**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS**
**ESCOLA NORMAL SUPERIOR**
**LICENCIATURA EM MATEMATICA**

**FLORENE NAZARIO CORREA**

# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS RL E RLC

MANAUS, MARÇO
2022

FLORENE NAZARIO CORREA

# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS RL E RLC

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador(a): Dra. Nadime Mustafa Moraes

MANAUS, MARÇO

2022

## TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **Florene Nazario Correa.**

Em 18 de maio de 2022, às 16:40h, na sala José Braga na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dra. Nadime Mustafa Moraes, Dra. Silvia Cristina Belo e Silva e Ma. Geraldine Silveira Lima, a aluna **Florene Nazario Correa** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: **"Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias em Circuitos Elétricos RL e RLC".** A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,6 divulgando o resultado a aluna e demais presentes.

Jorge de Menezes Rodrigues
Presidente da Banca Examinadora

Nadime Mustafa Moraes
Orientador (a)

Silvia Cristina Belo e Silva
Avaliador 1

Geraldine S Lima
Avaliador 2

Florene Nazario Correa
Aluna

## DEDICATÓRIA

Dedico à minha mãe, que é meu maior exemplo de força, humildade e dedicação.

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais Janice Nazario e Luiz Correa por todo sacrifício que fizeram para que eu pudesse seguir nos estudos e por todo apoio mesmo estando distante durante esses anos, sou imensamente grata por me proporcionarem a oportunidade que não tiveram e mesmo assim, desde cedo, me ensinaram o valor e a importância da educação.

Agradeço a minha orientadora, professora Dra. Nadime Mustafa Moraes, por ter me orientado neste trabalho, por seu tempo, paciência e disponibilidade para responder minhas perguntas. Agradeço também à professora Ma. Helisângela Ramos por sua compreensão e ensinamentos para elaboração do trabalho.

## LISTA DE FIGURAS

## RESUMO

Este trabalho de cunho acadêmico apresenta um estudo envolvendo aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) relacionados a área de Circuitos Elétricos especificamente em circuito resistor-indutor (RL) e circuito resistor-indutor-capacitor (RLC). As aplicações abordadas envolvem Equações Diferencias Ordinárias de primeira e segunda ordem, que descrevem o comportamento desses circuitos elétricos. A grande relevância das EDOs é principalmente em relação as suas aplicações isso deve-se ao fato de que a investigação de muitos problemas pode ser reduzida à solução de tais equações. Este estudo tem como suporte teórico o contexto histórico, as definições e métodos escolhidos de EDOs bem como conceitos básicos de circuito. Por fim, apresentamos algumas aplicações em problemas de circuito, solucionando a EDO resultante a partir dos dados conhecidos do problema investigado. Contudo, essas equações diferenciais são uma importante ferramenta matemática, pois permitem descrever processos, modelar e resolver problemas, bem como a compreensão e análise de fenômenos e problemas.



**Palavras-Chave**: EDO. Aplicações. Circuitos Elétricos.

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias têm sido uma parte importante do cálculo e têm desempenhado um papel significativo na Matemática. Desde o seu início, têm contribuído de forma notável para resolver e interpretar fenômenos. São usadas para modelar matematicamente um grande número de fenômenos e problemas, em vista disso, desempenham ampla e fundamentais aplicações principalmente em áreas das ciências exatas com grande contribuição cientifica.

Ao longo da história, houve inúmeras aplicações da Matemática no mundo real. Ela esteve presente nas grandes conquistas que o homem obteve em seu desenvolvimento evolutivo, das imponentes construções egípcias às construções modernas, todas elas, produto da engenhosidade humana, foram de alguma forma ligadas à essa Ciência.

Através do conhecimento das EDOs podemos modelar e interpretar situações reais de diversas áreas. A importância destas reside no fato de que muitas leis da natureza, seja na física, química ou biologia, encontram sua expressão mais natural em termos de equações diferenciais. Suas aplicações se estendem até mesmo em economia.

Nesse sentido, este trabalho de cunho acadêmico apresenta aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias na área de Circuitos Elétricos especificamente em circuito resistor-indutor (RL) e circuito resistor-indutor-capacitor (RLC). Com intuito de nortear a contextualização dessas equações no que tange à sua aplicabilidade, vem fortalecer sua importância. É importante ressaltar que o desenvolvimento e o estudo nesse sentido são relevantes para a compreensão de problemas reais.

Em vista disso, envolveu-se a utilização de conceitos de circuitos e leis de Kirchoff quanto à linguagem matemática para modelar os circuitos elétricos RL e RLC, solucionar a EDO resultante a partir dos dados conhecidos do problema investigado, interpretar as soluções obtidas e expressar graficamente os resultados.

Assim, espera-se que este estudo possa contribuir para compreensão acerca de algumas aplicações descritas por EDO no campo de Circuitos Elétricos, bem como entendimento dos conceitos, propriedades e métodos que as envolvem. Dessa forma, a pesquisa traz um viés de contribuição com desenvolvimento científico de pesquisas na área da Matemática Aplicada para alunos de ciências exatas e pesquisadores que busquem informações sobre o assunto.

O trabalho está dividido em três capítulos. O Capitulo 1 dispõe da revisão de literatura referente aos principais tópicos que compõe o tema, introdução as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), Modelagem Matemática e conceitos básicos de Circuitos Elétricos. O capitulo 2 trata da metodologia da pesquisa, abordagem, estratégias e procedimentos. O capitulo 5 apresenta a análise dos resultados, abordagem das aplicações das EDO nos circuitos elétricos do tipo RL e RLC.

# 1. CAPÍTULO 1 - REVISÃO DE LITERATURA

## 1.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A origem histórica das equações diferenciais é indissociável de suas aplicações. A seguir, será abordado brevemente o histórico e alguns conceitos básicos a respeito dessas equações.

### 1.1.1 Breve histórico

As primeiras tentativas de resolver problemas físicos usando cálculo diferencial no final do século XVII levaram gradualmente a criar um novo ramo da matemática, a saber, as equações diferenciais. Em meados do século XVII, as equações diferenciais tornaram-se um ramo independente e sua resolução um fim em si mesma.

Ademais, conforme Boyce e Diprima (2010), o desenvolvimento de equações diferenciais está intimamente relacionado e inseparável do desenvolvimento geral da Matemática. O início dos estudos das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) deu-se com desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1710) no final do século XVII e depois por vários sucessores. Embora Newton tenha feito relativamente pouca pesquisa no campo das equações diferenciais, seu desenvolvimento do cálculo e o esclarecimento dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVII.

Em síntese, Leibniz iniciou o estudo do problema inverso da diferenciação e encontrou o método para equações diferenciais lineares de primeira ordem. Os irmãos Jacques (1654–1705) e Johann (1667–1748) Bernoulli contribuíram grandemente no desenvolvimento de métodos para resolução de equações diferenciais e aplicações destas. Leonard Euler (1707-1783), um grande matemático, introduziu vários métodos para equações de ordem inferior, criou o conceito de fator integrante, deu um tratamento geral de equações diferenciais lineares ordinárias com coeficientes constantes, entre outros. (BOYCE e DIPRIMA, 2010).

Nos últimos anos, alguns matemáticos dedicados ao estudo de equações diferenciais ordinárias e parciais tentaram desenvolver uma teoria sistemática rigorosa. O objetivo não é criar métodos de solução para equações diferenciais particulares, mas apresentar técnicas mais apropriadas e conhecidas para o tratamento de diferentes tipos de equações.

