UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE TABATINGA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOVANY CAMPOS DOS SANTOS

O USO DA INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR O VOLUME DE UMA GARRAFA CIRCULAR ATRAVÉS DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Tabatinga – AM
2021

JOVANY CAMPOS DOS SANTOS

O USO DA INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR O VOLUME DE UMA GARRAFA CIRCULAR ATRAVÉS DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado com o objetivo de aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso Ⅱ, ministrada pela Prof.ª Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudo Superiores de Tabatinga da Universidade do Esatado do Amazonas.

Orientador: Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho

Tabatinga – AM
2021

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

C198u Santos, Jovany Campos dos

O uso da integral definida para calcular o volume de uma garrafa circular através da interpolação de lagrange / Jovany Campos dos Santos. Manaus : [s.n], 2021.

21 f.: color.; 30 cm.

TCC - Graduação em Matemática - Licenciatura - Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2021.

Inclui bibliografia

Orientador: Montalvam Filho, Zequias Ribeiro

1. Integral definida. 2. Modelagem. 3. Interpolação de lagrange . I. Montalvam Filho, Zequias Ribeiro (Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III. O uso da integral definida para calcular o volume de uma garrafa circular através da interpolação de lagrange

Elaborado por Jeane Macelino Galves - CRB-11/463

JOVANY CAMPOS DOS SANTOS

O USO DA INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR O VOLUME DE UMA GARRAFA CIRCULAR ATRAVÉS DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado com o objetivo de aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso Ⅱ, ministrada pela Prof.ª Ma. Karem Keyth de Oliveira Marinho, do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Estudo Superiores de Tabatinga da Universidade do Esatado do Amazonas.

Data de aprovação: 11 de agosto de 2021

Prof. Esp. Zequias Ribeiro Montalvam Filho – Orientador (CSTB/UEA)

Prof. Me. Edfram Rodrigues Pereira – Membro Interno (CSTB/UEA)

Profª. Ma. Thalita da Costa Taquita Hilário – Membro Interno (CSTB/UEA)

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida, pela excepcional família, pelos amigos e por todos que me ajudaram durante esta trajetória.

RESUMO

Mediante a dificuldade de realizar cálculos maiores para obter volumes de objetos do nosso cotidiano, procura-se quase sempre fazer cálculos mais simples, que usamos por fórmulas de sólidos geométricos. Desse modo, este trabalho relata o cálculo do volume de uma garrafa circular que foi nosso objeto de estudo, onde encontramos uma quantidade aleatória de pontos conforme as curvas e retas no contorno da garrafa. Para encontrarmos as medidas que formaram esses pontos contamos com o auxílio de uma trena e uma fita métrica. Por meio da aproximação destes pontos aplicamos a Interpolação de Lagrange, obtendo-se assim funções que formaram a região do solido, na qual usamos a Integral Definida em cada uma delas para calcular os valores possíveis. Com isso, juntamos esses valores e tivemos o resultado final do cálculo do volume da garrafa circular.

Palavras-chave: Integral Definida, Modelagem, Interpolação de Lagrange.

RESUMEN

Debido a la dificultad de realizar cálculos más grandes para obtener volúmenes de objetos en nuestra vida diaria, casi siempre intentamos hacer cálculos más simples, que usamos para fórmulas de sólidos geométricos. Así, este trabajo reporta el cálculo del volumen de una botella circular que fue nuestro objeto de estudio, donde encontramos un número aleatorio de puntos según las curvas y rectas del contorno de la botella. Para encontrar las medidas que formaron estos puntos, contamos con la ayuda de una cinta métrica y una cinta métrica. Aproximando estos puntos, aplicamos la Interpolación de Lagrange, obteniendo así funciones que formaron la región del sólido en la que usamos la Integral Definida en cada uno de ellos para calcular los valores posibles. Con eso, juntamos estos valores y obtuvimos el resultado final del cálculo del volumen de la botella circular.

Palabras clave: Integral definida, Modelado, Interpolación de Lagrange.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Calcular o volume de algum objeto sem utilizar uma fórmula já pronta de alguma figura geométrica nos aparenta ser complicado. Porém, este trabalho teve a concepção de tentar demonstrar que não é impossível realizar cálculos fazendo aplicações para obter o volume de objetos que fazem parte do nosso dia a dia.

