algébricas e suas soluções.

Capítulo 1

Revisão de Literatura

1.1 Aspectos Históricos e Preliminares

O desenvolvimento da Álgebra caracterizava-se por três estágios: Álgebra retórica; sincopada e simbólica. A primeira retratava os argumentos de um problema que era escrito em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A segunda adotava abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetiam mais frequentemente. E finalmente a última, referenciava as resoluções expressas em uma espécie de taquigrafia matemática, formada por símbolos (BOYER, 1996).

A Álgebra recebeu também contribuições de alguns povos como os babilônicos, egípcios, gregos e árabes, assim como matemáticos de toda parte do mundo, pois através dessa contribuição originalizou-se a necessidade do homem de resolver problemas comuns ao nosso dia a dia. No entanto, destacou-se alguns deles que tornaram possível o desenvolvimento mais evidente dessa área do conhecimento matemático. O matemático Diofanto de Alexandria (200 d.c) teve grande contribuição para o desenvolvimento da álgebra através da sincopação dela (uso de figuras), ele foi chamado de pai da álgebra, o que não foi tão conveniente, pois em seu trabalho tratou mais sobre conteúdo relacionado às operações numéricas, embora a generalização fosse utilizada por ele.

Atualmente a Álgebra é usada com abreviações e não mais com palavras como era empregada na sua primeira fase com os povos antigos. Diofanto também foi ator de três trabalhos: Aritmética, o mais importante deles, do qual remanesceram 6 dos 13 livros; sobre Números Poligonais do qual restou apenas um fragmento; e a obra

Porismas, que se perdeu. A Aritmética teve muitos comentadores, mas a primeira voz a clamar por uma tradução do original grego foi a de Regiomontanus, ao descobrir em Pádua um exemplar da obra. A obra Aritmética, abordava uma teoria algébrica dos números, pois parte remanescente desse trabalho se dedicava à resolução de 130 problema variados, incluindo equações do primeiro e segundo graus.

Já o matemático francês François Viète(1540 - 1603), conhecido por Vieta, foi um dos primeiros matemáticos que tentou fazer essa introdução da álgebra simbólica. Ele introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Foi um algebrista excelente, de modo que não é de se surpreender que o matemático aplicou a álgebra a trigonometria e a geometria (EVES, 2011).

Outro matemático importante que contribuiu para o estudo de Radical Duplo foi o matemático, astrólogo, astrônomo e professor indiano Bhaskara (1114 – 1185) conhecido como Bhaskara II, nasceu na cidade de Vijayapura, na Índia, local de excelente tradição de matemáticos. Seu pai era astrônomo e lhe ensinou os princípios da matemática e astronomia. Bhaskara foi chefe do observatório astronômico de Ujjain, especialista em estudos sobre álgebra, o que levou a aprofundar suas pesquisas sobre as equações e sistemas numéricos e escreveu três obras fundamentais: “Lilavati”, “Bijaganita” e ”Siddhanta Siromani”.

A primeira trata de questões ligadas à aritmética, ao passo que a segunda obra refere-se à Álgebra, problemas de equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas e geométricas. A última obra, “Siddhanta Siromani”, é dividida em duas partes: a primeira trata sobre astronomia e a segunda sobre a esfera. Ele trabalhou com a questão da raiz quadrada em equações, sabendo que existiam duas raízes na resolução da equação de segundo grau. Destacou-se na resolução algébrica da equação quadrática por meio de utilização do método de completamento de quadrado, denominado método de hindu (ROQUE, 2012 apud (BATISTA, 2019) p.20). Bhaskara conhecia também identidades como:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Destacamos um equívoco sobre a história de Bhaskara, que ainda é encontrado em alguns livros didáticos da literatura brasileira a respeito da fórmula atribuída a ele para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, conhecida como “fórmula de Bhaskara”, pois na verdade essa fórmula está direcionada ao matemático também indiano chamado Sridhara (870-930), que já usava o método de resolver equação quadrática empregado pelos babilônicos no segundo milênio a.c.(GARBI, 2010).

1.2 Abordagem de Algumas Identidades Algébricas

Através de algumas identidades algébricas desenvolvidas pelos matemáticos que contribuiram na história da Álgebra os quais foram abordados durante a seção anterior, nos deram a possibilidade de solucionar problemas e questões relacionadas não somente ao assunto abordado de Radical Duplo, mas também, encontramos formas de resolver expressões algébricas e cálculos matemáticos de maneira mais simples ultilizando apenas essas identidades.

Para se trabalhar os métodos e aplicações de resolução de Radical Duplo que serão abordadas neste trabalho, buscou-se tirar algumas questões de Olimpíadas de matemática internacionais e de concursos, das quais usaremos algumas identidades algébricas relacionadas ao conteúdo. A respeito dessas competições, a 1° Olimpíada de matemática foi em 1804 na Hungria, realizada para alunos do último ano da escola secundária. Com o passar dos anos, competições como essa se espalharam pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1° Olimpíada Internacional de Matemática (International Mathematical Olympiad- IMO), na Romênia, com países daquela região.

No Brasil, a Academia Paulista de Ciências realizou a Olimpíada Paulista de Matemática, criada em 1977 e dois anos mais tarde, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), surgiu a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), e em conjunto com as Olimpíadas Regionais de Matemática, envolve anualmente a participação de cerca de 200 mil estudantes no Brasil. Entretanto, para promover o ensino da Matemática nas escolas públicas, a SBM, em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), criou em 2005, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), um projeto do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) (BRAGANÇA, 2013).

Nesses tipos de questões de concursos e olimpíadas, encontramos problemas e exercícios com elevado nível de dificuldade, pois o objetivo dessas questões requerem um pouco mais de conhecimento para solucioná-las, pois trabalha o raciocínio lógico do aluno, como afirma:

> Essa classificação apresenta as diferentes naturezas que problemas matemáticos podem apresentar, mas que mesmo assim, podem ter um padrão a seguir em todas as resoluções. É basicamente o que chama de raciocínio heurístico, que leva em consideração certos padrões lógicos que são importantes para a resolução de problemas, e tem a ver com aspectos psicológicos de quem resolve o problema. Desta forma, todos os tipos de problemas situam-se no campo da heurística, que diante das considerações acima, pode ser entendida basicamente como algo o qual "trata do comportamento humano em face de problemas.(LAIER, 2014 apud (BARROS, 2018) p.18)

Para isso, será necessário abordarmos alguns conceitos de: potenciação, radiciação, racionalização, fatoração algébrica e outros conteúdos que serão necessários para a utilização de resolução de Radicais Duplos.

1.2.1 Potenciação

Definição 1. [1]*Seja a um número real e n um número natural. Potência de base a e de expoente n, é o número a^n tal que:*

$$\begin{cases} a^0 = 1, \; para \; a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall \; n \geq 1 \end{cases}$$

Dessa definição, decorre que:

$$\begin{aligned} a^1 &= a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \\ a^2 &= a^1 \cdot a = a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

Se $a, b \in \mathbb{R}, \; m \; , n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, então valem as seguintes propriedades:

Propriedade das Potências

P 1. ***Multiplicação de potências de mesma base****: Um produto de potências de mesma base é igual a potência que se obtém conservando a base e adicionando*

[1]Nesta seção as definições são baseadas na obra de (IEZZI, 2013)

os expoentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

P 2. ***Divisão de potências de mesma base***: *Um quociente de potências de mesma base é igual a potência que se obtém conservando a base e subtraindo os expoentes (para $a \neq 0$):*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

P 3. ***Multiplicação de potências de mesmo expoente***: *Um produto de potências de mesmo expoente é igual a potência que se obtém multiplicando as bases e conservando o expoente:*

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m.$$

P 4. ***Divisão de potências de mesmo expoente***: *Um quociente de potências de mesmo expoente é igual a potência que se obtém dividindo as bases e conservando o expoente:*

$$a^m : b^m = (a : b)^m \; ou \; \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \; para \; (b \neq 0).$$

P 5. ***Potência de potência***: *Uma potência elevada a um dado expoente é igual à potência que se obtém conservando a base e multiplicando os expoentes:*

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

1.2.2 Radiciação

Definição 2. [2] *Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, sendo $n \geq 1$, é demonstrável que existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$. Ao número b chamaremos* ***raiz enésima aritmética*** *de a e indicaremos pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, em que a é chamado* ***radicando*** *e n é o* ***índice***.

[2] Definição baseada na obra de (IEZZI, 2013)

Observações:

[3]**O 1.** Quando $n = 2$ e $x > 0$, escrevemos simplesmente $\sqrt{x}$, em vez de $\sqrt[2]{x}$, e dizemos que $\sqrt{x}$ é a **raiz quadrada** de x; quando $n = 3$, dizemos que $\sqrt[3]{x}$ é a **raiz cúbica** de x.

