

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CINDY GABRIELLE DACIO DA MATA

Prof. Orientador: Dr. Edilson de Carvalho Filho

Tabatinga-AM  
2023

CINDY GABRIELLE DACIO DA MATA

MULTIFRACTALIDADE DOS NÍVEIS DO RIO AMAZONAS PARA A CIDADE DE  
TABATINGA

Prof. Orientador: Dr. Edilson de Carvalho Filho

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Tabatinga-AM  
2023

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
**Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.**

M425m Mata, Cindy Gabrielle Dacio da  
m           Multifractalidade dos níveis do rio Amazonas para a  
              cidade de Tabatinga / Cindy Gabrielle Dacio da Mata.  
              Manaus : [s.n], 2023.  
              21 f.: color.; 29 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura -  
Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2023.  
Inclui bibliografia  
Orientador: Edilson de Carvalho Filho

1. Multifractalidade. 2. Rio Amazonas. 3.  
Tabatinga. I. Edilson de Carvalho Filho (Orient.). II.  
Universidade do Estado do Amazonas. III.  
Multifractalidade dos níveis do rio Amazonas para a  
cidade de Tabatinga

**Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463**

CINDY GABRIELLE DACIO DA MATA

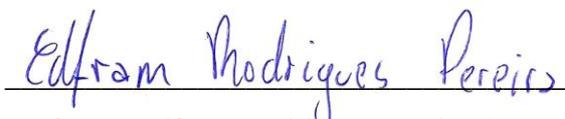
MULTIFRACTALIDADE DOS NÍVEIS DO RIO AMAZONAS PARA A CIDADE DE  
TABATINGA

Artigo científico apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção de nota parcial na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II, ministrada pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Karem Keyth de Oliveira Marinho, do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudos Superiores de Tabatinga da Universidade do Estado do Amazonas.

Data de aprovação: 28 de março de 2023.



Prof. Dr. Edilson de Carvalho Filho (Presidente da Banca avaliadora / Orientador – UEA)



Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira (Examinador Interno – UEA)



Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montavam Filho (Examinador Interno – UEA)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força e coragem todos os dias para que eu pudesse enfrentar as dificuldades da vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edilson de Carvalho Filho, por todo incentivo, paciência e apoio ao me orientar neste trabalho.

À minha mãe Sueli, que sempre esteve ao meu lado, me ajudando a conquistar meus sonhos, e que sempre acreditou em mim.

Aos meus irmãos e irmãs, Claucione, Claudonei, Dirlene, Miriane, Cláudia, Jéssica e Layanne, que sempre me incentivaram, e torceram pelas minhas conquistas.

Ao meu companheiro e melhor amigo Denis, por todo carinho, empatia e cuidados.

Aos amigos que encontrei. Principalmente minha melhor amiga Danieli.

À Universidade do Estado do Amazonas (UEA), que me proporcionou boas experiências profissionais e pessoais. E poder conhecer muitos professores dedicados.

## **RESUMO**

O presente trabalho trata-se de uma análise multifractal dos níveis do rio Amazonas para a cidade de Tabatinga, os dados utilizados foram coletados entre os anos de 1982 a 2022, e obtidos pelo site oficial da Agência Nacional de Águas. Obtemos a caracterização multifractal da série de níveis a partir do método MF-DFA. Inicialmente buscamos esclarecer alguns conceitos importantes para o entendimento do trabalho e a partir disto, pudemos realizar cada passo do método. Após esses procedimentos conseguimos alcançar o objetivo principal deste trabalho, que é caracterizar a dinâmica das cheias e vazantes do rio Amazonas na altura (frente) da cidade de Tabatinga através de um espectro multifractal extraído a partir do método multifractal detrended fluctuation analysis (MF-DFA).

Palavras-chave: Multifractalidade; Rio Amazonas; Tabatinga.