Grande parte da teoria das equações diferenciais foi desenvolvida ao longo de três séculos, do final do século XVII ao início do século XIX. Naquela época, quase todos os problemas de cálculo surgiam da necessidade de matematizar algum fenômeno físico. Por certo, desde o início da história da matemática moderna, as equações diferenciais aparecem como um dos ramos com um crescimento espetacular.

### 1.1.2 Conceitos básicos

Atualmente, as equações diferenciais têm se tornado uma ferramenta poderosa para a investigação de fenômenos naturais e com grande progresso nas aplicações em várias áreas do conhecimento. Uma equação algébrica, como uma equação quadrática, é resolvida com um valor ou conjunto de valores; uma equação diferencial, ao contrário, é resolvida com uma função ou classe de funções.

- **Equação diferencial**

A Equação Diferencial (ED), segundo Zill (2016), é uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis em relação a uma ou mais variáveis independentes. As equações podem ser classificadas de acordo com o tipo, ordem e linearidade.

Em relação ao tipo, elas são classificadas como ordinárias ou parciais. Se uma equação contém apenas derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com respeito a uma única variável independente, é considerada uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). E equações que envolvem derivadas parciais de uma função desconhecida com duas ou mais variáveis independentes são chamadas de Equações Diferenciais Parciais (EDP). (ZILL, 2016).

A ordem de uma equação diferencial é determinada pela ordem da maior derivada presente na equação. Isto é, uma equação diferencial ordinária de ordem $n$ e é a maior derivada, chamamos de equação diferencial de ordem $n$.

Com relação a linearidade de uma equação diferencial, classifica-se em linear e não linear. Uma equação diferencial é dita linear quando tem a seguinte forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

A variável dependente y e todas as suas derivadas têm apenas expoente igual a 1, isto é, são de primeiro grau; cada coeficiente depende apenas de x, que é a variável independente.

Uma equação diferencial que não satisfaz as condições acima é chamada de equação diferencial não linear.

- **Solução de uma EDO**

Uma função definida em algum intervalo, é uma solução de uma equação diferencial nesse intervalo, se ao substituí-la na equação a reduz a uma identidade.

Se $y = F(x)$ é uma função e f é a derivada de F, isto é, $\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$, de onde: $\frac{dy}{dx} = f(x)$, isso corresponde à representação de uma equação diferencial ordinária. Além disso, se, $d\big(G(x)\big) = d(F(x) + C) = f(x)$ , então $y = G(x) = F(x) + C$ chamamos de solução geral da equação diferencial, cujo gráfico representa uma família de curvas que dependem da constante C.

Em outras palavras, se a função satisfaz a equação diferencial, ao conjunto de todas as soluções da EDO em algum intervalo I é chamado de solução geral da EDO com a constante C, assumindo valores reais quaisquer. Em casos, em que é atribuído um valor definido para C, ou mesmo em que C não apareça a solução é chamada particular.

Geometricamente, a solução geral representa uma família de curvas integrais da equação diferencial. Geralmente são estabelecidas condições para reduzir o número de soluções, em muitos casos, essas condições permitem fixar os valores das constantes e, assim, obter uma solução particular da solução geral.

- **Problema de Valor Inicial (PVI)**

Um Problema de Valor Inicial (PVI) é constituído de uma equação diferencial ordinária que tem uma condição inicial ligado a ela. Resolver um problema de valor inicial consiste em encontrar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial.

- **Campos de Direção**

Métodos gráficos que permitem grafar soluções de equações diferenciais de primeira ordem da forma $y' = f(x,y)$ onde a derivada aparece apenas no membro esquerdo da equação.

### 1.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Abordou-se anteriormente a classificação das equações diferenciais de acordo com a ordem. Se em uma equação diferencial aparece a primeira derivada da variável y, como a derivada de maior ordem, então a equação é dita equação diferencial de primeira ordem. Esta pode ter a forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.1}$$

A seguir, estudaremos alguns tipos de equações diferenciais de primeira ordem para as quais existem métodos de resolução e que aparecerão nas aplicações.

**Equações Diferenciais Ordinárias Lineares**

Um tipo de equação diferencial de primeira ordem que aparece com frequência em aplicações é a equação linear. Uma equação linear de primeira ordem é uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{1.2}$$

onde $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $b(x)$ dependem apenas da variável independente x.

Por exemplo, a equação $x^2 \operatorname{sen} x - (\cos x)y = (\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx}$ é linear, pois pode ser escrita na forma $(\operatorname{sen} x)\frac{dy}{dx} + (\cos x)y = x^2 \operatorname{sen} x$. No entanto, a equação $y\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y^3 = e^x + 1$ não é linear; não pode ser escrita na forma da equação (1.2) devido à presença dos termos $y^3$ e ydy/dx.

Dividindo a equação (1.2) por $a_1(x)$ podemos escrevê-la na forma canônica:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1.3}$$

em que P e Q são funções de x ou constantes. Observação: Se Q(x)=0, a equação é denominada linear **homogênea**. Caso contrário, a equação é dita **não-homogênea**.

Para resolver as equações (1.3), utilizamos o método do fator integrante que consiste primeiramente em colocar o primeiro membro como uma derivada de um produto. Para fazer isso, multiplicamos os dois membros da igualdade da equação (1.2) por uma função $I(x)$, que chamamos de *fator integrante*. Tem-se: $I(x) \cdot \left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) = I(x) \cdot Q(x)$. Assim,

$$I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)P(x)y = I(x)Q(x) \tag{1.4}$$

multiplicando pelo diferencial dx e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$[I(x)P(x)y - I(x)Q(x)]dx + [I(x)]dy = 0$$

Seja $M(x,y) = I(x)P(x)y - I(x)Q(x)$ e $N(x,y) = I(x)$. Para que esta equação seja exata, devemos ter que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$I(x)P(x) = I'(x) \rightarrow \frac{1}{I(x)}dI(x) = P(x)dx.$$

Integrando ambos os lados obtemos o fator integrante

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{1.5}$$

Como acabamos de ver,

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Com a equação diferencial (1.3) se converte em:

$$I(x)\frac{dy}{dx} + \frac{dI(x)}{dx}y = I(x)Q(x)$$

Que, pela regra do produto para derivadas, reescrevemos como:

$$\frac{d[I(x)y]}{dx} = I(x)Q(x).$$

Integrando ambos os lados da equação, teremos $I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$.

Resolvendo para y(x), obtemos

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right] \tag{1.6}$$

onde (1.6) é a solução geral da equação linear (1.2).

Podemos resumir o método para resolver equações lineares da seguinte forma:

- **Método Fator Integrante**

Escreva a equação na forma canônica: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Calcule o fator integrante I(x) por meio da fórmula $I(x) = e^{\int P(x)dx}$

Multiplique a equação na forma canônica por I(x) e, lembrando que o lado esquerdo é precisamente $\frac{d}{dx}[I(x)y]$, obtenha $\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)Q(x)$.

Integre a última equação para obter (1.6)

**Equações Diferenciais Ordinárias Homogêneas**

***Equações Homogêneas***: A equação diferencial da forma que satisfaz $f(tx, ty) = f(x, y)$ para todo número real $t$ é homogênea.