O 2. Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito, pois:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Propriedades da Radiciação

[4]A radiciação é a operação inversa da potenciação, todo radical pode ser escrito na forma de potência, isto é:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0,\ m\ e\ n\ inteiros\ ,\ n \geq 1).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$, temos:

P 6. *O valor de uma raiz aritmética não se altera* ***quando dividimos*** *ou* ***multiplicamos*** *o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número:*

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}\ ou\ \sqrt[n:p]{a^{m:p}} \quad sendo\ (a > 0)\textbf{.}$$

P 7. *A raiz aritmética de um produto ou divisão é igual ao produto ou divisão das raízes aritméticas dos fatores:*

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad sendo\ (a > 0,\ b > 0),\ \textit{e}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad sendo\ (a > 0,\ b > 0\textbf{.}$$

P 8. *Quando* n *é um inteiro positivo,* $a > 0$ *e m é um expoente inteiro, vale a igualdade*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\textbf{.}$$

P 9. *Quando* m *e* n *são inteiros positivos e* $a > 0$*, podemos transformar raiz de raiz em um só radical, multiplicando os índices das raízes:*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}\ \textbf{.}$$

[3]Observações baseadas na obra de (CAMINHA, 2013)
[4]Propriedades baseadas na obra de (IEZZI, 2013)

Racionalização de denominadores

Definição 3. *Racionalizar uma fração consiste em multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da expressão por um mesmo fator, (chamado fator racionalizante), transformando o denominador com valor irracional em uma fração equivalente com o denominador racional.*

Podemos, por exemplo, racionalizar o radical $\frac{a}{\sqrt{b}}$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{Q}^*$:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b}.$$

1.2.3 Módulo dos Números Reais e Equações Modulares

Definição 4. [5]*Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se **módulo** ou **valor absoluto** de x, que se indica por $|x|$, por meio da relação:*

$$|x| = \begin{cases} x \ se \ x \geq 0 \\ e \\ -x \ se \ x < 0 \end{cases}.$$

Isso significa que:

1º) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;

2º) o módulo de um número real negativo é igual ao simétrico desse número.

Assim, por exemplo, temos:

$$|+2| = +2, \ |-7| = +7, \ |0| = 0, \ |-\frac{3}{5}| = +\frac{3}{5}, \ |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2}, \text{e } |+\sqrt{3}| = +\sqrt{3}.$$

Propriedades do Módulo

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

P 10. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

P 11. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

P 12. $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall \ x, y \in \mathbb{R}$;

[5]Nesta seção as definições e propriedades são baseadas na obra de IEZZI(2013)

P 13. $|x|^2 = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}$;

P 14. $\dfrac{|x|}{|y|} = |\dfrac{x}{y}|, y \neq 0$;

Equações Modulares

[6]Para a solução de equações modulares pode-se usar a definição de módulo de um número real e, em seguida, resolver uma equação não modular para cada intervalo na reta real.

Exemplo 1. (Caminha-2014) Resolva a equação $|x+1| + |x-2| + |x-5| = 7$.
Resolução:
Utilizando a definição de módulo de um número real, podemos notar que:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \ se\ x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -x-1, \ se\ x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases},$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, \ se\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -x+2, \ se\ x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$$

e

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, \ se\ x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ -x+5, \ se\ x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5 \end{cases}.$$

Agora, desde que a interseção das condições $x < -1$ ou $x \geq -1$, $x < 2$ ou $x \geq 2$, $x < 5$ ou $x \geq 5$ particiona a reta nos intervalos $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$, $[2, 5)$ e $[5, +\infty)$, faz-se mister considerar separadamente x em cada um de tais intervalos, a fim de simplificar o primeiro membro da equação. Procedendo desta maneira, obtemos:

$$|x+1| + |x-2| + |x-5| = \begin{cases} -x-1-x+2-x+5 = -3x+6, \ se\ x < -1 \\ x+1-x+2-x+5 = -x+8, \ se\ \ -1 \leq x < 2 \\ x+1+x-2-x+5 = x+4, \ se\ 2 \leq x < 5 \\ x+1+x-2+x-5 = 3x-6, \ se\ x \geq 5 \end{cases}.$$

Por fim, note que:

[6]Nesta seção a abordagem do método de solução de equações modulares é baseada na obra de (CAMINHA, 2014)

- $-3x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$; como a condição $-\frac{1}{3} < -1$ não é satisfeita, não há soluções neste caso.

- $-x + 8 = 7 \Leftrightarrow x = 1$; como a condição $-1 \leq 1 < 2$ é satisfeita, $x = 1$ é solução da equação.

- $x + 4 = 7 \Leftrightarrow x = 3$; como a condição $2 \leq 3 < 5$ é satisfeita, $x = 3$ é solução da equação.

- $3x - 6 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{13}{3}$; como a condição $\frac{13}{3} \geq 5$ não é satisfeita, não há soluções neste caso.

Tendo com raízes da equação os números 1 e 3. Portanto, S =$\{1, 3\}$

1.2.4 Produtos Notáveis

Definição 5. *São expressões algébricas ou polinômios que nos permitem manipular, do modo mais conveniente, os fatores de uma expressão algébrica, utilizados principalmente para a fatoração de polinômios.*

Dados: a, b e $c \in \mathbb{Z}^*$ são válidas as seguintes propriedades:

P 15. ***Quadrado da soma de dois termos:***

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ .}$$

P 16. ***Quadrado da diferença de dois termos:***

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ .}$$

P 17. ***Diferença de dois quadrados:***

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \text{ .}$$

P 18. ***Quadrado da soma de três termos:***

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ .}$$

P 19. ***Cubo da soma de dois termos:***

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \text{ .}$$

P 20. ***Cubo da diferença de dois termos:***

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ .}$$

P 21. ***Produto de Stevin:***

$$(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + ab \text{ .}$$

1.2.5 Fatoração Algébrica

Definição 6. *Fatorar um polinômio significa decompor em fatores comuns, transformando-o em produto.*
Veremos agora alguns casos de fatoração.

- Fatoração por evidência: Quando os termos de um polinômio apresentam um fator comum, podemos colocá-lo em evidência.
  $2x^3 - 6x^2 + 10x = (2x) \cdot (x^2 - 3x + 5)$ onde $2x$ é o fator comum.

- Fatoração de uma diferença de quadrados:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ &= a \cdot (a+b) - b(a+b) \\ &= (a-b) \cdot (a+b) \end{aligned}$$

- Fatoração de uma soma ou diferença de cubos:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= (a+b) \cdot [(a+b)^2 - 3ab] \\ &= (a+b) \cdot [a^2 + 2ab + b^2 - 3ab] \\ &= (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

  Analogamente, podemos deduzir que $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

1.2.6 Fórmula Quadrática

No Brasil, a fórmula para resolver a equação do 2^o grau é conhecida como fórmula de Bhaskara; entretanto, não foi Bhaskara quem a descobriu. Segundo GARBI 2010, o matamático Sridhara já usava esse método chamado de "completamento de quadadrado", atribuida na época dos babilônico no 2^o milênio a.c, os quais já resolviam equações quadráticas. Sabe-se que somente com o matemático francês François Viète (1540-1603) passou-se a usar fórmulas para obter as raízes de uma equação do 2^o grau. Essa fórmula será essencial para apresentar a fórmula elementar de resolver Radical Duplo abordada nos livros didáticos, como (ARAÚJO, 2014) e (CAMINHA, 2013). Portanto, a forma deduzida para extração das raízes da equação quadrática do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, denominada **fórmula quadrática**, será demosntrada abaixo:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
ax^2 + bx &= -c \\
4a(ax^2 + bx) &= -4ac \\
4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= -4ac + b^2 \\
(2ax + b)^2 &= -4ac + b^2 \\
\sqrt{(2ax + b)^2} &= \pm\sqrt{-4ac + b^2} \\
2ax + b &= \pm\sqrt{-4ac + b^2} \\
2ax &= -b \pm \sqrt{-4ac + b^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Teorema 1: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x + y = a$ e $xy = b$, então x e y são raízes da equação $k^2 - ak + b = 0$.

Demonstração: Pelo teorema fundamental da álgebra, x e y são as raízes que zeram a equação: $(k - x)(k - y) = 0 \Leftrightarrow k^2 - (x + y)k + xy = 0$. Daí, se $x + y = a$ e $xy = b$, então, x e y são as raízes da equação $k^2 - ak + b = 0$, como se queria demonstrar.

1.2.7 Radical Duplo

Definição 7. [7] *São radicais de expressões da forma* $a \pm q\sqrt{b}$*, onde* $a \in \mathbb{R}^*$ *e* $q, b \in \mathbb{R}^*_+$*.*

Exemplo 1: $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Exemplo 2: $\sqrt{3\sqrt{2}-4}$

Definição 8. [8]*Seja o Radical Duplo do tipo R=* $\sqrt{a \pm q\sqrt{b}}$*, com* $a, b, q \in \mathbb{Q}^*_+$*,* $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^*_+$ *e sendo* $a \pm q\sqrt{b} > 0$*. Dizemos que R é um* ***Radical Duplo Direto*** *quando existem* x*,* $y \in \mathbb{Q}^*_+$*, com* $x > y$*, tais que, R=* $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$*.*

A **fórmula elementar** abaixo foi desenvolvida pelo matemático Bhaskara para transformar Radicais Duplos em soma ou diferença de radicais simples:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}},$$

onde $a \in \mathbb{Q}^*_+$,$b \in \mathbb{Q}^*_+$ e $c = \sqrt{a^2 - b} \in \mathbb{Q}^*_+$.