Neste trabalho realizamos o cálculo do volume de uma garrafa circular, na qual foi preciso fazer medições com uma fita métrica e uma trena para encontrar os valores dos pontos no contorno desta garrafa. Para a realização deste cálculo usamos a Interpolação de Lagrange e a Integral Definida para encontrarmos o volume deste recipiente. É importante salientar que todo processo para a obtenção dos cálculos desse trabalho foi feito em nossas residências, isso por motivo da pandemia causada no mundo durante o período desta pesquisa.

É bem mais prático realizar cálculo de volumes a partir de fórmulas já prontas, principalmente quando se tem formatos de sólidos geométricos que nos permitem encontrar o volume com cálculos mais simples. A partir desse olhar, realizamos o cálculo do volume de um recipiente através de outro método que normalmente não é utilizado nessa área. Com isso, é possível afirmar que podemos utilizar diversas formas diferentes para calcular o volume, mostrando que não apenas por uma fórmula dada a partir do modelo da figura do recipiente em que se busca esse volume.

Desse modo, este projeto de pesquisa teve por finalidade nos proporcionar uma resposta na aplicação do cálculo de uma integral definida através da interpolação de Lagrange para encontrar o volume de uma garrafa circular, sendo assim, usando este conteúdo no nosso cotidiano.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática está voltada para circunstancias da nossa realidade, como enfatiza Biembengut e Hein (2003, p. 16), “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.”

Conforme Bassanezzi (2002, apud Santos 2018, p. 10):

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo.

Modelar um objeto para usá-lo na matemática tem uma expressão de grande importância, como ressalta Santos (2018, p. 9) "a modelagem matemática tem extrema importância na matemática, pois é o momento onde um problema é modelado por recursos matemáticos com a finalidade de solução técnica."

Com isso, a modelagem matemática tem muito a nos acrescentar quanto a problemas da nossa realidade, assim como o modelo que formalizamos em nosso problema.

2.2 Interpolação de Lagrange

Interpolar uma função entende-se que "significa aproximá-la através de uma outra função, escolhida em uma classe de funções previamente definidas." (LOPES, 2018, p. 34). Sendo que essa outra função é um polinômio $P(x)$.

Quando falamos em interpolação polinomial entende-se, segundo Gabetta Junior (2015, p. 69) que "quando a função de interpolação f é uma função polinomial, dizemos que a interpolação é uma interpolação polinomial."

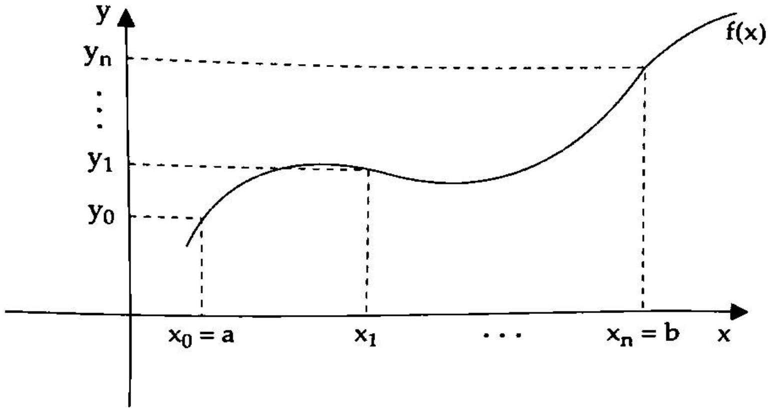
Para Puga, Tárcia e Paz (2009, p. 111)

> A construção do polinômio interpolador usando a forma usual para polinômios é bastante simples. Porém devemos observar que para um grande números de pontos o sistema linear é de ordem elevada e, ainda, a base canônicas para polinômios gera sistemas lineares mal condicionados, fornecendo solução instável.

Segundo Lopes (2018, p. 35), "A utilização dos polinômios na interpolação de funções deve-se ao fato de que estes são mais fáceis de derivar e integrar, pois também são polinômios." Isso nos possibilita dizer que através de uma função encontrada por meio de uma interpolação polinomial, podemos utilizar a integral definida para encontrar o volume de algum objeto.

Conforme ARENALES e DAREZZO (2018, p. 128):

Figura 1. Função $f(x)$.