## **RESUMEN**

Este trabajo es un análisis multifractal de los niveles del río Amazonas para la ciudad de Tabatinga, los datos utilizados fueron recogidos entre los años 1982 al 2022, proporcionados por el sitio web oficial de la Agencia Nacional de Aguas. Obtenemos la caracterización multifractal de la serie de niveles a partir del método MF-DFA. Inicialmente, buscamos aclarar algunos conceptos importantes para la comprensión del trabajo y a partir de ello pudimos llevar a cabo cada paso del método. Luego de estos procedimientos pudimos lograr el objetivo principal de este trabajo que es caracterizar la dinámica de las crecidas y reflujos del río Amazonas a la altura (frente) de la ciudad de Tabatinga a través de un espectro multifractal extraído del multifractal método detenido de análisis de fluctuaciones (MF-DFA).

Palabras-clave: Multifractalidad; Río Amazonas; Tabatinga.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 4.1</b> - Comportamento de $s$ em relação à $h(2)$ .....	16
<b>Figura 4.2</b> - a) Série original e b) série integrada.....	17
<b>Figura 4.3</b> - Série dos níveis do rio em escala log-log de $F_q(s)$ para $q = 2$ , em função de $s$ .....	18
<b>Figura 4.4</b> - Expoente generalizado de <i>Hurst</i> $h(q)$ em função de $q$ , para a série original (azul) e para a série embaralhada (vermelho).....	18

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	10
2.1 Geometria Fractal, Dimensão e Fractais.....	10
2.2 Expoente de Hurst e Séries Temporais.....	11
2.3 Lei de Potência .....	11
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....	13
3.1 Área de Estudo e Dados de Níveis de Rio.....	13
3.2 Descrição do Método.....	13
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	16
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	20
REFERÊNCIAS .....	21

## 1 INTRODUÇÃO

O rio Amazonas abrange aproximadamente uma área de  $6,2 \times 10^6 km^2$  (REGO, 2012, p.2), sendo esta a maior bacia hidrográfica do mundo com relação a sua extensão e ao volume de água, além de ser a principal via de transporte dos habitantes locais. Entre as suas sub-bacias temos o rio Solimões, que por sua vez percorre os arredores de muitos municípios amazonenses, entre eles, está o município de Tabatinga.

O ciclo de cheias e vazantes de um rio carrega informações importantes que podem ser usadas para caracterizá-lo, o que, por sua vez, influencia diretamente no clima da região por onde passa. Em particular, o escoamento de determinadas bacias pode apresentar um comportamento de escala no espaço e no tempo (PANDEY, LOVEJOY & SCHERTZER, 1998). Sabe-se que o fluxo de vários rios apresenta correlação de longo alcance, descritos por uma lei de potência (HURST, 1951).

Além disso, apesar de estarmos bem familiarizados com a geometria euclidiana, que descreve bem, do ponto de vista matemático, figuras como retas, quadrados, entre outras. O comportamento do rio, da chuva, das ramificações de uma árvore, entre outros objetos na natureza, não pode ser explicado dessa forma. Para estes objetos temos geometria fractal que, na verdade, é uma extensão da geometria clássica (geometria euclidiana).

Nesse sentido, este trabalho tem o intuito de contribuir com estudos voltados para o uso da geometria fractal em fenômenos naturais. Tendo como objetivo principal caracterizar a dinâmica das cheias e vazantes do rio Amazonas na altura (frente) da cidade de Tabatinga, a partir de um espectro multifractal. O presente estudo está dividido em cinco seções. Na seção seguinte temos a fundamentação teórica, onde apresentamos os referenciais teóricos utilizados nesse trabalho. A partir disso, os procedimentos metodológicos, apresentando o nosso objeto de estudo e o método utilizado. Em seguida, temos os resultados e discussões, onde apresentamos os nossos resultados obtidos a partir do método. E por fim, temos as considerações finais.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Geometria Fractal, Dimensão e Fractais

A geometria fractal, desenvolvida principalmente pelo matemático francês Benoît Mandelbrot, é usada para estudar as propriedades de determinados objetos que não podem ser bem definidos através da geometria clássica. Segundo Mandelbrot (1982, p. 1): “Nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é lisa, nem o relâmpago viaja em linha reta”.