**Noção de função homogênea**

Uma função $f(x, y)$ diz-se homogênea se $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$

***Exemplo* 1:** $f(x, y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau dois porque $f(kx, ky) = (kx)^2 + (ky)^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2 f(x, y)$

***Exemplo* 2:** $f(x, y) = x^2 + y$ não é homogênea porque $f(kx, ky) = (kx)^2 + (ky)$ não sendo possível a partir daqui obter uma relação do tipo $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$

**Equações Diferenciais Homogêneas:** é uma equação que pode ser representada na forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ em que $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau zero.

Pode ser expressa como uma função que depende apenas do quociente y/x, então dizemos que a equação é homogênea

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.7}$$

***Exemplo* 1:** $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2-3y^2}$ é uma equação homogênea porque $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau zero. De fato:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2x^2-3y^2} \Rightarrow f(kx,ky) = \frac{k^2x^2+k^2y^2}{2k^2x^2-3k^2y^2} = \frac{k^2}{k^2}\frac{x^2+y^2}{2x^2-3y^2} = f(x,y)$$

***Exemplo* 2:** $(x-2y+1)dx + (x-y)dy = 0$

pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+1}{y-x} = \frac{1-2(y/x)+(1/x)}{(y/x)-1}$$

O lado direito não pode ser expresso como uma função que depende apenas de y/x, devido ao termo 1/x no numerador. Portanto, a equação não é homogênea.

Para resolver uma equação homogênea, precisamos substituir a função $y/x$ por outra que possibilite separar as variáveis. Sendo assim, fazemos a substituição de $y/x$ por t.

$$y = xt$$

Agora, derivando em relação a x, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$$

Para que a equação se transforme em:

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t) \to x\frac{dt}{dx} = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$$

### 1.1.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

As EDO de segunda ordem são da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (1.8)$$

em que f é alguma função dada.

**Equações lineares de segunda ordem**

Uma EDO de segunda ordem é uma equação da seguinte forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.9)$$

Dividindo ambos os membros por $a_2(x)$, podemos reescrever como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad (1.10)$$

onde p(x), q(x) e f(x) são funções contínuas.

Se f(x)=0, então a equação (1.10) é dita *homogênea*. Caso contrário, (1.10) é dita *não-homogênea*.

**Exemplo:** A equação $3\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} - 5y = 0$ é uma EDO de segunda ordem linear homogênea. A equação $x\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 6y = e^x$ é uma EDO de segunda ordem linear não-homogênea.

A forma de uma EDO linear homogênea de segunda ordem é:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

Por outro lado, se p e q são funções constantes então, a equação (1.10) é homogênea de coeficientes constantes ou não-homogênea de coeficientes constantes conforme a função f seja ou não igual a zero.

**EDO linear de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes**

A forma deste tipo de equação é

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \qquad (1.11)$$

em que p e q são constantes reais. Para obter a solução de (1.11), consideremos a equação algébrica:

$$r^2 + pr + q = 0$$

conhecida como *equação característica* da ED. Conhecendo as raízes desta equação podemos encontrar a solução geral. Dependendo se delta for positivo, nulo ou negativo, encontraremos três casos diferentes:

- Caso 1 - a equação característica tem duas raízes reais e distintas $r_1 \; e \; r_2$, a solução geral será: $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$.
- Caso 2 - a equação característica tem duas raízes reais iguais $r_1 = r_2 = r$, a solução geral será: $y(x) = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx} \Rightarrow y(x) = e^{rx}(C_1 + C_2x)$.
- Caso 3 - a equação característica tem raízes complexas conjugadas $r_1 = a + bi \; e \; r_2 = a - bi$, a solução geral será: $y(x) = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx \Rightarrow y(x) = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$.

**EDO linear de segunda ordem não-homogênea de coeficientes constantes**

Uma EDO linear de segunda ordem não homogênea de coeficientes constantes é da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x) \qquad (1.12)$$

onde p e q são constantes.

Para obter a solução geral deste tipo de equação, primeiro se determina a solução geral da EDO linear homogênea $y_h$, logo em seguida se busca uma solução particular qualquer da EDO não-homogênea $y_p$. A solução geral da EDO linear não-homogênea é igual à soma da solução geral da EDO linear homogênea com a solução particular da EDO não-homogênea, ou seja: $y = y_h + y_p$. Esta solução particular pode ser calculada a partir do Método dos

Coeficientes a Determinar ou Método Variação dos Parâmetros. Neste trabalho, veremos somente o primeiro método.

**Método dos Coeficientes a Determinar**

Este método aplica-se apenas quando os coeficientes são constantes; seu uso permite construir uma solução particular da equação (1.12) para três formas de f(x): polinomial, exponencial, função trigonométrica.

Para calcular uma solução particular por esse método, têm-se três casos a considerar:

- Caso 1 – Se f(x) é um polinômio de grau m expresso na forma $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ então uma solução particular também deve ter uma forma polinomial da forma $y_p(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$.
- Caso 2 – Se f(x) é uma função exponencial expressa na forma $f(x) = ae^{mx}$ então uma solução particular também deve ter forma exponencial, ou seja, da forma $y_p(x) = Ae^{mx}$.
- Caos 3 – Se f(x) for expresso como a soma de seno e cosseno da forma $f(x) = asen(x) + bcos(x)$ então uma solução particular seria da forma $y_p(x) = Asen(x) + Bcos(x)$.

## 1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A grande motivação do desenvolvimento da Matemática ao longo da história surgiu da preocupação em resolver problemas práticos de determinada época, o ser humano sempre buscou entender e explicar o mundo e seus fenômenos. Dessa forma, a busca por modelos que explicassem ou pelo menos descrevessem esses fenômenos se manifesta desde os tempos mais remotos. Assim, pode-se dizer que a Matemática foi e continua sendo desenvolvida a partir da necessidade de uma sociedade de resolver seus problemas.

Durante séculos, a matemática foi utilizada como ferramenta para resolver problemas e como teoria que auxilia compreender melhor a realidade em que operamos. Nesse contexto, a modelagem matemática tem servido como ferramenta que auxilia na compreensão dos fenômenos, naturais ou não.

A Modelagem Matemática, de acordo com Bassanezi (2011, p. 16), “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática é um processo em que situações e relações da vida real são expressas por meio da Matemática, no qual problemas da vida real são traduzidos para a linguagem matemática, resolvidos e as soluções testadas dentro do sistema real. Esse processo é fundamental na solução de problemas práticos, pois é o meio pelo qual se manifesta a aplicação de processos matemáticos à solução de problemas reais.

Na concepção de Biembengut e Hein (2014, p.13), a modelagem matemática “é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias”. Assim sendo, a modelagem não se resume apenas na obtenção de uma determinada solução, mas também pode ser usada para exemplificar as aplicações da Matemática à outras ciências, assim como para introduzir novos conhecimentos e para exercitar-se o que já possui.

### 1.2.1 Modelo Matemático

A Modelagem Matemática é um procedimento que compreende um modelo matemático. Um modelo matemático de um fenômeno ou situação problema é um conjunto de símbolos matemáticos e relações que representam, de alguma forma, o fenômeno em questão. O modelo permite não somente obter uma determinada solução, mas também servir de suporte para outras aplicações ou teorias. Na prática, esse conjunto de símbolos e relações pode ser vinculado a qualquer ramo da Matemática, em particular, às ferramentas fundamentais de aplicações matemáticas. (BASSANEZI, 2011).