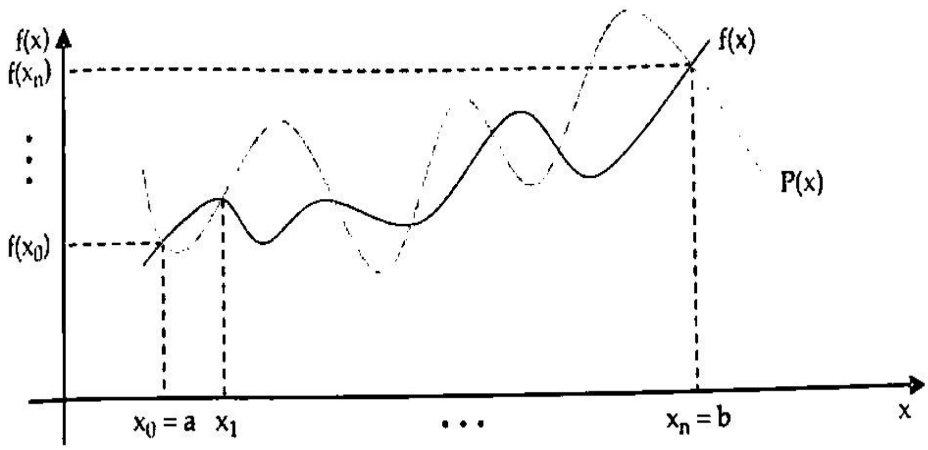
Fonte: ARENALES e DAREZZO (2008, p.128)

Interpolar esta função $f(x)$ definida em x_0, x_1, ..., x_n, $(n + 1)$ pontos distintos de um intervalo [a, b] consiste em aproximar esta função por um polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que este coincida com a função nestes pontos, isto é,

$$P(x) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Segundo ARENALES e DAREZZO (2018, p. 129), Denominamos polinômio interpolador de uma função $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos de um intervalo [a, b], ao polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n, que coincide com a função nos pontos x_i, $i = 1, \dots, n$, isto é, $P(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Como mostra o gráfico na figura:

Figura 2. Função $f(x)$ e seu polinômio interpolador $P(x)$.



Fonte: ARENALES e DAREZZO (2008, p.129)

ARENALES e DAREZZO, (2008, p. 132 e 133) explicam a fórmula da Interpolação de Lagrange da seguinte maneira:

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos de um intervalo [a, b] e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Considere o polinômio na forma:

$$\mathrm{P(x)} = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k$$

Por ser um polinômio Interpolador, temos:

$P(x) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. $P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = y_i$ Para isso é preciso:

$$\{l_k(x_i) = 0 \; para \; i \neq k$$
$$l_k(x_i) = 1 \; para \; i = k$$

Para que P(x) satisfaça esta propriedade, podemos considerar:

$$l_k(\mathrm{x}) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(\mathrm{x} - x_i)}{(\mathrm{x} - x_k)}$$

Dessa maneira temos a fórmula de Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k$$

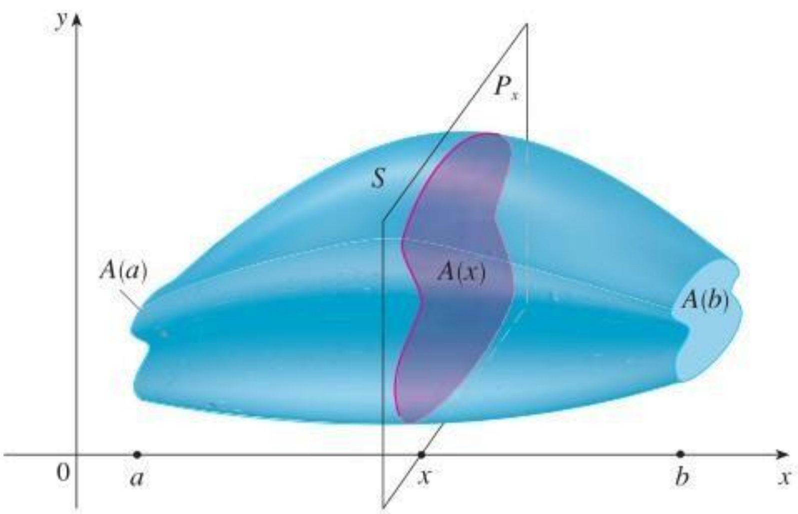
2.3 Integral Definida

Neste trabalho usamos também a integral definida para calcular o volume da garrafa após termos encontrado as funções.