Observando as formas existentes ao nosso redor, percebemos que muitos objetos ficaram esquecidos na geometria clássica (euclidiana). Com a geometria fractal podemos trabalhar com objetos que não podem ser bem descritos na geometria clássica. São estes os fractais. Os fractais podem ser encontrados na natureza, podem ser gerados por um computador ou a partir de construções geométricas, entre outros. Mandelbrot (1982, p. 2) chamou esses objetos de fractais, ele cunhou o termo fractal do adjetivo latino *fractus*, que é correspondente do verbo latino *frangere* e que significa quebrar, ou simplesmente quebrado. Os fractais apresentam formas irregulares, um dos motivos que os levaram a serem deixados de lado por um longo período. Um aspecto importante dos fractais é a autossimilaridade. Sua aparência apresenta certo padrão repetitivo, ou seja, aparenta a mesma forma em diferentes escalas.

Algo importante de se ressaltar é que na geometria clássica, consideramos as dimensões como unidades inteiras, enquanto os fractais apresentam dimensão com valores fracionários. A dimensão fractal é usada para caracterizar essas formas irregulares (formas dos fractais). Existem diferentes métodos para extrair a dimensão fractal, alguns destes são: DFA (Detrended Fluctuation Analysis) (Peng, 1994), Box-counting, Massa Raio, Análise de Intersecção Acumulativa, Divers (Compass), entre outros (Backes e Bruno, 2005).

No decorrer do desenvolvimento da geometria fractal, percebeu-se a existência de multifractais. Os multifractais são subconjuntos de fractais entrelaçados com diferentes expoentes de escala (FEDER, 1988, p. 67). Os multifractais apresentam uma característica diferente dos fractais, enquanto que os fractais apresentam um único expoente de escala, os multifractais tendem a apresentar mais de dois expoentes de escala.

Para os multifractais, entre os métodos usados para caracteriza-los, temos, por exemplo, o de Kantelhardt et al. (2002) conhecido como MF-DFA (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis) que generaliza o método desenvolvido por Peng et. al. (1994) (DFA),

para o caso em que a série temporal apresenta um comportamento multifractal. No caso do método DFA, é importante destacar que a sua aplicação é voltada para caracterizar apenas objetos fractais. Contudo, percebeu-se que para uma caracterização mais apropriada das séries de vazão de rios seria necessário fazer uma aproximação multifractal (TESSIER ET AL., 1996).

## 2.2 Expoente de Hurst e Séries Temporais

O expoente de Hurst  $H$ , é uma forma de caracterizar o tipo de série temporal analisada. A partir de um estudo feito pelo hidrólogo Harold Edwin Hurst, para a construção de uma represa, foi desenvolvido um método chamado análise alcance reescalado ( $R/S$ ) para determinar o volume necessário de um reservatório. Esta relação é dada pelo alcance ( $R$ ) e o desvio padrão ( $S$ ), considerando a dinâmica da água. A partir da aplicação deste método em outros fenômenos da natureza, Hurst percebeu que esta relação segue um comportamento de lei de potência. Onde o expoente de escala, são sempre valores entre 0 e 1, e então conhecido como expoente de Hurst  $H$  (REGO, 2012, p. 17).

Mais tarde, Mandelbrot relacionou o expoente de Hurst com o Movimento Browniano, usando-o para determinar a dimensão fractal de séries temporais (MANDELBROT, 1982, p. 244). O movimento Browniano descreve o comportamento randômico quando expoente de Hurst é igual a 0,5, ou seja o movimento é aleatório.

Uma série temporal é um conjunto de dados coletados ao longo do tempo. Alguns componentes importantes das séries temporais são: a tendência, que informa a evolução da série se esta cresce ou decresce com o tempo; a sazonalidade, que é a repetição de um dado fenômeno em um determinado período de tempo; e a componente aleatória, que tem a ver com a correlação presente na série, ou seja, quando a série não é correlacionada, de média zero e variância constante (REGO, 2012). Em relação ao expoente de Hurst, as séries podem ter memória longa (ou persistência) quando  $H$  fica no intervalo  $0,5 < H \leq 1$ . Quando  $H$  fica no intervalo  $0 \leq H < 0,5$  isto indica que a série tem memória curta (ou anti persistência). Para séries que não apresentam correlação (séries aleatórias) o expoente de Hurst é igual a 0,5.