[9]Nesse momento, iremos demonstrar esta **fórmula elementar** encontrada nos livros didáticos do ensino fundamental.

Teorema 2: Seja R = $\sqrt{a \pm q\sqrt{b}}$, com $a, b, q \in \mathbb{Q}^*_+$, $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^*_+$ e sendo $a \pm q\sqrt{b} > 0$. Se R é um **Radical Duplo Direto** então:

$$R = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

onde $c = \sqrt{a^2 - bq^2} \in \mathbb{Q}^*_+$.

[7]Definição baseada no artigo de (Gkioulekas, 2017)
[8]Definição baseada no artigo de (Gkioulekas, 2017)
[9]Demosntração baseada no artigo de (Gkioulekas, 2017)

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ com $x > y$, temos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a \pm q\sqrt{b}} &= \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \\
\left(\cancel{\sqrt{}}\,a \pm q\sqrt{b}\right)^{\cancel{2}} &= (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 \\
a \pm q\sqrt{b} &= (\cancel{\sqrt{}}x)^{\cancel{2}} \pm 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + (\cancel{\sqrt{}}y)^{\cancel{2}} \\
a \pm \sqrt{q^2 b} &= x \pm \sqrt{4xy} + y \\
a \pm \sqrt{q^2 b} &= (x + y) \pm \sqrt{4xy}
\end{aligned}$$

Como $a, b, q \in \mathbb{Q}_+^*$ e queremos que $x \in \mathbb{Q}_+^*$ e $y \in \mathbb{Q}_+^*$, então por comparação:

$$\begin{cases} a = x + y \\ q^2 b = 4xy. \end{cases}$$

Que equivale ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = \dfrac{q^2 b}{4}. \end{cases}$$

Daí, do **Teorema 1**, temos que x e y são raízes da equação:

$$1 \cdot k^2 - a \cdot k + \frac{q^2 b}{4} = 0\,\textbf{.}$$

Cujas soluções, pela **fórmula quadrática**, são:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{q^2 b}{4}}}{2 \cdot 1} \text{ e}$$

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{q^2 b}{4}}}{2 \cdot 1},$$

pois $x > y$.

Daí, fazendo as devidas simplificações:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - q^2 b}}{2} \text{ e}$$

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - q^2 b}}{2}.$$

Fazendo $c = \sqrt{a^2 - q^2 b}$ teremos:

$$\boxed{\sqrt{a \pm q\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}}.$$

Observação: Note que, se q =1 então, $c = \sqrt{a^2 - b}$.

Exemplo 2. (**RESOLUÇÃO 1.**) Simplifique o radical duplo $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$.

Resolução:

A fim de utilizar o **Teorema 2**, tomamos: $a = 5$ e $b = 24$. Daí usando:

$$c = \sqrt{a^2 - b}$$

temos:

$$c = \sqrt{5^2 - 24} = \sqrt{25 - 24} = 1.$$

Logo:

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Observou-se que, é possível fazermos uma terceira definição de Radical Duplo.

Definição 9. [10] *Seja o Radical Duplo do tipo R=* $\sqrt{a \pm q\sqrt{b}}$*, com* $a \in \mathbb{Q}^*$*,* $b, q \in \mathbb{Q}^*_+$ *,* $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}^*_+$*, sendo* $a \pm q\sqrt{b} > 0$*. Dizemos que R é um* ***Radical Duplo Indireto****, quando existem* $x, y \in \mathbb{Q}^*_+$*, com* $x > y$*, tais que R=* $\sqrt[4]{b} \cdot (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})$*.*

Um teorema obtido desta definição será trabalhado no próximo capítulo, pelo qual verificaremos os métodos de resolução desse tipos de Radical Duplo Indireto.

Verificou-se que de fato é importante analisarmos primeiramente a natureza da existência de condições do Radical Duplo, para que possamos com base nessas análise, trabalharmos os métodos de resoluções. Percebemos após ultilizar esta

[10] Definição baseada no artigo de (Gkioulekas, 2017)

fórmula elementar, que é possível minimizar alguns cálculos, quando identificamos algumas representações do Radical Duplo; entretanto, será necessário desenvolver outros métodos de resolução, os quais serão abordados nos próximos capítulos desse trabalho.

Capítulo 2

Metodologia da Pesquisa

2.1 Abordagem Metodológica

O propósito dessa pesquisa foi buscar uma metodologia de aprendizagem na qual o estudante ao analisar a questão, tenha o entendimento do problema e visualize quais os melhores métodos de aplicações para Radical Duplo.

> A Metodologia, em um nível aplicado, examina, descreve e avalia métodos e técnicas de pesquisa que possibilitam a coleta e o processamento de informações, visando ao encaminhamento e à resolução de problemas e/ou questões de investigação(PRODANOV; FREITAS, 2013, p.14).

A abordagem utilizada foi quantitativa e “tem o objetivo de mostrar dados, indicadores e tendências observáveis, ou produzir modelos teóricos abstratos com elevada aplicabilidade prática. Suas investigações evidenciam a regularidade dos fenômenos.” (MINAYO, 2008 apud (GUERRA, 2014, p.10). Os modelos teóricos dos Radicais Duplos serão apresentados visando a resolução de questões de concursos e olimpíadas, constituindo-se na aplicabilidade dos modelos.

Quanto à estratégia da investigação de pesquisa utilizado do ponto de vista do pesquisador foi a explicativa, conforme destaca (GIL, 2008, p.47) “Este é o tipo de pesquisa que mais aprofunda o conhecimento da realidade, porque explica a razão, o porquê das coisas. Por isso mesmo é o tipo mais complexo e delicado, já que o risco de cometer erros aumenta consideravelmente.”

Na apresentação e análise dos resultados foi desenvolvido todo o processo de raciocínio lógico envolvido nos métodos empíricos de resolução para o Radical Duplo como: soma e produto, completando quadrado, produto notável, fatoração, racionalização e depois fizemos o cálculo mediante a fórmula elementar imediata, demonstrada por alguns teoremas encontrados no artigo de Gkioulekas, 2017.

Quanto ao procedimento técnico, de maneira a auxiliar no entendimento do assunto de Radical Duplo, buscou-se aprofundar o tema através de procedimento bibliográfico, usando alguns autores tais como: Iezzi (2018), Gkioulekas (2017), Miller (2018) os quais trabalharam mais afinco alguns tópicos da álgebra fundamental e Avila (2011) e Gomes (2010) que contemplam as questões de concursos e olimpíadas.

(IEZZI, 2013), (IEZZI, 2018) e (RUFINO, 2010) abordaram conceitos e técnicas preliminares para o entendimento de resolução de Radical Duplo, (ARAÚJO, 2014) demonstrou alguns métodos elementares de resolução, abordando questões mais generalizadas nos quais também (AVILA, 2011), (GOMES, 2010) e (CAMINHA, 2013) apresentaram em seus livros problemas de olimpíadas e de concursos.

Buscou-se outras fontes de pesquisa desenvolvida por (GKIOULEKAS, 2017) em seu artigo, o qual descreveu dois teoremas e definições não encontrados nas literaturas brasileiras, analisando assim outros meios de demonstração, representação e solução de Radical Duplo.

2.2 Etapas da Pesquisa

1ª etapa: Pesquisa bibliográfica a partir das obras de Iezzi (2013) e (2018), Gkioulekas (2017), Araújo (2014), Avila (2011), Gomes (2010) e Caminha (2013);

2ª etapa: Elaboração das seções da fundamentação teórica a partir da pesquisa bibliográfica inicial;

3ª etapa: Analisar, apresentar e demonstrar os tipos e métodos de resolução relacionados ao Radical Duplo que são cobrados nos concursos e olimpíadas;

4ª etapa: Selecionar as questões de concursos e olimpíadas sobre Radical Duplo;

5ª etapa: Resolver as questões selecionadas de concursos e olimpíadas, à luz dos princípios teóricos dos métodos de resolução e à luz do raciocínio lógico do entendimento em decomposição dos números na forma de potenciação, fatoração, soma ou produto das raízes, produtos notáveis etc., fazendo uso das identidades algébricas abordadas.

Capítulo 3

Métodos de Resolução de Radical Duplo

3.1 Método para solução de Radicais Diretos da forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

3.1.1 M1: Por Meio de Soma e Produto

Analisando o sistema de equações encontrado na demonstração do teorema anterior ($x+y=a$; $xy=\dfrac{b}{4}$), nota-se que as incógnitas x e y podem ser rapidamente determinadas a depender do valor dos coeficientes a e b do Radical Duplo, bastando por vezes, pensar brevemente sobre os números que satisfazem o sistema citado, por soma e produto.