Segundo STEWART (2013, p.389 e 390, apud Santos 2018, p. 13) para realizar esta atividade para um dado sólido S devemos realizar os seguintes procedimentos:

Começamos interceptando S com um plano $P(x)$ perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, onde a≤x≤b, obtemos uma região plana cuja área é $A(x)$, como mostra a figura 3.

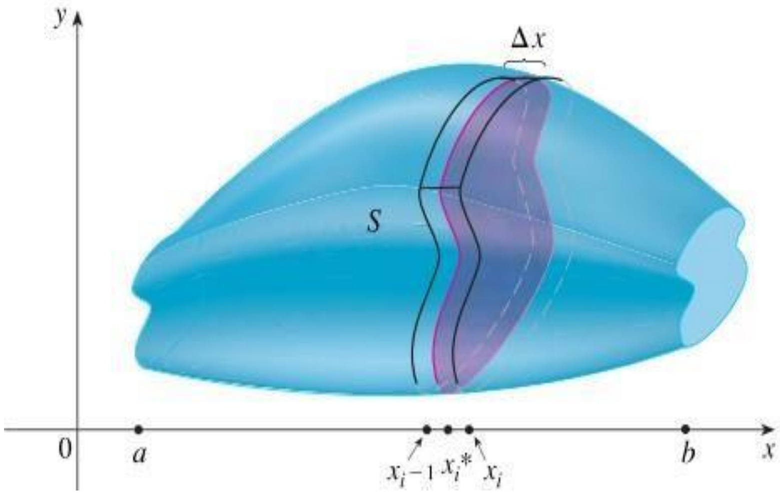
Figura 3. Sólido *S* e região plano com área $A(x)$



Fonte: STEWART (2013, p. 389)

Seguindo dividimos S em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando os planosP_{x1}, P_{x2}, ..., isto irá determinar pontos x_1, x_2, ..., . Escolhendo pontos amostrais $x^*{}_1$nos intervalos $[x_i - 1, x_i]$ podemos aproximar a i-ésima fatia S_i a um cilindro com área da base $A(x^*{}_i)$ e altura Δ_x, conforme Figura 4.

Figura 4. Fatia S_i



Fonte: STEWART (2013, p. 390)

A aproximação para o volume da i-ésima fatia s_i é:

$$V(S_i) \approx \mathrm{A}(x^*{}_i)\Delta_x$$

Aproximação para o volume total s:

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} A(x^*{}_1)\Delta_x$$

Definição: Seja S um sólido que está entre $x = a \; e \; x = b$ Se a área da secção transversal de S no plano Px, passando por *x* e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde *A* é uma função contínua, então o volume de *S* é:

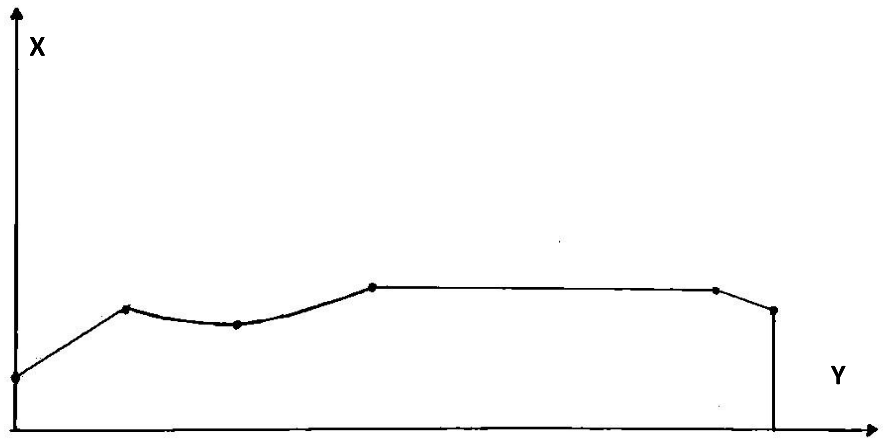
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}(x^*{}_i)\Delta_x = \int_a^b A(x)dx$$

3 METODOLOGIA

A princípio esta pesquisa teve uma revisão bibliografia de assuntos em que são semelhantes aos que estão presentes neste trabalho, sendo a Modelagem Matemática, Interpolação de Lagrange e a Integral Definida.