## 2.3 Lei de Potência

Lei de potência ou lei de escala é uma lei que descreve o comportamento de muitos fenômenos na natureza. Podemos observar essa lei no crescimento biológico, no comportamento populacional, nas séries temporais e em outros fenômenos da natureza (REGO, 2012). Uma lei de potência pode ser representada da seguinte forma:

$$y = \alpha x^{\beta}$$

Onde  $x$  e  $y$  são duas grandezas,  $\alpha$  é a constante de proporcionalidade e  $\beta$  é o expoente de escala.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho foi desenvolvido a partir de um estudo do ponto de vista teórico e aplicado sobre a teoria fractal e a sua extensão multifractal. Organizamos os dados coletados a fim de formar uma série temporal (veja a figura 4.2) que foi posteriormente analisada sob o ponto de vista multifractal.

#### 3.1 Área de Estudo e Dados de Níveis de Rio

Coletamos dados de vazão e de cheia do rio Amazonas, próximos à cidade de Tabatinga (no estado do Amazonas) no site oficial da Agência Nacional de Águas (ANA)<sup>1</sup>. O rio Amazonas nessa região recebe o nome de rio Solimões até Manaus, onde se encontra com o rio Negro e, a partir daí, recebe o nome de rio Amazonas<sup>2</sup>. O município de Tabatinga está localizado na região norte do Brasil, interior do estado do Amazonas e que faz parte da tríplice fronteira, entre Peru, Brasil e Colômbia. Os dados foram coletados de uma estação hidrométrica entre os anos 1982 a 2022. O nome da estação é Tabatinga, onde a mesma drena uma área de 874.000 km<sup>2</sup>, de latitude -4.2347 e longitude -69.9447.

#### 3.2 Descrição do Método

Usamos o método MF-DFA, desenvolvido por Kantelhardt et al. (2002) para estudar esta série temporal. Basicamente, o método consiste em cinco passos, onde os três primeiros passos são os mesmos do DFA convencional (Peng, 1994).

Consideramos  $x = \{x_k\}$  uma série de suporte compacto, de comprimento  $N$ , onde  $k = 1, \dots, N$ . O suporte é definido como o conjunto dos índices  $k$  com valores diferentes de zero,  $x$  é compacto se  $x_k = 0$  apenas para uma fração insignificante da série. Onde calculamos os momentos integrando a série de dados, em que a  $\langle x \rangle$  é a média da série. Chamamos esta nova série  $Y(i)$  de série integrada

- Passo 1: Determinando o “perfil“

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x_k - \langle x \rangle], i = 1, \dots, N.$$

---

<sup>1</sup> Disponível em: [www.gov.br/ana/pt-br](http://www.gov.br/ana/pt-br)

<sup>2</sup> Disponível em: [www.todamateria.com.br/rio-amazonas](http://www.todamateria.com.br/rio-amazonas)

- Passo 2: Dividindo o perfil  $Y(i)$  (série integrada) em  $N_s = \text{int}(N/s)$  segmentos não sobrepostos de comprimento  $s$ .
- Passo 3: Como o comprimento  $N$  da série, muitas vezes, não é um múltiplo da escala de tempo  $s$  considerada e sendo  $\text{int}(N/s)$  um número inteiro, uma pequena parte do final do perfil pode sobrar. Para essa parte não ser descartada, repetimos o passo partindo do final da série e assim obtemos  $2N_s$  segmentos. A partir disso fazemos um ajuste polinomial para cada um dos  $2N_s$  segmentos e calculamos variância, dada pelas expressões

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(v-1)s + i] - y_v(i)\}^2$$

para cada segmento  $v$ ,  $v = 1, \dots, N_s$  e

$$F^2(v, s) \equiv \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2$$

para  $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$ . Onde  $y_v(i)$  é o polinômio ajustado no segmento  $v$ . No procedimento do ajuste a ordem do polinômio usado pode ser linear, quadrático, cúbico ou de uma ordem superior  $m$ , classificados respectivamente como  $DFA1, DFA2, DFA3, \dots, DFA_m$ .