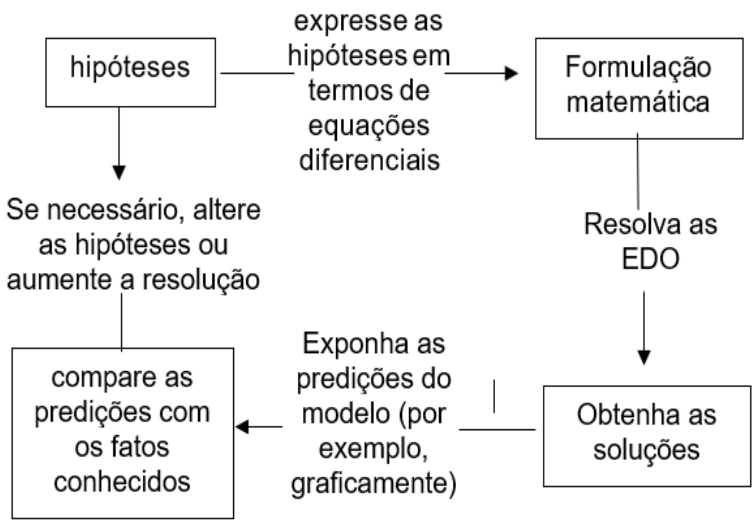
De um modo geral, um modelo é uma representação de um sistema, objeto ou fenômeno. O sistema solar, a economia de um país, a população de peixes em um lago, um satélite girando em sua órbita, um projétil lançado de uma plataforma, são exemplos muito comuns.

É conveniente notar que do ponto de vista estritamente matemático existem muitos modelos, que também descrevem uma ampla gama de situações reais. Ocorre que os problemas do mundo real às vezes costumam ser complexos e, quando modelados matematicamente, levam a essas equações diferenciais, que são a linguagem natural dos processos de mudança. Como se sabe, a mudança de uma variável em relação a outra é chamada de derivada, portanto, equações diferenciais são utilizadas para representar situações ou problemas

A Modelagem Matemática tem sua gênese justamente no estabelecimento de uma relação dicotômica entre a Matemática e o estudo de suas aplicações. As equações diferenciais têm muitas aplicações principalmente nas engenharias, por exemplo, dentro da engenharia elétrica temos os Circuitos Elétricos.

Em vista disso, este estudo se concentrará justamente na aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias para solucionar problemas modelados matematicamente nesta área em questão. No âmbito das EDO, a modelagem de problemas perpassa por algumas etapas do processo como mostra a Figura 1.

Figura 1 - Processo de Modelagem em EDO




Fonte: ZILL, CULLEN (2009, p.34)

## 1.3 CIRCUITOS ELÉTRICOS

Neste tópico, será abordado alguns conceitos básicos sobre circuitos elétricos, assim sendo, as definições e as explicações serão o mais simples possível de modo a propiciar a compreensão necessária das aplicações.

### 1.3.1 Conceitos Básicos

Para Alexander e Sadiku (2013), um circuito elétrico é um conjunto de elementos elétricos conectados entre si, que compõe interruptores, resistores, indutores, capacitores, entre outros componentes. E esses elementos determinam a classificação do circuito.

Qualquer circuito que possa ser reduzido a um circuito equivalente formado por um resistor e um único elemento de armazenamento de energia (indutor ou capacitor), por exemplo, o circuito RL, é conhecido como circuito de primeira ordem, pois seu comportamento é descrito por uma equação diferencial de primeira ordem.

Já circuitos contendo dois elementos de armazenamento, são conhecidos como circuitos de segunda ordem, porque suas respostas são descritas por equações diferenciais de segunda ordem (ALEXANDER e SADIKU, 2013). Percebe-se que as equações diferenciais estão evidentemente entrelaçadas nos saberes de circuitos elétricos.

A carga elétrica, assim como a massa, são propriedades intrínsecas da matéria, sendo esta, a grandeza mais elementar no estudo de circuito elétrico. Um circuito elétrico é um caminho fechado através do qual uma corrente elétrica flui. Em sua essência, é um caminho que facilita a transferência de carga de um ponto para outro.

A taxa de variação da carga por unidade de tempo é denominada corrente elétrica. (IRWIN e NELMS, 2013). Pode ser expressa matematicamente da seguinte forma

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1.13}$$

Em que, i representa a corrente e q representa a carga. A unidade de medida de corrente é o ampère ($A$); um ampère corresponde a 1 coulomb por segundo.

A diferença de potencial ou também chamada de tensão elétrica, é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos. Isto é, a tensão $v$ entre dois pontos a e b em um circuito elétrico é a energia necessária para deslocar uma carga unitária de um ponto a para um ponto b; matematicamente,

$$v = \frac{dw}{dq} \tag{1.14}$$

onde v é a tensão medida em volts (V), w é a energia em joules (J) e q é a carga em coulombs (C).

Assim como a mecânica tem como base fundamental as leis de Newton, a eletricidade também possui leis que descreve o comportamento dos circuitos elétricos, conhecidas como as leis de Kirchhoff que foram estabelecidos pelo físico Gustav Robert Kirchhoff em 1859. Leis de Kirchhoff (Halliday, Resnick e Walker,2016, p. 377,389):

**Lei das correntes:** a soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

**Lei das tensões:** a soma algébrica das variações de potencial encontradas ao longo de uma malha completa de um circuito é zero. Outra maneira de afirmar isso é dizer que a tensão fornecida é igual à soma das quedas de tensão.

A lei de Ohm, em homenagem ao físico Georg Simon Ohm, é a relação algébrica entre tensão e corrente para um resistor (NILSSON e RIEDEL, 2015). A intensidade da corrente elétrica que flui através de um condutor é diretamente proporcional a diferencia de potencial aplicada e inversamente proporcional à sua resistência.

Antes de modelarmos os circuitos, precisamos descrever os elementos básicos que os formam. São eles: resistor, indutor e capacitor.

- Resistor: Um resistor de resistência R é um componente do circuito que se opõe à corrente e dissipa energia na forma de calor. Produz uma queda de tensão dada pela Lei de Ohm.

$$E_R = Ri \tag{1.15}$$

onde R é a constante de proporcionalidade chamada resistência.

- Indutor: é um componente elétrico que produz indução, induz um campo magnético quando uma corrente passa por ele. Um indutor de indutância L se opõe à qualquer mudança na corrente produzindo uma queda de tensão de:

$$E_L = L\frac{di}{dt} \tag{1.16}$$

Onde L é a constante de proporcionalidade chamada *indutância*

- Capacitor: é um componente elétrico que tem a capacidade de armazenar energia elétrica através de um campo elétrico. A queda de tensão em um capacitor é proporcional à carga elétrica instantânea no capacitor.

$$E_C = \frac{1}{C}q \tag{1.17}$$

onde C é uma constante chamada capacitância.

O circuito elétrico mais simples é um circuito em série no qual temos uma fem (força eletromotriz), que atua como fonte de energia, como uma bateria ou gerador, e um resistor, que utiliza energia, como uma lâmpada.

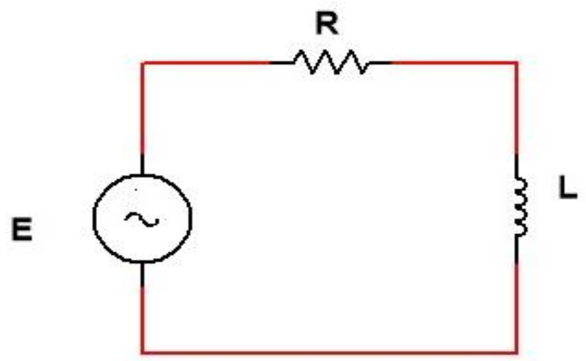
A seguir, será apresentado os circuitos elétricos em série RL e RLC a partir da aplicação das leis de Kirchhoff para obter as Equações Diferenciais Ordinárias que modelam esses circuitos. Os circuitos RL são compostos por resistores e indutores e os circuitos RLC são compostos por resistores, indutores e capacitores.