Nesta pesquisa utilizamos uma garrafa circular como o nosso objeto de estudo a ser trabalhado, onde procuramos encontrar seu volume. Foi realizado uma modelagem neste objeto com intuito de encontrar uma função que descrevesse o seu contorno. Utilizamos uma fita métrica e uma trena para encontrarmos as medidas necessárias, onde usamos a trena para calcular o eixo de simetria da garrafa, que é o eixo das abscissas, como mostra a figura 5.

Figura 5. Contorno da garrafa.



Fonte: Arquivo pessoal

Assim como o eixo das abscissas representa o eixo de simetria da garrafa, o eixo das ordenadas representa o raio dos círculos, por termos trabalhado com uma garrafa circular. Ainda identificamos 6 pontos mais importantes no contorno da garrafa para se obter a função que os interpola, como mostra a tabela 1 em seguida.

Tabela 1

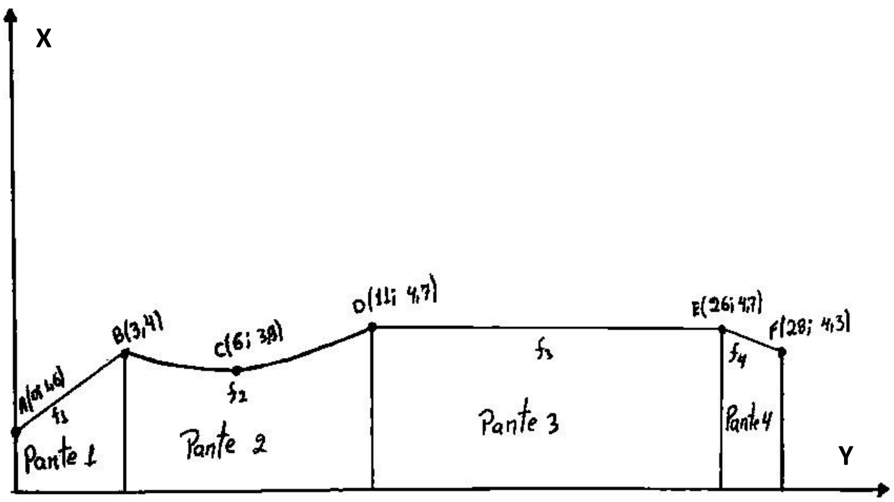
Eixo de simetria (cm)	Diâmetro (cm)	Raio (cm)
0	3,2	1,6
3	8	4
6	7,8	3,9
11	9,4	4,7
26	9,4	4,7
28	8,6	4,3

Fonte: arquivo pessoal

Os pontos encontrados no contorno da garrafa são os seguintes: *A* (0; 1,6), *B* (3, 4), *C* (6; 3,9), *D* (11; 4,4), *E* (26; 4,7) e *F* (28; 4,3), que são formados pela medida do eixo de simetria com o raio dos círculos, onde usamos a fita métrica para medir.

Usamos o Interpolador de Langrange para encontrarmos a função que intercepta esses pontos. Foi preciso dividir a região da garrafa em quatro partes, para que pudéssemos fazer cálculos mais simples e uma margem de erro menor.

Figura 6**.** Esquema gráfico do objeto para o cálculo do volume.



Fonte**:** Arquivo pessoal.

Essas quatro partes nos proporcionaram três retas e uma parábola, na reta f_1 entre os pontos *A* e *B* está a primeira parte, depois na segunda parte temos a parábola f_2 formada pelos pontos *B*, *C* e *D*, em seguida a ligação dos pontos *D* e *E* formam a reta f_3, por fim na última parte temos a reta f_4 ligada entre os pontos *E* e *F*.

Nessas retas e na parábola encontramos as funções onde aplicamos a Interpolação de Lagrange para se obter equações que foram resolvidas pelo cálculo de integral. Desse modo, encontramos o volume da garrafa, que era resultado esperado durante esta pesquisa.