- Passo 4: Calculamos a média de todas essas variâncias determinando a  $q$ -ésima raiz desses resultados usando a expressão

$$F_q(s) \equiv \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}$$

chamamos  $F_q$  de função de flutuação de ordem  $q$ , onde  $q$  pode assumir qualquer valor real. Buscamos avaliar como a função de flutuação  $F_q(s)$  depende da escala de tempo  $s$  para valores diferentes de  $q$ . Por construção,  $F_q(s)$  é definido apenas para  $s \geq m + 2$ , ou seja,  $F_q(s)$  depende da escolha da ordem  $m$  do polinômio usado no procedimento de ajuste. Podemos observar que  $h(0)$  não pode ser definido para séries temporais com suporte fractal, onde  $h(q)$  diverge para  $q \rightarrow 0$ . Para  $q=0$ , utilizamos a seguinte expressão

$$F_0(s) \equiv \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln [F^2(v, s)] \right\} \sim s^{h(0)}$$

- Passo 5: Determinamos o comportamento de escala da função de flutuação analisando o gráfico log–log de  $F_q(s)$  versus  $s$  para cada valor de  $q$ . Dessa forma, deverá apresentar uma lei de potência do tipo:

$$F_q(s) \sim s^{h(q)}$$

Onde o expoente  $h$  depende do valor de  $q$ . Esse tipo de comportamento representa a presença de multifractalidade na série. No qual,  $h(q)$  pode ser chamado de expoente generalizado Hurst com  $H = h(2)$  sendo o expoente de Hurst “clássico”.

Existem dois tipos de multifractalidade em séries temporais:

- (i) Multifractalidade devido a uma ampla função de densidade de probabilidade para os valores da série temporal.
- (ii) Multifractalidade devido a diferentes correlações de longo alcance das pequenas e grandes flutuações.

Para sabermos o tipo de multifractalidade precisamos observar a série temporal embaralhada. O embaralhamento da série consiste em posicionar os valores da série de forma randômica, dessa forma a correlação é destruída.

Se for do tipo (ii), então a série embaralhada apresenta  $h_{shuf}(q) = 0,5$  de comportamento aleatório. Se for do tipo (i), então  $h(q) = h_{shuf}(q)$ , ou seja, o expoente obtido na série original são os mesmos obtidos para a série embaralhada, onde a série não é afetada. Entretanto, se ambos os tipos estiverem presentes, a série embaralhada apresenta fraca multifractalidade com relação à série original.

- Passo de eliminação da sazonalidade: A sazonalidade é uma característica que está embutida na série. Como queremos identificar a correlação para todos os anos da série essa sazonalidade, que deve ser anual, pode atrapalhar. Para eliminarmos a sazonalidade subtraímos o ciclo anual médio de um dado dia ao longo do ano, dado pela equação:

$$x_{new} = x_k - \langle x \rangle_{day}$$

onde  $x_k$  são os elementos da série original e  $\langle x \rangle_{day}$  é a média a daquele dia para todos os anos.

Para todos os passos realizados no trabalho, utilizamos a linguagem de programação Python na construção do algoritmo.