### 1.3.2 Circuito Elétrico RL

Um circuito RL (também conhecido como circuito resistor-indutor) pode ser definido como um circuito elétrico que pode ser construído com elementos de circuito passivo de um resistor e um indutor conectados entre si, através de uma fonte de corrente ou tensão.

Então, consideremos um circuito em série contendo apenas uma fonte de tensão E (medida em volts), um resistor R (medido em ohms) e um indutor L (medido em henrys). A corrente circulante terá uma variável associada i(t) (medida em amperes). Esse circuito é mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Circuito Elétrico RL




Fonte: Da Autora (2022)

A lei das correntes de Kirchhoff implica que a mesma corrente passa por cada elemento do circuito da Figura 2. Aplicando a lei das tensões de Kirchhof a este circuito, a qual estabelece para um circuito RL que a soma das quedas de tensão no resistor R e no indutor L devem ser iguais à tensão fornecida E. Então, fornece:

$$E_L + E_R = E(t) \tag{1.18}$$

Substituindo em (1.18) as expressões $E_L$ (1.16) e $E_R$ (1.15), obtemos a equação que modela o circuito elétrico RL:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \tag{1.19}$$

Observe que esta equação é uma EDO linear de primeira ordem (ver tópico 1.1.4), cuja solução determina a intensidade da corrente i(t) no circuito. Primeiramente, escrevemos esta equação na forma canônica (1.3) para obtermos o fator de integração. Assim, dividindo a equação (1.19) por L, temos que

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E(t)}{L} \tag{1.20}$$

que agora está na forma canônica. Utilizando (1.5), obtemos o fator de integração para o circuito RL

$$I(t) = e^{\int (R/L)dt} = e^{(R/L)t} \tag{1.21}$$

que leva à solução geral [ver equação (1.6), tópico (1.1.3)]

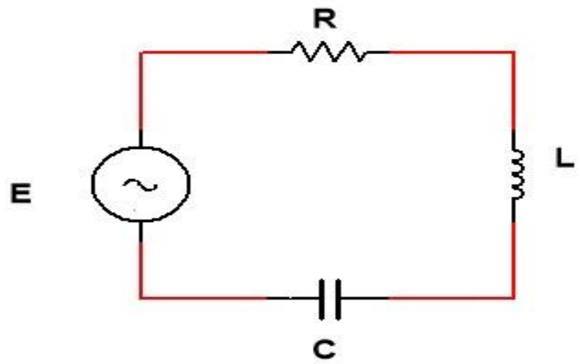
$$i(t) = e^{-(R/L)t}\left[\int e^{(R/L)t}\frac{E(t)}{L}dt + C\right] \tag{1.22}$$

Note que as equações (1.19) e (1.20) que modelam o Circuito RL são Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Com a equação (1.22) podemos determinar a corrente desse tipo de circuito.

### 1.3.3 Circuito Elétrico RLC

Consideremos agora um circuito composto por um resistor R, um indutor L e um capacitor C conectados em série com uma fonte de tensão E. Esse circuito é chamado de circuito RLC (Figura 3).

Figura 3 - Circuito Elétrico RLC




Fonte: Da Autora (2022)

De acordo com a lei das tensões de Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E \tag{1.23}$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$ (ver 1.13), derivando, temos: $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Assim, substituindo a última igualdade, obtemos a seguinte equação diferencial para a carga:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) \tag{1.24}$$

Note também que se derivamos inicialmente em relação a t a equação (1.23), obtemos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{dE}{dt} \tag{1.25}$$

Substituindo a expressão $\frac{dq}{dt} = i$ em (1.25), obtém-se a EDO que modela a corrente:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt} \tag{1.26}$$

Note que essas equações que modelam o circuito RLC são Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem. Em qualquer uma dessas duas equações diferenciais, podemos analisar o que acontece com a corrente e com a carga em um circuito RLC. Sugere-se, no entanto, primeiro determinar a carga no capacitor usando a equação (1.24) e então derivar em relação ao tempo para obter a corrente no circuito.

# 2. CAPITULO 2 – METODOLOGIA DA PESQUISA

## 2.1 Abordagem, as estratégias de Investigação e os procedimentos técnicos

Esta pesquisa tem uma abordagem quantitativa, no que concerne ao interesse pela busca de resultados quantificáveis. Conforme Gressler (2004):

> A abordagem quantitativa caracteriza-se pela formulação de hipóteses, definições operacionais das variáveis, quantificação das modalidades de coleta de dados e informações, utilização de tratamentos estatísticos (GRESSLER, 2004, p. 42).

Acerca das estratégias de investigação, tendo em vista que o se dispõe nos objetivos, aplicar conceitos de circuitos elétricos e leis físicas para estabelecer as Equações Diferenciais Ordinárias e analisá-las, nesse sentido, será explicativa, que é usada para ajudar a entender o problema de forma mais eficiente.

No que se refere a procedimentos técnicos será utilizado a pesquisa bibliográfica, que segundo Gil (2008, p. 50), “é desenvolvida a partir de material já elaborado constituído principalmente de livros e artigos científicos”, em virtude de aporte teórico no tocante a Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Circuitos Elétricos, cujo trabalho revisional, será realizado por meio de consultas a livros, artigos e monografias.

Contudo, o cerne da pesquisa limita-se aos princípios básicos relacionados aos conceitos, propriedades e métodos que envolvem os tipos das EDO no que tange a resolução de problemas de circuitos elétricos investigado neste estudo, a fim de propiciar um trabalho científico de cunho teórico voltado para o meio acadêmico.

## 2.2 Métodos utilizados para obtenção de equações

Alguns conceitos e propriedades das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) indicam a relevância dessa temática no âmbito dos Circuitos Elétricos para dedução do modelo matemático no intuito da tentativa de descrever ou simular o fenômeno, isto é, observar a realidade do comportamento dessas equações nesta área. Preliminarmente, é imprescindível entender a dinâmica de funcionamento do circuito para se chegar na EDO que formaliza o problema.

A metodologia adotada para a realização da pesquisa incluiu as etapas como identificar as variáveis e constantes do problema; aplicar conceitos físicos e de circuitos elétricos quanto à linguagem matemática para estabelecer as EDO a partir dos dados levantados do problema investigado; descrever a EDO correspondente; estabelecer condições do problema; resolver a EDO aplicando os métodos para obter a solução geral; aplicar as condições para determinar a solução particular; expressar a solução particular e interpretar graficamente os resultados dos problemas

As equações formuladas no capítulo anterior irão ser utilizadas nas aplicações e serão resolvidas sujeitas às condições obtidas do problema para determinar a incógnita ou incógnitas envolvidas. O processo de obtenção de soluções muitas vezes leva a questões de natureza puramente matemática que incentivam e promovem o avanço da referida matemática. Usando as soluções conhecidas, o matemático ou físico pode interpretar o que está acontecendo do ponto de vista aplicado.