Exemplo 2. (**RESOLUÇÃO 2.**) Simplifique o radical duplo $\sqrt{5+\sqrt{24}}$.
Resolução:
Para resolver este radical duplo fazemos, novamente, $a=5$ e $b=24$, resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=\dfrac{24}{4}. \end{cases}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

Daí, buscando agilidade na solução do problema, podemos pensar rapidamente em dois números que **somados** resultam em **5** e **multiplicados** resultam em **6**, facilmente nos dando $x = 3$ e $y = 2$. Disso, decorre diretamente o resultado:

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}\,\textbf{.}$$

3.1.2 M2: Por Meio de Produtos Notáveis

Para alguns tipos de radicais duplos é possível utilizar produtos notáveis para a sua solução, normalmente exigindo que o aluno visualize uma expressão como um quadrado ou cubo perfeito.

Exemplo 2. (**RESOLUÇÃO 3.**) Simplifique o radical duplo $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$.
Resolução:
O radical dado pode ser manipulado utilizando, de modo complementar, a propriedade **P 7** da radiciação do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{5+\sqrt{24}} &= \sqrt{5+\sqrt{4\cdot 6}} \\
&= \sqrt{5+\sqrt{2^2\cdot 6}} \\
&= \sqrt{5+\cancel{\sqrt{2^{2}}}\cdot\sqrt{6}} \\
&= \sqrt{5+2\sqrt{6}} \\
&= \sqrt{3+2+2\sqrt{3\cdot 2}} \\
&= \sqrt{3+2\sqrt{3\cdot 2}+2} \\
&= \sqrt{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Pelo produto notável **P 15**, podemos tomar na expressão acima $a = \sqrt{3}$ e $b = \sqrt{2}$.

Disso temos:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\cancel{\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\cancel{2}}}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\,.$$

3.2 Método para a resolução de Radicais Indiretos da forma $\sqrt{a+q\sqrt{b}}$

Como havíamos comentado no Capítulo 1, iremos explorar a **Definição 8** para esse método de resolução, através do Teorema abaixo.

Teorema 3: Seja R=$\sqrt{a+q\sqrt{b}}$, com $a\in\mathbb{Q}^*$, $b,q\in\mathbb{Q}^*_+$, $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}^*_+$ e sendo $a+q\sqrt{b}>0$. Se R é um **Radical Duplo Indireto**, então:

$$R=\begin{cases}\sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\dfrac{qb+c}{2b}}+\sqrt{\dfrac{qb-c}{2b}}\right), se\ a>0\\[2ex] \sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\dfrac{qb+c}{2b}}-\sqrt{\dfrac{qb-c}{2b}}\right), se\ a<0\end{cases}$$

Com $c=\sqrt{q^2b^2-a^2b}\in\mathbb{Q}^*_+$.

Demonstração: Como $a+q\sqrt{b}>0$, pois deve existir sua raiz real, e $\sqrt{b}>0$, então temos que $qb+a\sqrt{b}>0$, existindo, portanto, sua raiz real. Daí, podemos escrever:

$$\sqrt{a+q\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a\sqrt{b}+q\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}}}=\sqrt{\frac{a\sqrt{b}+q(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb+a\sqrt{b}}\,.$$

Com o conhecimento de **módulo de um número real**, pode-se utilizar a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb+a\sqrt{b}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb+|a|\sqrt{b}},\quad se\quad a>0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb-|a|\sqrt{b}},\quad se\quad a<0.\end{cases}$$

Daí, como $|a| = \sqrt{a^2}$, chegamos na seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb + a\sqrt{b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb + \sqrt{a^2 b}}, & se \;\; a > 0 \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb - \sqrt{a^2 b}}, & se \;\; a < 0. \end{cases}$$

Como $qb \in \mathbb{Q}_+^*$ e $a^2 b \in \mathbb{Q}_+^*$, podemos nesse momento utilizar o **Teorema 2**, que nos auxiliará resolver este novo **Radical Duplo Direto**, tomando $c = \sqrt{(qb)^2 - (a^2 b)} = \sqrt{q^2 b^2 - a^2 b}$, temos:

Para $a > 0$**:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb + \sqrt{a^2 b}} &= \frac{\sqrt[4]{b^2}}{\sqrt[4]{b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\left(\sqrt{qb + \sqrt{a^2 b}}\right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{qb + c}{2}} + \sqrt{\frac{qb - c}{2}}\right) \\ &= \sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\frac{qb + c}{2b}} + \sqrt{\frac{qb - c}{2b}}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para $a < 0$**:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\sqrt{qb - \sqrt{a^2 b}} &= \frac{\sqrt[4]{b^2}}{\sqrt[4]{b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{b}}\left(\sqrt{qb - \sqrt{a^2 b}}\right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{qb + c}{2}} - \sqrt{\frac{qb - c}{2}}\right) \\ &= \sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\frac{qb + c}{2b}} - \sqrt{\frac{qb - c}{2b}}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

portanto, temos:

$$R = \sqrt{a + q\sqrt{b}} = \begin{cases} \sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\dfrac{qb+c}{2b}} + \sqrt{\dfrac{qb-c}{2b}}\right), & se \;\; a > 0 \\ \\ \sqrt[4]{b}\left(\sqrt{\dfrac{qb+c}{2b}} - \sqrt{\dfrac{qb-c}{2b}}\right), & se \;\; a < 0, \end{cases}$$

onde $c = \sqrt{q^2b^2 - a^2b} \in \mathbb{Q}_+^*$.

M3. Utilizaremos o teorema anterior, para transformar Radicais Duplos Indiretos em uma soma ou diferença de redicais simples.

Exemplo 3. Simplifique o radical duplo $\sqrt{-84 + 67\sqrt{7}}$

Resolução:

Utilizando o teorema anterior temos: $a = -84$, $q = 67$, $b = 7$, daí

$$c = \sqrt{67^2 \cdot 7^2 - (-84)^2 \cdot 7} = \sqrt{219961 - 49392} = \sqrt{170569} = 413$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \sqrt{-84 + 67\sqrt{7}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(\sqrt{\frac{67 \cdot 7 + 413}{2}} - \sqrt{\frac{67 \cdot 7 - 413}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(\sqrt{\frac{469 + 413}{2}} - \sqrt{\frac{469 - 413}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(\sqrt{\frac{882}{2}} - \sqrt{\frac{56}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(\sqrt{441} - \sqrt{28}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(21 - 2\sqrt{7}\right) \text{ .} \end{aligned}$$

Utilizando o método de Racionalização:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(21-2\sqrt{7}\right) &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{7}}\left(21-2\sqrt{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt[4]{7}}\left(\frac{21-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)\\
&= \frac{\sqrt[4]{7}^2}{\sqrt[4]{7}}\left(\frac{21-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right) = \sqrt[4]{7}\left(\frac{21-2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right)\\
&= \sqrt[4]{7}\left(\frac{21}{\sqrt{7}}-2\right) = \sqrt[4]{7}\left(\frac{21\sqrt{7}}{7}-2\right) = \sqrt[4]{7}\left(3\sqrt{7}-2\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\boxed{\sqrt{-84+67\sqrt{7}} = \sqrt[4]{7}\left(3\sqrt{7}-2\right) = 3\sqrt[4]{7^3}-2\sqrt[4]{7}}.
$$

3.3 Método de resolução de expressões do tipo $\sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}.$

Adotando A, $B \in \mathbb{Q}_+^*$, $\sqrt{B} \notin \mathbb{Q}_+^*$ e sendo $A \pm \sqrt{B} > 0$.

M 4. $\sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}$**:**

Chamando de E a expressão, pode-se elevar ao quadrado ambos os lados da expressão dada:

$$
\begin{aligned}
E &= \sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}\\
E^2 &= \left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2
\end{aligned}
$$

Utilizando os produtos notáveis **P 15** ou **P 16** no membro esquerdo da igualdade acima, temos:

$$
\begin{aligned}
E^2 &= \left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2 \pm 2\cdot\sqrt{A+\sqrt{B}}\cdot\sqrt{A-\sqrt{B}}+\left(\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2\\
E^2 &= A+\sqrt{B}\pm 2\cdot\sqrt{(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B})}+A-\sqrt{B}\\
E^2 &= 2A\pm 2\cdot\sqrt{A^2-\left(\sqrt{B}\right)^2}\\
E^2 &= 2A\pm 2\cdot\sqrt{A^2-B}\\
E^2 &= 2\left(A\pm\sqrt{A^2-B}\right)
\end{aligned}
$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima, temos:

$$E=\sqrt{2\left(A\pm\sqrt{A^2-B}\right)}\,\textbf{.}$$

Exemplo 4. (Princeton-2006) Simplifique $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Resolução:

Notemos inicialmente que:

$$E=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7+\sqrt{4^2}\sqrt{3}}+\sqrt{7-\sqrt{4^2}\sqrt{3}}\rightarrow$$

$$E=\sqrt{7+\sqrt{4^2\cdot 3}}+\sqrt{7-\sqrt{4^2\cdot 3}}=\sqrt{7+\sqrt{16\cdot 3}}+\sqrt{7-\sqrt{16\cdot 3}}\rightarrow$$

$$E=\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$$

Pelo teorema anterior: $A=7$ e $B=48$. Daí:

$$E=\sqrt{2\left(7+\sqrt{7^2-48}\right)}=\sqrt{2\left(7+\sqrt{49-48}\right)}=\sqrt{2\,(7+1)}=\sqrt{16}\rightarrow$$

$$\boxed{E=4}.$$

3.4 Método de resolução de expressões do tipo $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$.

Adotando A, $B\in\mathbb{Q}_+^*$, $\sqrt{B}\notin\mathbb{Q}_+^*$ e sendo $A\pm\sqrt{B}>0$.