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E SOLUÇÃO

O volume do sólido trabalhado nesta pesquisa foi obtido a partir da revolução das curvas f_1 a f_4 em torno do eixo das abscissas, formando círculos que tiveram o eixo x perpendicular aos mesmos.

Como vimos sobre integral definida temos:

$\int_a^b A(x)dx$, porém a área do círculo é πr^2, onde nesse problema $r = f(x)$, assim:

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Vamos fazer o cálculo detalhadamente das quatro partes, depois iremos somar os valores encontrados.

Na primeira parte vamos calcular o volume dado pela revolução da reta f_1 entre os pontos *A* (0; 1,6) e *B* (3, 4), na equação da função f_1 pelo Interpolador de Lagrange.

$$f_1(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 3}{0 - 3} = \frac{-x + 3}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{x}{3}$$

$$f_1(x) = 1{,}6\left(\frac{-x + 3}{3}\right) + 4\left(\frac{x}{3}\right) = 0{,}8x + 1{,}6$$

Vamos calcular a integral da função f_1 no intervalo [0, 3].

$$\pi \int_0^3 \left(f_1(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^3 (0{,}8\mathrm{x} + 1{,}6)^2\, dx = \pi \int_0^3 (0{,}64x^2 + 2{,}56x + 2{,}56)dx$$

$$= \pi \left(\frac{0{,}64x^3}{3} + \frac{2{,}56x^2}{2} + 2{,}56x\right)_0^3 = \pi \left(\frac{17{,}28}{3} + \frac{23{,}04}{2} + 7{,}68\right)$$

$$= \frac{34{,}56 + 69{,}12 + 46{,}08}{6}\pi = 24{,}95\pi$$

Encontramos o volume da parte 1, que é **24,95 $\boldsymbol{\pi}$**

Na parte 2 vamos calcular o volume dado pela revolução da curva f_2 entre os pontos *B* (3, 4), *C* (6; 3,9) e *D* (11; 4,7), na equação da função f_2 pelo Interpolador de Lagrange.

$$f_2\,(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x\ -\ x_1)\,(x_1\ -\ x_2)}{(x_0\ - x_1)\,(x0 -\ x_2)}\ =\ \frac{(x\ -\ 6)\,(x -\ 11)}{(3-6)\,(3-11)} = \frac{x^2 - 17x + 66}{24}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-3)(x-11)}{(6-3)(6-11)} = \frac{-x^2 + 14x - 33}{15}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-3)(x-6)}{(11-3)(11-6)} = \frac{x^2 - 9x + 18}{40}$$

$$f_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 17x + 66}{24}\right) + 3{,}9\left(\frac{-x^2 + 14 - 33}{15}\right) + 4{,}7\left(\frac{x^2 - 9x + 18}{40}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{2{,}9x^2}{120} - \frac{30{,}1x}{120} + 544{,}2$$

Vamos calcular a integral da função f_2 no intervalo [3, 11].

$$\pi\int_3^{11}\big(f_2(x)\big)^2dx = \pi\int_3^{11}\left(\frac{2{,}9x^2}{120} - \frac{30{,}1x}{120} + 544{,}2\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_3^{11}\left(\frac{8{,}41x^4}{14400} - \frac{174{,}58x^3}{14400} + \frac{4062{,}37x^2}{14400} - \frac{32760{,}84x}{14400} + \frac{296153{,}64}{14400}\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{8{,}64x^5}{72000} - \frac{174{,}58x^4}{57600} + \frac{4062{,}37x^3}{43200} - \frac{32760{,}84x^2}{28800} + \frac{296153{,}64x}{14400}\right)_3^{11}$$

$$= \frac{116124407}{864000}\pi = 134{,}399815\pi$$

Portanto, o volume da parte 2 é **134,399815π**

Na parte 3 vamos calcular o volume dado pela revolução da reta f_3 3 entre os pontos *D* (11; 4,7) e *E* (26; 4,7), na equação da função f_3 pelo Interpolador de Lagrange.

$$f_3(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 26}{11 - 26} = \frac{-x + 26}{15}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 11}{26 - 11} = \frac{x - 11}{15}$$

$$f_3(x) = 4{,}7\left(\frac{-x + 26}{15}\right) + 4{,}7\left(\frac{x - 11}{15}\right) = 4{,}7$$

Calculamos a integral da função f_3, no intervalo [11, 26].

$$\pi \int_{11}^{26} (f_3(x))^2 dx = \pi \int_{11}^{26} (4,7)^2 dx = \pi \int_{11}^{26} 22,09 dx$$

$\pi(22,09x)_{11}^{26} = (574,34 - 242,99)\pi = 331,35\pi$ Com isso o volume da parte 3 é **331,35π**.