# 3. CAPÍTULO 3 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

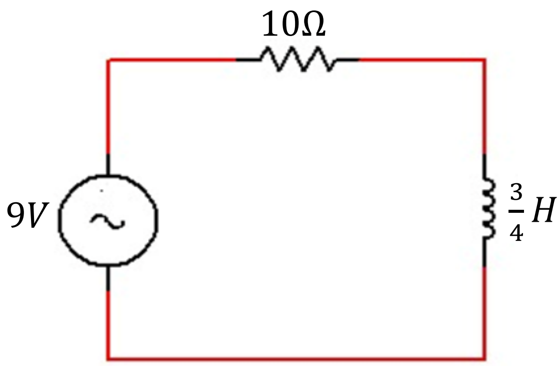
As Equações Diferenciais Ordinárias são uma ótima ferramenta matemática para descrever situações ou fenômenos reais, mas para que elas sejam realmente úteis precisamos saber como resolvê-las. No capítulo 1, foram estudados conceitos teóricos relacionados à EDO de primeira e segunda ordem assim como a modelagem dos circuitos RL e RLC.

Como o objetivo fundamental é aplicar esse estudo na resolução de problemas desses circuitos, neste capitulo, abordaremos dois problemas de cada circuito utilizando as equações vistas nos tópicos (1.3.2) e (1.3.3) que modelam esses circuitos elétricos e mostrando suas respectivas soluções.

### 3.1 Aplicações Circuito RL

**Exemplo 1:** Um circuito RL (Figura 3) tem um resistor de 10 ohms e um indutor cuja indutância é $3/4$ Henry. Uma bateria alimenta o circuito com uma tensão de 9 volts. Encontre uma expressão matemática que determine a intensidade da corrente i em qualquer instante t, se a intensidade da corrente no início for zero.

Figura 4 - Circuito RL em série




Fonte: Da Autora (2022)

**Solução**. Se a indutância L é ¾ H, a resistência R é10Ω e a fonte de tensão E é 9V, então aplicando estes dados na equação (1.19), obtemos a EDO:

$$\frac{3}{4}\frac{di}{dt} + 10i = 9$$

Reorganizando os termos, isto é, escrevendo a equação na forma canônica (1.20):

$$\frac{di}{dt} + \frac{40}{3}i = 12$$

onde i é a intensidade da corrente no circuito RL e t é o tempo. A expressão acima é uma equação diferencial linear de primeira ordem sujeita à condição de que i(0)=0.

Substituindo os dados deste problema na equação (1.22) que leva a solução geral de um circuito RL, temos:

$$i(t) = e^{-\frac{40}{3}t}\left[\int 12e^{\frac{40}{3}t}dt + C\right]$$

Resolvendo a integral,

$$i(t) = e^{-\frac{40}{3}t}\left[\frac{9}{10}e^{\frac{40}{3}t} + C\right]$$

$$i(t) = \frac{9}{10} + Ce^{-\frac{40}{3}t}$$

esta solução geral representa o modelo geral para o caso dado; agora vamos determinar a constante C, que é obtida aplicando a condição $i(0) = 0$.

Assim, aplicando esta condição à equação, obtemos: $i(0) = 0 = \frac{9}{10} + Ce^{-\frac{40}{3}t}$. De onde, temos que que $C\ = -\ \frac{9}{10}$. Logo, o modelo é determinado pela equação:

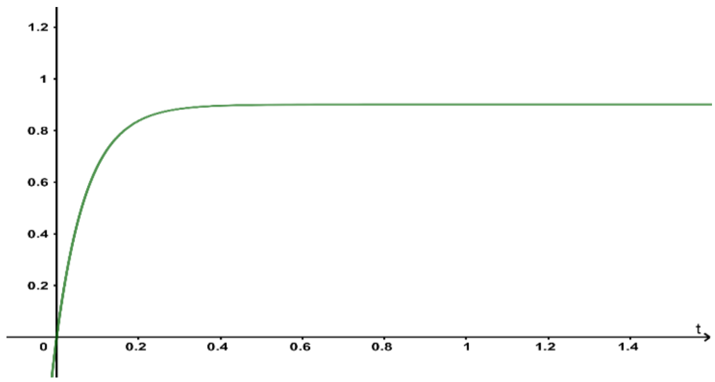
$$i(t) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}e^{-\frac{40}{3}t}$$

que representa o modelo matemático para a variação da intensidade da corrente do circuito em qualquer instante t. Como dados adicionais, vamos analisar qual será a intensidade da corrente i(t) depois de muito tempo. A resposta a este questionamento é fornecida pelo seguinte limite

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{40}{3}t} = \frac{9}{10}$$

A quantidade $\frac{9}{10}$ é conhecida como a parte estável e o termo $-\frac{9}{10}e^{-\frac{40}{3}t}$ é conhecido como a parte transitória da corrente; esta tende a zero quando t tende ao infinito. A Figura 5 mostra o gráfico correspondente ao modelo matemático que mede a intensidade da corrente i(t) desse circuito.

Figura 5 - Gráfico da corrente




Fonte: Da Autora (2022)

Como pode ser visto no gráfico, os valores da corrente tendem ao valor de 9/10 à medida que t aumenta; praticamente após um segundo, o valor da corrente se estabelece nessa quantidade.

**Exemplo 2:** Um resistor de 40 ohms e um indutor de 0,1 henry são conectados em série com uma fonte de tensão de 110 volts. Se originalmente não existe corrente no circuito, determine a corrente ao longo do tempo.

**Solução:** Neste caso, R=40Ω, L = 0,1H e E=110 V. Aplicando estes valores na equação (1.19), que é a EDO que modela um circuito RL. Obtemos, a equação diferencial para este circuito em questão é:

$$0{,}1\frac{di}{dt} + 40i = 110$$

Escrevendo na forma canônica,

$$\frac{di}{dt} + 400i = 1100$$

Esta equação é uma EDO linear de primeiro grau de coeficientes constantes que pode ser resolvida pelo método do fator integrante (ver tópico 1.3.2). Assim, calculando primeiramente o fator integrante por meio da fórmula $I(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Temos, $I(t) = e^{\int 400dt} = e^{400t}$

Multiplicando ambos os lados da equação por $I(t)$, obtemos

$$e^{400t} \cdot \frac{di}{dt} + e^{400t} \cdot 400i = 1100 \cdot e^{400t}$$

$$\frac{di}{dt}(ie^{400t}) = 1100e^{400t}$$

Integrando ambos os lados em relação a t,

$$ie^{400t} = \int 1100e^{400t}dt$$

Assim,

$$ie^{400t} = 1100\frac{e^{400t}}{400} + C$$

Logo, a solução geral é

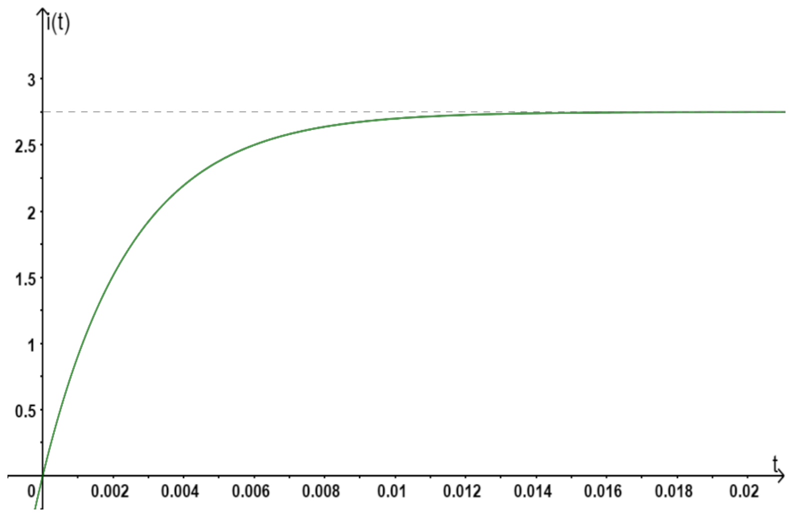
$$i(t) = \frac{11}{4} + Ce^{-400t}$$

Considerando que no instante t=0 s a corrente é zero amperes, obtemos $0 = i(0) = \frac{11}{4} + C$, então $C = -\frac{11}{4}$. Portanto,

$$i(t) = \frac{11}{4}(1 - e^{-400t})\ A$$

Percebe-se que à medida que o tempo aumenta, a corrente se aproxima do seu valor limite i = 11/4=2.75. Na Figura 6, temos a função i(t) representada graficamente.