M 5. $E=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$**.**

Pode-se elevar ao cubo os dois lados da equação citada e tomar $a=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ e

$b = \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}$. Daí, utilizando o produto notável **P 18**, temos:

$$E^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

Mas, como $E = a + b$, temos:

$$E^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3ab \cdot E + b^3$$

$$E^3 = \left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)\left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right) \cdot E + \left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3$$

$$E^3 = A + \cancel{\sqrt{B}} + 3\sqrt[3]{\left(A+\sqrt{B}\right)\left(A-\sqrt{B}\right)} \cdot E + A - \cancel{\sqrt{B}}$$

$$E^3 = 2A + 3\sqrt[3]{A^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2} \cdot E$$

$$E^3 - 3\sqrt[3]{A^2 - B} \cdot E - 2A = 0$$

Logo, para determinar E basta resolver a equação do terceiro grau acima.

Exemplo 5. Seja $E = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$. Prove que $E \in \mathbb{N}_+$

Resolução:

Utilizando a notação do método abordado acima, $A = 10$ e $B = 108$. Portanto temos que E é uma das raizes da equação:

$$E^3 - 3\sqrt[3]{10^2 - 108} \cdot E - 2 \cdot 10 = 0 \leftrightarrow$$

$$E^3 - 3\sqrt[3]{100 - 108} \cdot E - 2 \cdot 10 = 0 \leftrightarrow$$

$$E^3 - 3\sqrt[3]{-8} \cdot E - 20 = 0 \leftrightarrow$$

$$E^3 + 3 \cdot 2E - 20 = 0 \leftrightarrow$$

$$\boxed{E^3 + 6E - 20 = 0}$$

O membro esquerdo da equação acima pode ser fatorado do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
E^3+6E-20 &= E^3-2E^2+2E^2+6E-20\\
&= E^2(E-2)+2\left(E^2+3E-10\right)\\
&= E^2(E-2)+2\left(E^2-2E+5E-10\right)\\
&= E^2(E-2)+2\left[E(E-2)+5(E-2)\right]\\
&= E^2(E-2)+2(E-2)(E+5)\\
&= (E-2)\left[E^2+2(E+5)\right]\\
&= (E-2)\left(E^2+2E+10\right)
\end{aligned}$$

Logo:

$$(E-2)\left(E^2+2E+10\right)=0$$

Daí $E-2=0$ ou $E^2+2E+10=0$.

Se $E-2=0$:

$$E-2=0\rightarrow E=2$$

Se $E^2+2E+10=0$: Calculando o discriminante da equação quadrática, afim de analisar a existência ou não de suas raízes reais, notamos que $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 10<0$. Daí a equação não possui soluções reais. Porém, como a raiz cúbica de um número real sempre resulta em um real, o valor da expressão E deve ser um número real. Logo, o valor de E não pode ser raiz da equação $E^2+2E+10=0$.

Portanto, a única raiz que satisfaz o problema é:

$$E=2$$

Provando, assim, que $E\in\mathbb{N}_+^*$.

Capítulo 4

Aplicações dos Métodos de Resolução de Radical Duplo

Aplicação 1. (AHSME-1970) O número $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é igual a:

a) 2

b) $2\sqrt{3}$

c) $4\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$

e) $2\sqrt{2}$

Resolução:

Pode-se reescrever a expressão do seguinte modo:

$$E = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{4\cdot 2}} - \sqrt{3-\sqrt{4\cdot 2}}$$

$$E = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Daí, pode-se utilizar diretamente o método **M 4** para resolver o problema. Temos, então, $a = 3$ e $b = 8$. Logo:

$$E = \sqrt{2\left(3-\sqrt{3^2-8}\right)} = \sqrt{2\left(3-\sqrt{1}\right)} = \sqrt{2\,(3-1)} = \sqrt{2\cdot 2}$$

$$\boxed{E = 2}$$

Resposta correta: **Alternativa a)**

Aplicação 2. (Turquia-2009-Modificada) Determinando o valor de $x = \sqrt[3]{11+\sqrt{337}} + \sqrt[3]{11-\sqrt{337}}$, quanto vale $x^3 + 18x$?

Resolução:

Podemos utilizar o método **M 5** para solucionar o problema, deste modo, $a = 11$ e $b = 337$. Daí x satisfaz a equação:

$$x^3 - 3\sqrt[3]{11^2 - 337}x - 2 \cdot 11 = 0$$

$$x^3 - 3\sqrt[3]{121 - 337}x - 22 = 0$$

$$x^3 - 3\sqrt[3]{-216} - 22 = 0$$

$$x^3 - 3 \cdot (-6) - 22 = 0$$

$$x^3 + 18x - 22 = 0$$

Disso, decorre diretamente que:

$$\boxed{x^3 + 18x = 22}$$

Aplicação 3. (CN-2004-Modificada) Simplifique $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$.

Resolução:

Podemos reescrever a expressão dada do seguinte modo: usando a propriedade **P 9**

$$E = \sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt[2\cdot 2]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}$$

Pode-se então tomar $E_1 = \sqrt{49+20\sqrt{6}}$ e $E = \sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}} = \sqrt{E_1}$. Reescrevendo E_1 do seguinte modo:

$$E_1 = \sqrt{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{49+\sqrt{20^2\cdot 6}} = \sqrt{49+\sqrt{400\cdot 6}} = \sqrt{49+\sqrt{2400}}$$

Podemos utilizar a **fórmula elementar** em E_1. Com isso temos $A = 49$, $B = 2400$ e $C = \sqrt{49^2 - 2400} = \sqrt{2401 - 2400} = 1$. Logo:

$$E_1 = \sqrt{\frac{49+1}{2}} + \sqrt{\frac{49-1}{2}}$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{48}{2}}$$
$$E_1 = \sqrt{25} + \sqrt{24}$$
$$\boxed{E_1 = 5 + \sqrt{24}}$$

Com isso, temos que $E = \sqrt{5+\sqrt{24}}$, podendo ser determinado também pela **fórmula elementar**. Deste modo, fazendo $A' = 5$, $B' = 24$ e $C' = \sqrt{5^2 - 24} = \sqrt{25-24} = 1$, pode-se escrever:

$$E = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}}$$
$$E = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}}$$
$$\boxed{E = \sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Aplicação 4. (CN-1982) O valor de $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$ é:

a) $1+\sqrt{7}$

b) $1+\sqrt{6}$

c) $1+\sqrt{5}$

d) $1+\sqrt{3}$

e) $1+\sqrt{2}$

Resolução:

Para a resolução desse problema, pode-se utilizar o método **M 2**. Podemos definir $E = 10+6\sqrt{3}$ e, com isso, reescrevemos E do seguinte modo:

$$E = 10+6\sqrt{3} = 1+9+3\sqrt{3}+3\sqrt{3} = 1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}$$

$$E = 1^3 + 3\cdot 1\cdot \sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^3$$

Tomando $a=1$ e $b=\sqrt{3}$, notamos diretamente que o produto notável **P 18** pode ser utilizado:

$$E = 1^3 + 3\cdot 1\cdot \sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^3 = \left(1+\sqrt{3}\right)^3$$

O enunciado do problema pede $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \sqrt[3]{E}$, portanto:

$$\sqrt[3]{E} = \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = \cancel{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^{\cancel{3}}}} = 1+\sqrt{3}$$

Logo, temos que:

$$\boxed{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}}$$

Resposta correta: **Alternativa d)**

Aplicação 5. (Vasconcelos, 2016) Determinando o valor de $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} - \dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ obtemos:

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) $2\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{2}$

Resolução:

Denominando $E = \sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}-1}$, temos que a expressão pedida será:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} - \frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} &= \frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} \\
&= \frac{E}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}
\end{aligned}$$

Afim de utilizar o método **M 4** podemos considerar $A = \sqrt[4]{8}$ e $B = \sqrt{2}-1$, daí:

$$E = \sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Pelo método citado:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)} \\ &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \end{aligned}$$

Pela propriedade $\boxed{\textbf{P 9}}$ da radiciação, temos:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{\left(\cancel{\sqrt{}}\sqrt{8}\right)^{\cancel{2}}-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \\ &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{8}-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade $\boxed{\textbf{P 7}}$ da radiciação:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2\cdot 4}-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \\ &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \\ &= \sqrt{2\left[\sqrt[4]{8}-\sqrt{2\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)}\right]} \\ &= \sqrt{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}\right)} \\ &= \sqrt{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)} \\ &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}} \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}-\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\frac{E}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}}{\cancel{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} - \frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} = \sqrt{2}}$$