Para o cálculo da última parte que é dado pela revolução da reta f_4 que liga os pontos *E* (26; 4,7) e *F* (28; 4,3), calculamos a equação da função f_4 pelo Interpolador de Lagrange.

$$f_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 28}{26 - 28} = \frac{-x + 28}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 26}{28 - 26} = \frac{x - 26}{2}$$

$$f_4(x) = 4,7\left(\frac{-x + 28}{2}\right) + 4,3\left(\frac{x - 26}{2}\right) = -\frac{0,4x}{2} + 9,9$$

Calculamos a integral da função f_4 no intervalo [26, 28].

$$\pi \int_{26}^{28} \left(f_4(x)\right)^2 dx = \pi \int_{26}^{28} \left(-\frac{0,4x}{2} + 9,9\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{26}^{28} \left(\frac{0,16x^2}{4} - \frac{7,92x}{2} + 98,01\right) dx = \pi \left(\frac{0,16x^3}{12} - \frac{7,92x^2}{4} + 98,01x\right)_{26}^{28}$$

$$\frac{486,32}{12}\pi = 40,5266667\pi$$

O volume da parte 4 é **40,5266667π**

Portanto o volume do sólido é a soma das quatro partes, ou seja:

$$\boldsymbol{V = 24,95\pi + 134,399815\pi + 331,35\pi + 40,5266667\pi}$$

$$\boldsymbol{V = 531,226482\pi}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabendo da dificuldade matemática em teorias de cálculos que envolvem aplicações, este trabalho nos possibilitou a ter uma visão diferente em relação a maioria dos estudantes matemáticos quanto ao assunto desta pesquisa. Com este pensamento podemos atribuir que é possível ter uma atração maior por pesquisas destinadas a aplicação de cálculos.

Ao longo desta pesquisa foi possível identificar algumas dificuldades quanto ao processo de desenvolvimento dos cálculos, como também algumas facilidades. São identificações que fazem com que os trabalhados acadêmicos na qual fazemos como pesquisadores nos mostram o quanto adquirimos aprendizados para o nosso conhecimento.

Esta pesquisa acrescentou para despertar novas ideias de trabalho nesta área de estudo, visando métodos de cálculos que nos possibilitem serem usados no cotidiano.

A modelagem em objetos é umas das formas em que podemos realizar cálculos que nos permitem fazer aplicações. Com base nisso, esta pesquisa também nos proporcionou a realizarmos uma modelagem em um objeto para que pudéssemos fazer aplicações de cálculos.

Com tudo, podemos afirmar que a pesquisa realizada neste trabalho foi relevante para aperfeiçoar ainda mais o conhecimento em relação a aplicação de cálculos que aparentam ser mais sofisticados.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. & Hein, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

GABETTA JUNIOR, Antônio Marcos. **Aproximação de Funções por Interpolação: Método de Lagrange**, Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2015. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/306857. Acesso em 20 Set. 2020

LOPEZ, Artur Silva. **Polinômio Interpolador de Lagrange: uma proposta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de funções polinomiais e polinômios na educação básica,** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, 2018. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/6493. Acesso em 25 set. 2010.

PUGA, L. Z; TÁRCIA, J. H. M; PAZ, A. P. **Cálculo Numérico** – 1.ed. São Paulo: LCTE Editora, 2009

SANTOS, Aline Gabriele Campos dos. **Uma Aplicação da Interpolação de Lagrange e da Integral Definida para o Cálculo do Volume de um Vaso Circular,** artigo (Licenciatura em matemática) - Universidade do Estado do Amazonas, 2018.

SILVA, Clicio Freire da. **A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para a Modelagem Matemática de Polinômios**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Amazonas, 2016. Disponível em: https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5231. Acesso em: 22 set. 2020.

STEWART, James. **Cálculo, v. 1**; tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

ARENALES, S.; DAREZZO, A**. Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software.** São Paulo: Thomson Learning, 2008.