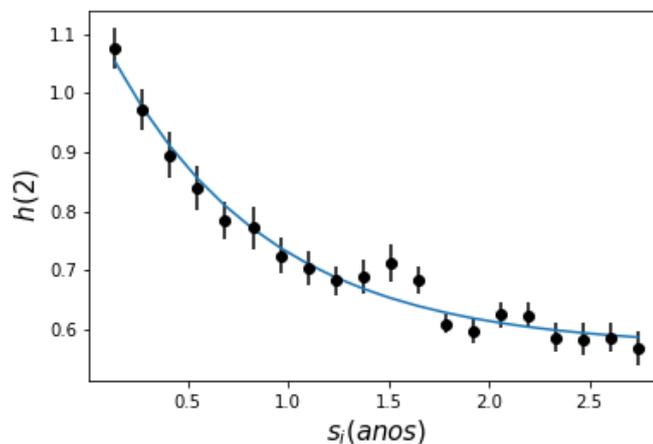
## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos dados fornecidos pela ANA, foi necessário fazer um preenchimento, pois havia ‘buracos’ (dados faltantes) na série. Realizamos dois tipos de ajuste, pois apenas um único tipo de ajuste não foi o suficiente para preencher todos os ‘buracos’. Para os ‘buracos’  $\Delta T$  menor que um mês usamos o ajuste spline, onde este ajuste é capaz de aproximar com dados reais. Para  $\Delta T$  maior que um mês usamos a média daquele dia durante todos os anos.

Incluímos no processo de determinação da multifractalidade da série, o passo de eliminação da sazonalidade, onde subtraímos o ciclo anual médio, de um dado dia ao longo do ano. Os resultados permaneceram inalterados, pois buscamos apenas eliminar a componente de sazonalidade. Observamos que, mesmo aplicando o passo de eliminação da sazonalidade presente na série, ela não pode ser eliminada completamente, afetando o valor de  $h(2)$ , e que a escolha do valor inicial da escala  $s$ , influencia na determinação do  $h(2)$ , usado para mostrar a multifractalidade e determinar o tipo de correlação presente na série.

Entretanto, conseguimos eliminar a sazonalidade aumentando este valor inicial da escala  $s$ . Para isto, fizemos testes observando como  $s_i$  se comporta com relação à  $h(2)$ , percebemos que para  $s_i$  pequeno  $h(2)$  é muito grande, caso contrário quando aumentamos  $s$  ele se estabiliza em torno de determinado valor. Com isso, fizemos um ajuste usando uma função exponencial para sabermos em qual valor  $s$  estabiliza, podemos observar o comportamento de  $s$  em relação à  $h(2)$  na figura 4.1.

Figura 4.1: Comportamento de  $S$  em relação à  $h(2)$ .

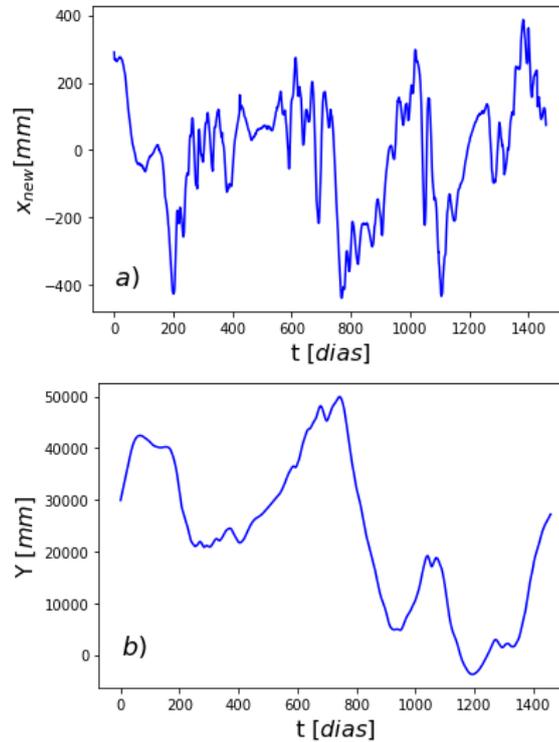


**Fonte:** Elaborada pelo próprio autor.

Na figura 4.1 buscamos demonstrar o comportamento de  $s_i$  em relação à  $h(2)$ , justificando a escolha do valor inicial da escala  $s$ , lembrando que  $s$  é o tamanho ou

quantidade de pontos de cada segmento  $N_s$ . Observamos que  $s_i$  estabiliza a partir de 1 ano (365 dias) e por isso adotamos esse valor.