Resposta correta: **Alternativa b)**

Aplicação 6. (CN-2003) Se $a = \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então $a+b$ é igual a:

a) $\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}+2$

d) 4

e) $\sqrt{5}+1$

Resolução:

Tomando $A = 4$ e $B = 10+2\sqrt{5}$ a expressão pedida fica do seguinte modo:

$$a+b = \sqrt{A-\sqrt{B}} + \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Podendo-se utilizar, portanto, o método **M 4** para simplificar a expressão dada:

$$\begin{aligned} a+b &= \sqrt{2\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)} \\ &= \sqrt{2\left[4+\sqrt{4^2-\left(10+2\sqrt{5}\right)}\right]} \\ &= \sqrt{2\left(4+\sqrt{16-10-2\sqrt{5}}\right)} \\ &= \sqrt{2\left(4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)} \end{aligned}$$

Pode-se utilizar o método **M 2** para resolver o radical $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{6-2\sqrt{5}} &= \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} \\ &= \sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1^2} \end{aligned}$$

Pelo produto notável **P 15**, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 1 + 1^2} &= \cancel{\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^{\cancel{2}}}} \\ &= \sqrt{5}-1\end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}a+b &= \sqrt{2\left(4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)} \\ &= \sqrt{2\left[4+\left(\sqrt{5}-1\right)\right]} \\ &= \sqrt{2\left(4+\sqrt{5}-1\right)} \\ &= \sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)} \\ &= \sqrt{6+2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Podemos utilizar novamente o método **M 2** para resolver o radical $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{6+2\sqrt{5}} &= \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} \\ &= \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot\sqrt{5}\cdot 1+1^2}\end{aligned}$$

Utilizando o produto notável **P 15**:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{5}\cdot 1 + 1^2} &= \cancel{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^{\cancel{2}}}} \\ &= \sqrt{5}+1\end{aligned}$$

Logo:

$$a+b=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$$

$$\therefore \boxed{a+b=\sqrt{5}+1}$$

Resposta correta: **Alternativa e)**

Aplicação 7. (IME-2015) Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{x+3}$$

Resolução:

É necessário inicialmente verificar as condições de existência da raiz quadrática:

$$\begin{cases} 4x - 4 \geq 0 \quad (1) \\ x + 3 \geq 0 \quad (2) \\ x + \sqrt{4x-4} \geq 0 \quad (3) \\ x - \sqrt{4x-4} \geq 0 \quad (4). \end{cases}$$

Pela inequação (1):

$$4x - 4 \geq 0 \leftrightarrow x - 1 \geq 0 \leftrightarrow$$

$$\boxed{x \geq 1} \quad (5)$$

É fácil verificar que, obedecida a inequação (5), a inequação (2) é satisfeita.

Para a inequação (3) pode-se notar que a inequação (5) implica que:

$$x \geq 0$$

Como, pela definição de raiz quadrática, $\sqrt{4x-4} \geq 0$, temos que:

$$x + \sqrt{4x-4} \geq 0$$

Sendo, portanto, a inequação (3) satisfeita para todo $x \geq 1$

Da inequação (4):

$$\begin{aligned} x - \sqrt{4x-4} &\geq 0 \leftrightarrow \\ x &\geq \sqrt{4x-4} \end{aligned}$$

Como $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^2 &\geq 4x - 4 \leftrightarrow \\ x^2 - 4x + 4 &\geq 0 \leftrightarrow \\ x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pelo produto notável **P 16**:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x-2)^2$$

Daí:

$$(x-2)^2 \geq 0$$

Mas, pela definição do quadrado de um número real, a equação acima é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo, nota-se que as condições de existência são totalmente satisfeitas para todo $\boxed{x \geq 1}$.

Podemos reescrever o lado esquerdo da equação dada tomando $A = x$ e $B = 4x - 4$, deste modo:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Daí, podemos utilizar o método **M 4** para simplificar o lado esquerdo da equação:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}} &= \sqrt{2\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)} \\
&= \sqrt{2\left[x+\sqrt{x^2-(4x-4)}\right]} \\
&= \sqrt{2\left(x+\sqrt{x^2-4x+4}\right)} \\
&= \sqrt{2\left(x+\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2}\right)}
\end{aligned}$$

Pelo produto notável **P 16**, temos:

$$\sqrt{2\left(x+\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2}\right)}=\sqrt{2\left(x+\sqrt{(x-2)^2}\right)}$$

Do conhecimento de função modular:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{2\left(x+\sqrt{(x-2)^2}\right)}=\sqrt{2\left(x+|x-2|\right)}$$

Portanto, substituindo o resultado acima na equação dada:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\left(x+|x-2|\right)} &= \sqrt{x+3} \\
2\left(x+|x-2|\right) &= x+3 \\
2x+2|x-2| &= x+3
\end{aligned}$$

Pela definição de módulo de um número real temos dois casos a considerar:

Para $x \geq 2$**:**

Neste caso:

$$x - 2 \geq 0 \leftrightarrow |x-2| = x - 2$$

Daí:

$$2x + 2|x-2| = 2x + 2\,(x-2)$$

Deste modo, substituindo na equação modular:

$$\begin{aligned} 2x + 2\,(x-2) &= x + 3 \\ 2x + 2x - 4 &= x + 3 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Como $\frac{7}{3} \geq 1$, satisfazendo as condições de existência, e $\frac{7}{3} \geq 2$, satisfazendo a condição da equação modular, $\boxed{x = \frac{7}{3}}$ é solução.

Para $x < 2$:

Neste caso:

$$x - 2 < 0 \leftrightarrow |x-2| = -\,(x-2) = 2 - x$$

Daí:

$$2x + 2|x-2| = 2x + 2\,(2-x)$$

Fazendo a substituição na equação modular:

$$\begin{aligned} 2x + 2\,(2-x) &= x + 3 \\ 2x + 4 - 2x &= x + 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Como $1 \geq 1$, satisfazendo as condições de existência, e $1 < 2$, satisfazendo a condição da equação modular, $\boxed{x = 1}$ é solução.

Deste modo, sendo S o conjunto solução da equação dada, temos que:

$$\boxed{S = \left\{\frac{7}{3}, 1\right\}}$$

Aplicação 8. (IME-2002/2003) Demonstre que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ é um número inteiro e múltiplo de 4.

Resolução:

Podemos tomar $E = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ e, utilizando as propriedades $\boxed{\textbf{P 6}}$ e $\boxed{\textbf{P 7}}$ da radiciação, pode-se reescrever a expressão E:

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \\
&= \sqrt[3]{20+\sqrt{14^2}\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{14^2}\sqrt{2}} \\
&= \sqrt[3]{20+\sqrt{196}\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{196}\sqrt{2}} \\
&= \sqrt[3]{20+\sqrt{196\cdot 2}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{196\cdot 2}} \\
&= \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}}
\end{aligned}$$

Daí, tomando $A = 20$ e $B = 392$, podemos escrever E do seguinte modo:

$$E = \sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} + \sqrt[3]{A-\sqrt{B}}$$

Logo, através do método de resolução $\boxed{\textbf{M 5}}$, temos que E é uma raiz da equação:

$$E^3 - 3\sqrt[3]{A^2-B}\cdot E - 2A = 0$$

Substituindo os valores de A e B na equação acima:

$$\begin{aligned}
E^3 - 3\sqrt[3]{20^2-392}\cdot E - 2\cdot 20 &= 0 \\
E^3 - 3\sqrt[3]{400-392}\cdot E - 40 &= 0 \\
E^3 - 3\sqrt[3]{8}\cdot E - 40 &= 0 \\
E^3 - 3\cdot 2\cdot E - 40 &= 0 \\
E^3 - 6E - 40 &= 0
\end{aligned}$$

O membro esquerdo da equação acima pode ser fatorado do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
E^3 - 6E - 40 &= 0 \\
E^3 + 4E^2 - 4E^2 + 10E - 10E - 6E - 40 &= 0 \\
E^3 + 4E^2 + 10E - 4E^2 - 16E - 40 &= 0 \\
E(E^2+4E+10) - 4(E^2+4E+10) &= 0 \\
(E-4)(E^2+4E+10) &= 0
\end{aligned}$$

Deste modo $E - 4 = 0$ ou $E^2 + 4E + 10 = 0$.

Se $E - 4 = 0$**:**

$$E - 4 = 0 \rightarrow E = 4$$

Se $E^2 + 4E + 10 = 0$**:** Calculando o determinante da equação quadrática, nota-se que o seu discriminante é menor que zero ($\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 < 0$). Deste modo, a equação não possui raízes reais. Mas, como a raiz cúbica de um número real resulta também em um número real, o valor de E deve ser real. Logo E não pode ser raiz da equação $E^2 + 4E + 10 = 0$.

Com isso, a única possibilidade de solução é:

$$\boxed{E = 4}$$

Demonstrando, assim, que E é um número inteiro e múltiplo de 4.

Aplicação 9. (IRÃ-1989) Mostre que $\left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ é um inteiro positivo se $n = \dfrac{m\left(m^2+3\right)}{2}$ para algum m inteiro positivo.