Figura 6 - Gráfico da corrente elétrica




Fonte: Da Autora (2022)

Observe que em apenas 0.015s é obtida uma corrente de 2.74318 A, muito próxima do valor limite esperado para o circuito.

### 3.2 Aplicações Circuito RLC

**Exemplo 1.** Uma fonte de tensão de 1,5 V, um resistor de 20 $\Omega$, um capacitor de $10^{-3}F$ e um indutor de 0,1 H são conectados em série. Determine a carga no capacitor e a corrente que circula pelo circuito em todo tempo, se inicialmente o capacitor estiver totalmente descarregado e não flui corrente sobre o circuito.

**Solução.** Temos como dados que $L = 0{,}1\,H$, $R = 20\Omega$, $C = 10^{-3}\,F$ e $E(t) = 1{,}5\,V$. Vamos substituir esses valores na equação (1.24) que é a EDO que modela o circuito RLC.

A equação diferencial associada ao circuito RLC em série neste exemplo é

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t) \rightarrow 0{,}1\frac{di}{dt} + 20i + 10^3q = 1{,}5$$

Reescrevendo,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\frac{dq}{dt} + 10^4q = 15$$

Obtemos então uma EDO de segunda ordem linear não-homogênea de coeficientes constantes. Como vimos no tópico (1.1.4) do capitulo 1, para resolvê-la utilizaremos o método dos coeficientes a determinar. Primeiramente determinaremos a solução geral da equação homogênea associada e posteriormente a solução particular dessa EDO não-homogênea.

Neste caso, temos que a equação homogênea associada é

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 200\frac{dq}{dt} + 10^4q = 0$$

Com as condições iniciais $q(0) = 0\,C\ e\ i(0) = 0\,A$. A equação característica é

$$r^2 + 200r + 10^4 = 0$$

Cujas raízes são $r_{1,2} = -100$. Como as raízes são iguais, a solução geral da equação homogênea é da forma

$$q_h(t) = C_1e^{-100t} + C_2te^{-100t}.$$

Por outro lado, uma solução particular é $q_P(t) = \frac{15}{10000} = 0{,}0015$. Assim, a carga é dada por:

$$q(t) = q_P(t) + q_h(t) \rightarrow\ q(t) = 0{,}0015 + C_1e^{-100t} + C_2te^{-100t}.$$

Agora, derivando a carga em relação ao tempo obtemos a corrente no circuito. Assim, a corrente é dada por:

$$i(t) = -100C_1e^{-100t} + C_2e^{-100t} - 100C_2te^{-100t}.$$

Usando as condições iniciais $q(0) = 0 \; e \; i(0) = 0$, obtemos o sistema de equações:

$$0{,}0015 + C_1 = 0;$$

$$-100C_1 + C_2 = 0.$$

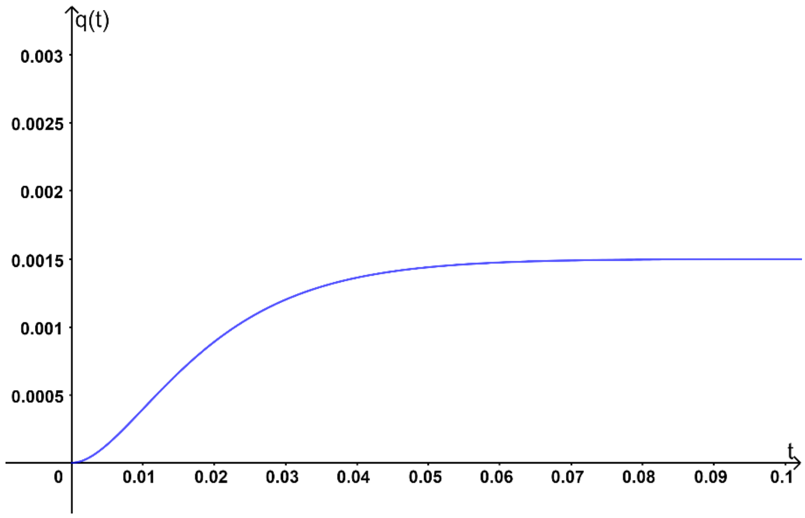
De onde, temos que $C_1 = -0{,}0015 \; e \; C_2 = -0{,}15$. Então, substituindo os valores encontrados, temos que a carga é

$$q(t) = 0{,}0015 - 0{,}0015e^{-100t} - 0{,}15te^{-100t}$$

$$= 0{,}0015(1 - e^{-100t} - 100te^{-100t})C$$

Na Figura 7, podemos ver como essa função da carga é representada graficamente.

Figura 7 - Gráfico da carga




Fonte: Da Autora (2022)

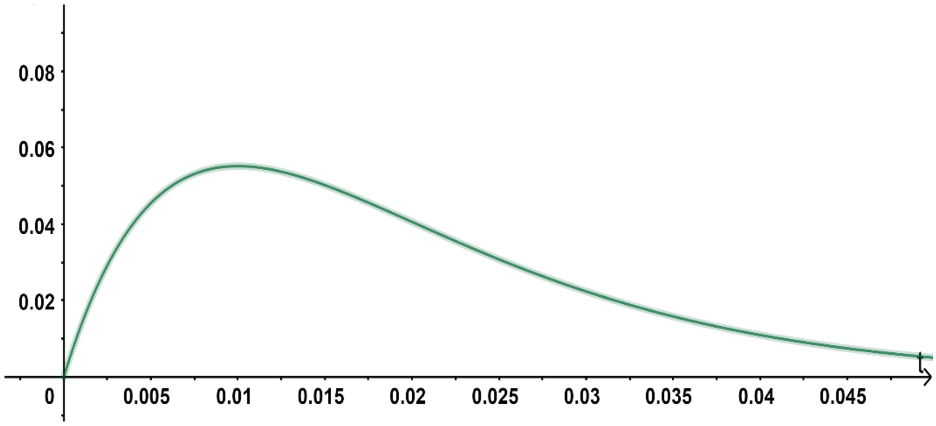
Observe que à medida que t aumenta, a carga tende a 0,0015.

E quanto a corrente elétrica, temos que

$$i(t) = 15te^{-100t}A.$$

Na Figura 8, vemos que essa função da corrente elétrica tem a seguinte representação gráfica.

Figura 8 - Gráfico da corrente elétrica




Fonte: Da Autora (2022)

Note que a corrente tem um máximo quando $i'(t) = 0$.

$$i'(t) = 15e^{-100t} - 1500te^{-100t} = 0 \ \rightarrow t = 0{,}01\ s.$$

Para $0 \leq t \leq 0{,}01$, a corrente aumenta; para $t \geq 0{,}01$ a corrente diminui. Por outro lado, a carga está sempre aumentando, pois $t = 0$ é o único momento em que $i(t) = q'(t) = 0$.