Figura 4.2: a) Série original e b) série integrada



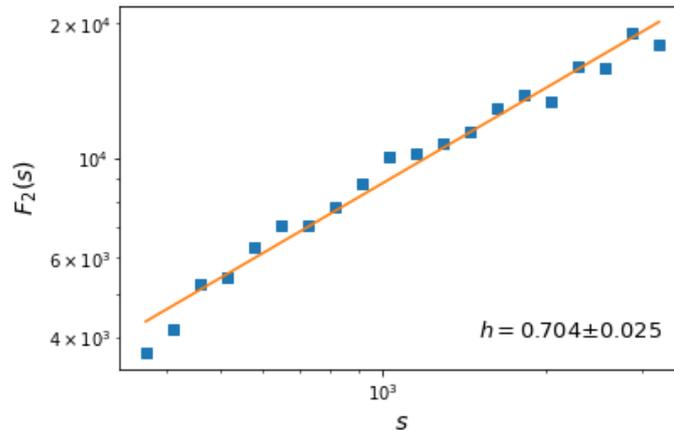
**Fonte:** Elaborada pelo próprio autor.

Na figura 4.2 podemos observar o comportamento temporal dos níveis do rio Amazonas/Solimões incluindo o passo de eliminação da sazonalidade (painel superior) e a série integrada (painel inferior) do passo um. Os dados apresentados nesta figura são de quatro anos, de 1983 a 1986 em dias.

Em seguida executamos os passos dois, três, quatro e cinco, como apresentado na seção 3. Onde  $s$  foi definido da forma  $365 \leq s \leq N/4$  e  $m = 2$ . Calculamos também  $F_q$  versus  $s$ , para valores de  $q$  entre -10 a 10, para o caso generalizado do expoente de Hurst  $h(q)$ .

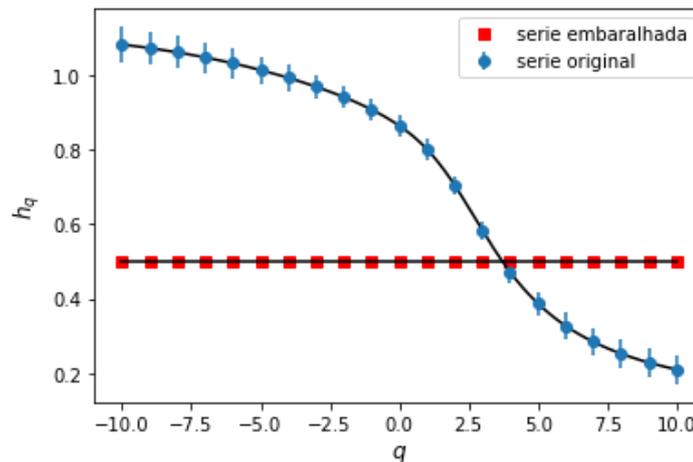
A figura 4.3 mostra o comportamento de  $F_2$  versus  $s$  em escala log-log. Podemos observar a inclinação da reta, obtida a partir do ajuste linear, de forma que a inclinação da reta é equivalente ao  $h$  (expoente de Hurst) para  $q = 2$ . Para isso, transformamos a proporcionalidade  $F_q(s) \sim s^{h(q)}$  do passo 5, em uma igualdade  $F_q(s) = ks^{h(q)}$ , em seguida tiramos o  $\log$  da expressão  $\log F_q(s) = \log k + h(q) \log s$ .

Figura 4.3: Série dos níveis do rio em escala log-log de  $F_q(s)$  para  $q = 2$ , em função de  $s$ .



Fazendo o ajuste e usando o método dos mínimos quadrados, obtemos o valor do expoente  $h = 0,7044 \pm 0.025$ , o que indica memória longa, ou seja, guarda memória do passado remoto.

Figura 4.4: Expoente generalizado de Hurst  $h(q)$  em função de  $q$ , para a série original (azul) com barra de erro e para a série embaralhada (vermelho).



Na figura 4.4 podemos observar  $h(q)$  variando para cada valor de  $q$ , dessa forma, mostrando a existência da multifractalidade na série analisada. Também podemos observar a série após o embaralhamento.