Resolução:

Definindo $m = \left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ e com o conhecimento de radiciação podemos reescrever a expressão dada do seguinte modo:

$$m = \left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2+1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2+1}}$$

Na expressão reescrita, podemos definir $A = n$ e $B = n^2 + 1$ e substituir em m:

$$m = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2+1}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2+1}} = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}$$

Nota-se então que é possível utilizar o método de resolução **M 5** para resolver o problema. Nesse sentido, sabe-se que m deve ser uma raiz da equação:

$$m^3 - 3\sqrt[3]{A^2 - B} \cdot m - 2A = 0$$

Substituindo os valores de A e B:

$$\begin{aligned}
m^3 - 3\sqrt[3]{n^2 - (n^2+1)} \cdot m - 2n &= 0 \\
m^3 - 3\sqrt[3]{n^2 - n^2 - 1} \cdot m - 2n &= 0 \\
m^3 - 3\sqrt[3]{-1} \cdot m - 2n &= 0 \\
m^3 - 3 \cdot (-1) \cdot m - 2n &= 0 \\
m^3 + 3m - 2n &= 0
\end{aligned}$$

Podemos isolar o n na equação acima:

$$\begin{aligned}
2n &= m^3 + 3m \\
n &= \frac{m^3 + 3m}{2} \\
n &= \frac{m\left(m^2+3\right)}{2}
\end{aligned}$$

Mas, pelo enunciado, sendo a expressão $m = \left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$ um inteiro positivo, existe um inteiro positivo (o próprio resultado da expressão dada, ou seja, m) tal que:

$$n = \frac{m\left(m^2+3\right)}{2}$$

Mostrando, assim, o que foi pedido.

Aplicação 10. (IMO-Longlist-1988-Modificada) Calcule o valor de x em:

$$x = \frac{\left(11 + 6\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \left(11 - 6\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)}$$

.

Resolução:

Podemos inicialmente definir $M = \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)$. Podemos utilizar a definição de radiciação no dividendo do número M para o reescrever:

$$\begin{aligned}
M &= \left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2^2}} + \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2^2}}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{4}}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)
\end{aligned}$$

Daí, utilizando o método de resolução **M 4** no dividendo de M, podemos simplificá-lo do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
M &= \left(\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{4}}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \sqrt{2\left[\sqrt{5}+\sqrt{\left(\cancel{\sqrt{}}5\right)^{\cancel{2}}-4}\right]} \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \sqrt{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-4}\right)} \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \sqrt{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{1}\right)} \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)} \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)
\end{aligned}$$

Podemos utilizar a propriedade **P 11** da radiciação para simplificar a expressão:

$$\begin{aligned}
M &= \sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)} \div \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \\
M &= \left\{\sqrt{2}\cdot\left[\cancel{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)}}\right]\right\} \div \cancel{\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)} \\
M &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Podemos tomar $N = (11+6\sqrt{2})\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}-(11-6\sqrt{2})\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}$. Utilizando a observação **O 2** da radiciação e observando que $11+6\sqrt{2} = |11+6\sqrt{2}|$ e $11-6\sqrt{2} = |11-6\sqrt{2}|$ podemos reescrever N do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
N &= \left(11+6\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\left(11-6\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}} \\
N &= |11+6\sqrt{2}|\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}-|11-6\sqrt{2}|\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}} \\
N &= \sqrt{\left(11+6\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{\left(11-6\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}} \\
N &= \sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}} \\
N &= \sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Utilizando o produto notável **P 17**, a propriedade **P 3** da potenciação e a propriedade **P 7** da radiciação nos dois primeiros fatores da expressão acima:

$$
\begin{aligned}
N &= \sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{\left(11+6\sqrt{2}\right)\cdot\left(11-6\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{11^2-\left(6\sqrt{2}\right)^2}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{121-6^2\cdot\cancel{\sqrt{2^2}}}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{121-36\cdot 2}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{121-72}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= \sqrt{49}\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= 7\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Utilizando a observação **O 2** e a propriedade **P 7** da radiciação, podemos reescrever N do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
N &= 7\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)\\
N &= 7\left(\sqrt{11+\sqrt{6^2}\sqrt{2}}-\sqrt{11-\sqrt{6^2}\sqrt{2}}\right)\\
N &= 7\left(\sqrt{11+\sqrt{6^2\cdot 2}}-\sqrt{11-\sqrt{6^2\cdot 2}}\right)\\
N &= 7\left(\sqrt{11+\sqrt{36\cdot 2}}-\sqrt{11-\sqrt{36\cdot 2}}\right)\\
N &= 7\left(\sqrt{11+\sqrt{72}}-\sqrt{11-\sqrt{72}}\right)
\end{aligned}
$$

Pela forma do segundo fator da expressão de N, nota-se que é possível utilizar o método de resolução **M 4** para simplificá-la:

$$\begin{aligned}
N &= 7\left(\sqrt{11+\sqrt{72}}-\sqrt{11-\sqrt{72}}\right)\\
N &= 7\sqrt{2\left(11-\sqrt{11^2-72}\right)}\\
N &= 7\sqrt{2\left(11-\sqrt{121-72}\right)}\\
N &= 7\sqrt{2\left(11-\sqrt{49}\right)}\\
N &= 7\cdot\sqrt{2\left(11-7\right)}\\
N &= 7\cdot\sqrt{2\cdot 4}\\
N &= 7\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\\
N &= 7\cdot\sqrt{2}\cdot 2\\
N &= 14\cdot\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Daí, sendo $x = \dfrac{N}{M}$, temos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{N}{M}\\
x &= \frac{14\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Temos, portanto, a resposta para o problema:

$$\boxed{x = 14}$$

Questão boa hen! porém trabalhosa.

Aplicação 11. (Stanford-2008) Simplifique $\sqrt[3]{\dfrac{17\sqrt{7}+45}{4}}$.

Resolução:

Podemos tomar $x = \sqrt[3]{\dfrac{17\sqrt{7}+45}{4}}$ e reescrever a x da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{17\sqrt{7}+45}{4}}\\
x &= \sqrt[3]{\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{17\sqrt{7}+45}{4}\right)}\\
x &= \sqrt[3]{\frac{2\cdot\left(17\sqrt{7}+45\right)}{2\cdot 4}}\\
x &= \sqrt[3]{\frac{34\sqrt{7}+90}{8}}
\end{aligned}
$$

Utilizando a propriedade **P 7** da radiciação:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\frac{34\sqrt{7}+90}{8}}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{34\sqrt{7}+90}}{\sqrt[3]{8}}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{34\sqrt{7}+90}}{2}
\end{aligned}
$$

Para simplificar o numerador de x, pode-se utilizar o método de resolução **M 2**, notando que o radicando pode ser reescrito utilizando o produto notável **P 19**:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt[3]{34\sqrt{7}+90}}{2}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{7\sqrt{7}+63+27\sqrt{7}+27}}{2}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{7\sqrt{7}+3\cdot 3\cdot 7+3\cdot 3\cdot 3\cdot\sqrt{7}+27}}{2}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+3\cdot 3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+3\cdot 3\cdot\sqrt{7}\cdot 3+3\cdot 3\cdot 3}}{2}\\
x &= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{7}\right)^3+3\cdot 3\cdot\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+3\right)+3^3}}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo produto notável citado:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{7}\right)^3 + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}\left(\sqrt{7}+3\right) + 3^3}}{2} \\ x &= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{7}+3\right)^3}}{2} \end{aligned}$$

Deste modo, temos a expressão simplificada de x:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{7}+3}{2}}$$

Aplicação 12. (AHSME-1976) Se $N = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, então N é igual a:

a) 1

b) $2\sqrt{2}-1$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

e) NDA

Resolução:

Denominando por M a primeira parcela da expressão dada no enunciado e utilizando a propriedade **P 6** da radiciação, podemos reescrever M do seguinte modo:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \\ M &= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2^2}} + \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2^2}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \\ M &= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{4}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \end{aligned}$$

Pela expressão de M, podemos notar que o método de resolução $\boxed{\textbf{M 4}}$ pode ser utilizado para simplificar o numerador da fração:

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{4}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\\
M &= \frac{\sqrt{2\left[\sqrt{5}+\sqrt{\left(\cancel{\sqrt{5}}\right)^{\cancel{2}}-4}\right]}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\\
M &= \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-4}\right)}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\\
M &= \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{1}\right)}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\\
M &= \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}
\end{aligned}
$$

Podemos utilizar a propriedade $\boxed{\textbf{P 7}}$ para simplificar M:

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\\
M &= \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{\sqrt{5}+1}}}{\cancel{\sqrt{\sqrt{5}+1}}}\\
M &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Para a segunda parcela da expressão do enunciado, denominando-a por P, podemos a princípio reescrevê-la utilizando as propriedades $\boxed{\textbf{P 7}}$ e $\boxed{\textbf{P 6}}$ da radiciação:

$$
\begin{aligned}
P &= \sqrt{3-2\sqrt{2}}\\
P &= \sqrt{3-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}}\\
P &= \sqrt{3-\sqrt{2^2\cdot 2}}\\
P &= \sqrt{3-\sqrt{4\cdot 2}}\\
P &= \sqrt{3-\sqrt{8}}
\end{aligned}
$$

Daí, nota-se que a forma reescrita de P pode ser simplificada utilizando a **fórmula elementar** para a solução de radicais duplos:

$$
\begin{aligned}
P &= \sqrt{3-\sqrt{8}} \\
P &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-8}}{2}} \\
P &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}} \\
P &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{1}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{1}}{2}} \\
P &= \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} \\
P &= \sqrt{\frac{4}{2}} - \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}} \\
P &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \\
P &= \sqrt{2} - 1
\end{aligned}
$$

Daí, sendo $N = M - P$, podemos encontrar a expressão pedida:

$$
\begin{aligned}
N &= M - P \\
N &= \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - 1\right) \\
N &= \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{2}} + 1
\end{aligned}
$$

Chegamos, enfim, à resposta para o problema:

$$\boxed{N = 1}$$

Resposta correta: **Alternativa a)**

Aplicação 13. (CPCAR) Transformar o radical $\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}}$ numa soma de radicais simples.