**Exemplo 2.** Um circuito em série consiste em um indutor de 0,25 H, um resistor de 40Ω, um capacitor de $4\times10^{-4}$ F e uma força eletromotriz dada por E(t)= 5 sen 100t V. Se a corrente inicial e a carga inicial no capacitor são ambos zeros, vamos determinar a carga no capacitor e a corrente elétrica do circuito para qualquer tempo t > 0.

**Solução.** Substituindo os valores $L = 0{,}25\ H$, $R = \ 40\Omega$, $C = 4 \times 10^{-4}\ F$ e $E(t) = 5\,\mathrm{sen}\,100t\ \ V$ na equação diferencial (1.24) que vimos no tópico (1.3.3), teremos

$$0{,}25\frac{d^2q}{dt^2} + 40\frac{dq}{dt} + \frac{q}{4 \times 10^{-4}} = 5\,\mathrm{sen}\,100t$$

ou melhor, multiplicando ambos os membros por 4, podemos reescrever como

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 160\frac{dq}{dt} + 10000q = 20\,\mathrm{sen}\,100t$$

Note que se trata de uma EDO linear de segunda ordem não-homogênea de coeficientes, como vimos no tópico (1.1.4).

A equação característica da equação homogênea associada é $r^2 + 160r + 10000 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -80 + 60i$ e $r_2 = -80 - 60i$. Como tem raízes complexas conjugadas, a solução geral será da forma $y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$. Logo

$$q_h(t) = e^{-80t}(C_1 \cos 60t + C_2 \operatorname{sen} 60t).$$

Usando o método dos coeficientes a determinar (ver tópico 1.1.4), descobrimos que uma solução particular é

$$q_p(t) = -\frac{1}{800}\cos 100t.$$

Consequentemente, a solução geral dessa EDO é

$$q(t) = e^{-80t}(C_1 \cos 60t + C_2 \operatorname{sen} 60t) - \frac{1}{800}\cos 100t.$$

Das condições iniciais $q(0) = 0$ e $q'(0) = 0$ segue que

$$C_1 - \frac{1}{800} = 0$$

$$-80C_1 + 60C_2 = 0$$

A partir dessas equações encontramos que

$$C_1 = \frac{1}{800} \quad e \quad C_2 = \frac{1}{600}$$

Portanto, a carga do capacitor é

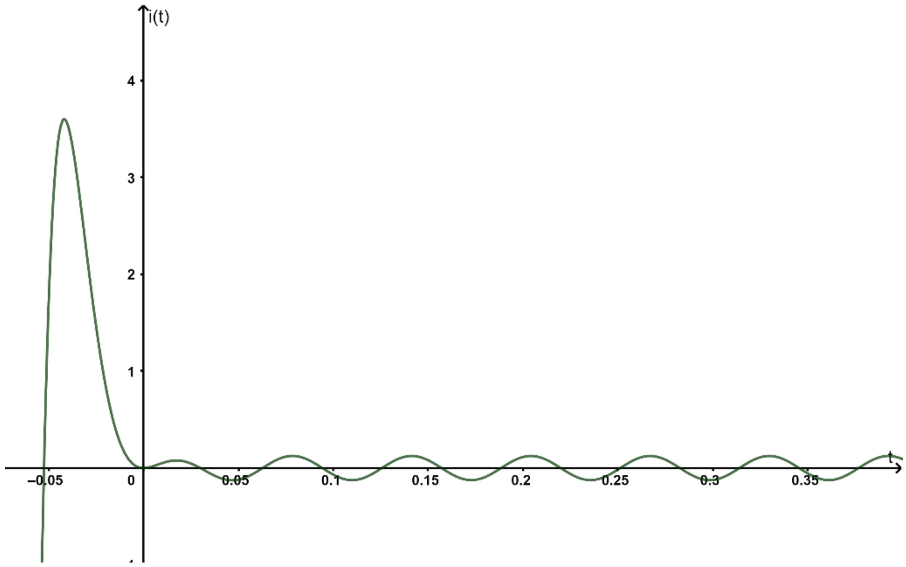
$$q(t) = e^{-80t}\left(\frac{1}{800}\cos 60t + \frac{1}{600}\operatorname{sen} 60t\right) - \frac{1}{800}\cos 100t,$$

E a corrente elétrica é dada por

$$i(t) = -\frac{5}{24}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 100t.$$

Essa corrente pode ser expressa graficamente como podemos ver na Figura 9.

Figura 9 - Gráfico da corrente elétrica




Fonte: Da Autora (2022)

Observa-se que a corrente elétrica deste circuito conforme o tempo aumenta tende a zero de forma oscilatória.

Diante do exposto, compreendemos que as equações diferenciais representam uma simplificação idealizada do problema físico com o qual estamos lidando, sendo essa idealização chamada de Modelo Matemático. Cada modelo é uma aproximação da realidade do problema físico, sua aproximação e uso depende apenas dos critérios impostos a cada problema para sua resolução. Com isso, apresentamos um estudo em que a partir das Equações Diferenciais Ordinárias que modelam os circuitos elétricos RL e RLC resolvemos problemas relacionados a estes circuitos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentou-se um breve estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem e seus respectivos uso na modelagem e aplicações de circuitos elétricos RL e RLC. Abordando contexto histórico, definições a respeito das EDO e método de resolução, como o método do fator integrante e dos coeficientes a determinar. Além disso, conceitos básicos de circuitos elétricos e leis de Kirchoff aplicando esses conceitos para modelar os circuitos em questão, visando contribuir para um melhor entendimento dos mesmos.

Por esse motivo que as equações diferenciais não consistem apenas em um conjunto de artifícios que permitem fazer alguns cálculos, mas, ao contrário, é uma ferramenta que permite a descrição de certos eventos reais e do cotidiano. Assim, propiciou-se um estudo e pesquisa para compreensão contextualizada sobre essas equações destinando sua aplicação para resolução de problemas de circuitos possibilitando obter a corrente e carga elétrica, também analisar graficamente o comportamento de cada solução. Permitiu compreender o comportamento de circuitos elétricos do tipo RL e RLC.

A relevância das EDOs é principalmente em relação as suas aplicações, isso deve-se ao fato de que a investigação de muitos problemas em ciência e tecnologia pode ser reduzida à solução de tais equações. Dessa forma, é notável sua importância, pois permitem descrever processos, modelar e resolver problemas, bem como a compreensão e análise de fenômenos e uma grande variedade de aplicações a diversas áreas do conhecimento.

Contudo, a partir do trabalho realizado pode-se desenvolver um estudo semelhante baseado nas aplicações das EDOs na mesma área, porém abordando outros tipos de circuitos elétricos como RC e LC. Também, oferecer novas perspectivas como a realização de um estudo em outra área, por exemplo, na economia.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 3 ed. São Paulo, Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** 5 ed. São Paulo, Contexto, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Tradução e revisão técnica de Valéria de Magalhães Iorio. 9 ed. Rio Janeiro: LTC, 2010.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRESSLER, A. L. **Introdução à Pesquisa: projetos e relatórios.** Revista Atual. 2 ed. 245f. São Paulo: Loyola. 2004.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**, vol. 3: Eletromagnetismo. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NILSSON, J.W.; RIEDEL, S.A. **Circuitos Elétricos**. Tradução Sonia Midori Yamamoto. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Matemática Avançada para Engenharia: Equações diferenciais elementares e transformada de Laplace.** 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.