Embaralhamos a série temporal, afim de sabermos o tipo de multifractalidade presente na série, além de testarmos o algoritmo. Como cada vez que embaralhávamos a série, achávamos determinados valores de  $h$  em relação aos valores de  $q$ , sendo os valores de  $q$  -10

a 10. Então, embaralhamos a série 100 vezes e calculamos a média dos  $h$  para todos os valores de  $q$ .

Com isso, obtemos o valor médio de  $h$  para todos os valores de  $q$ . Onde a multifractalidade é do tipo (ii), com valores de  $h(q)$  aproximadamente igual a  $h_{shuf}(q) = 0,5$ , devido as diferentes correlações presentes na série.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para este trabalho, utilizamos o método MF-DFA, incluindo o passo de eliminação da sazonalidade, para analisarmos os dados diários de níveis do rio Amazonas/Solimões coletados na altura (frente) da cidade de Tabatinga (no estado do Amazonas).

A partir do método conseguimos identificar o comportamento multifractal da série, uma vez que o expoente de Hurst generalizado dependia de  $q$ , além de identificarmos o tipo de correlação presente na série e o tipo de multifractalidade.

Segundo Kantelhardt et al (2003), essa caracterização multifractal dos dados de vazão de rios pode ser considerada uma espécie de “impressão digital” para cada rio, podendo servir para testar modelos de previsão que utilizem esse tipo de dado. Através da realização desta análise, esperamos contribuir com futuros trabalhos voltados para o uso da Geometria Fractal, entre outros.

Finalmente, podemos concluir que o rio Amazonas chamado de Solimões quando passa na frente da cidade de Tabatinga, pode ser caracterizado a partir da perspectiva fractal, através de um espectro multifractal, onde o mesmo apresentou correlação de longo alcance. Com isso, podemos dizer que o escoamento apresenta um comportamento de escala no espaço e no tempo.

## REFERÊNCIAS

BACKES, A. R., BRUNO, O. M. **Técnicas de Estimativa de Dimensão Fractal**. Relatórios Técnicos – USP, 2005.

Disponível em: <http://www.todamateria.com.br/rio-amazonas>. Acesso em: 01 mar. 2023.

Disponível em: <http://www.gov.br/ana/pt-br>. Acesso em: 13 dez. 2023.

FEDER, Jens. **Fractals**. Plenum Press, 1988.

HURST, H. E., 1951. **Long-term storage capacity of reservoirs**. Trans. Am. Soc. Civil. Eng. 116, 770–808.

KANTELHARDT, J.W.,RYBSKI, D, ZSCHIEGNER, S.A., BRAUN, P., KOSCIELNY-BUNDE, E. LIVINA, V.,HAVLIN, S., BUNDE, A., 2003. **Multifractality of river runo and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods**. Physica A 330, 240 – 245.

KANTELHARDT, J. W., ZSCHIEGNER, S.A., KOSCIELNY-BUNDE, E., BUNDE, A., STANLEY, H.E., 2002. **Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series**. Physica A 316, 87–114.

MANDELBROT, Benoit. B. **The fractal geometry of nature**. (W. H. - Freeman and Company,1982).

PANDEY, G., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., 1998. **Multifractal analysis of daily river flows including extremes for basins of five to two million square kilometers, one day to 75 years**. Journal of Hydrology 208, 62 81.

PENG, C. K., BULDYREV, S.V., HAVLIN, S. ,SIMONS, M., STANLEY, H.E.,GOLDBERGER, A.L., 1994. **Mosaic organization of DNA nucleotides**. Phys. Rev. E 49 1685.

TESSIER, Y., LOVEJOY, S., HUBERT, P., SCHERTZER, D., PECKNOLD, S., 1996. J. **Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions**. Geophys. Res. Atmos. 101 26 427.

REGO, C. R. C., 2012. **Multifractalidade dos rios brasileiros**. Tese de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Física (PPG-FIS). Universidade Federal do Amazonas. Manaus.