Resolução:

O problema pode ser resolvido de modo imediato utilizando-se o método de resolução **M 2**. Para isto, basta reescrever a expressão dada utilizando a propriedade **P 6** e utilizar o produto notável **P 15** para resolver o radical duplo. Assim, denominando a expressão dada por x, temos:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}} \\
x &= \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 + 2a\sqrt{b}} \\
x &= \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Pelo produto notável citado:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2} \\
x &= \sqrt{\left(a + \sqrt{b}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Temos, portanto, a resposta para o problema:

$$\boxed{x = a + \sqrt{b}}$$

Aplicação 14. (CN-2011) O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $5 - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c) $3 - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$

e) 2

Resolução:

Podemos tomar $x = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ e elevar a expressão de x ao quadrado:

$$x^2 = \left(\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right)^2$$

Utilizando a propriedade **P 8** da radiciação:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \left(\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}\right)^2 \\
x^2 &= \sqrt[3]{\left(26 - 15\sqrt{3}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Podemos utilizar o produto notável **P 16** para desenvolver a expressão acima:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt[3]{\left(26-15\sqrt{3}\right)^2} \\ x^2 &= \sqrt[3]{26^2-2\cdot 26\cdot 15\sqrt{3}+\left(15\sqrt{3}\right)^2} \\ x^2 &= \sqrt[3]{1351-780\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt[3]{343+1008-192\sqrt{3}-588\sqrt{3}} \\ x^2 &= \sqrt[3]{343-588\sqrt{3}+1008-192\sqrt{3}} \\ x^2 &= \sqrt[3]{7^3-3\cdot 7^2\cdot 4\sqrt{3}+3\cdot 7\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Pelo produto notável **P 20** podemos simplificar x^2:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt[3]{7^3-3\cdot 7^2\cdot 4\sqrt{3}+3\cdot 7\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^3} \\ x^2 &= \sqrt[3]{\left(7-4\sqrt{3}\right)^3} \\ x^2 &= 7-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como $26-15\sqrt{3}>0$, o valor de x deve ser positivo. Logo, podemos encontrar a expressão final para x:

$$\boxed{x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$$

Resposta correta: **Alternativa b)**

Aplicação 15. (CMRJ-2014) O número irracional $\dfrac{1}{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}}$ é igual a:

a) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

c) $\sqrt{7}-2$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Resolução:

Podemos inicialmente definir por x a expressão dada. Daí, utilizando a propriedade **P 9** da radiciação podemos reescrever x do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[2\cdot 2]{49+20\sqrt{6}}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}} \end{aligned}$$

Tomando $m = \sqrt{49+20\sqrt{6}}$ podemos escrever x em termos de m:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{m}} \end{aligned}$$

Pode-se utilizar as propriedade **P 6** e **P 7** da radiciação e a **fórmula elementar** em m

para simplificá-lo:

$$
\begin{aligned}
m &= \sqrt{49+20\sqrt{6}} \\
m &= \sqrt{49+\sqrt{20^2}\sqrt{6}} \\
m &= \sqrt{49+\sqrt{400}\sqrt{6}} \\
m &= \sqrt{49+\sqrt{400\cdot 6}} \\
m &= \sqrt{49+\sqrt{2400}} \\
m &= \sqrt{\frac{49+\sqrt{49^2-2400}}{2}}+\sqrt{\frac{49-\sqrt{49^2-2400}}{2}} \\
m &= \sqrt{\frac{49+\sqrt{2401-2400}}{2}}+\sqrt{\frac{49-\sqrt{2401-2400}}{2}} \\
m &= \sqrt{\frac{49+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{49-\sqrt{1}}{2}} \\
m &= \sqrt{\frac{49+1}{2}}+\sqrt{\frac{49-1}{2}} \\
m &= \sqrt{\frac{50}{2}}+\sqrt{\frac{48}{2}} \\
m &= \sqrt{25}+\sqrt{24} \\
m &= 5+\sqrt{24}
\end{aligned}
$$

Substituindo o valor simplificado de m em x:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{m}} \\
x &= \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}
\end{aligned}
$$

Pode-se racionalizar a expressão de x multiplicando o numerador e o denominador da fração por $\sqrt{5-\sqrt{24}}$:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}} \\
x &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)}
\end{aligned}
$$

Utilizando o produto notável **P 17** podemos simplificar x:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{\left(5+\sqrt{24}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}} \\
x &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{5^2-\left(\sqrt{24}\right)^2}} \\
x &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{25-24}} \\
x &= \frac{\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{1}} \\
x &= \sqrt{5-\sqrt{24}}
\end{aligned}
$$

Disto, nota-se novamente a possibilidade de utilizar a **fórmula elementar**:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{5-\sqrt{24}} \\
x &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5^2-24}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5^2-24}}{2}} \\
x &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-24}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-24}}{2}} \\
x &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{1}}{2}} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{1}}{2}} \\
x &= \sqrt{\frac{5+1}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} \\
x &= \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}}
\end{aligned}
$$

Chegamos, portanto, na resposta para o problema:

$$\boxed{x = \sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Resposta correta: **Alternativa e)**

Considerações Finais

A ideia central desta pesquisa foi produzir outros métodos de resolução de Radical Duplo além da fórmula elementar apresentada nos livros didáticos, fazendo uso de ferramentas elementares como fatoração, produtos notáveis, racionalização e concentrando -os em aplicações de questões de concurso e olimpíadas de matemática.

Observou-se que a fórmula elementar apresentada nos livros não era aplicável a questões mais complexas, exigindo um conhecimento empírico dos alunos nas resoluções. Embora esse conteúdo não seja abordado com detalhes no ensino fundamental, mas é útil apresentar outros métodos a fim de simplificar as resoluções e expandir um novo conhecimento de estudo dos Radicais Duplos.

Entretanto, é importante observar que o estudo de Radical Duplo pode ser associado a outros conjuntos, como dos números complexos, além de aplicações em problemas da geometria plana, dando uma outra extensão de pesquisa para futuros alunos que queiram dar continuidade na proposta da pesquisa, e abordando outros métodos de resolução e aplicação.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, M. ***Os Segredos da Álgebra***. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2014.

AVILA, A. ***Tópicos da Álgebra Elementar***. 1. ed. Rio de Janeiro: XYZ LTDA, 2011.

BARROS, T. ***Identidades Algébricas e Aplicações.*** 2018. Disponível em: ⟨http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/handle/riuea/1393⟩.Acesso em 18 de julho de 2022.

BATISTA, R. ***Equações do 2° Grau em variáveis complexas.*** 2019. Disponível em: ⟨https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3902⟩.Acesso em 27 de julho de 2022.

BOYER, C. B. ***História da matemática***. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

BRAGANÇA, B. ***Olímpiada de matemática para a matemática avançar.*** 2013. Disponível em: ⟨https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/5881⟩. Acesso em 02 de agosto de 2022.

CAMINHA, A. ***Tópicos de Matemática Elementar: números reais*** . 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

EVES, H. ***Introdução à história da matemática***. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GARBI, G. ***A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática***. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIL, A. ***Métodos e técnicas de pesquisa social***. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GKIOULEKAS, E. ***On the denesting og nested square roots***. 2017. Disponível em: ⟨https://faculty.utrgv.edu/eleftherios.gkioulekas/papers/024-denesting-square-roots.pdf⟩.Acesso em 12 de agosto de 2022.

GOMES, C. ***Tópicos de Matemática IME-ITA-Olimpíadas***. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.

GUERRA, E. ***Manual de Pesquisa Qualitativa***. 1. ed. Belo Horizonte: Grupo ânima educação, 2014.

IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar***. 10. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

IEZZI, G. ***Matemática e Realidade***. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

PRODANOV, C.; FREITAS, E. ***Metodologia do trabalho científico****: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico*. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RUFINO, M. ***Coleção Elementos da Matemática***. 3. ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.