

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

KEVEN WILLIAM MARQUES DE OLIVEIRA

**ONDAS MECÂNICAS UNIDIMENSIONAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA
APLICADAS À MÚSICA**

MANAUS, JULHO

2021

KEVEN WILLIAM MARQUES DE OLIVEIRA

**ONDAS MECÂNICAS UNIDIMENSIONAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA
APLICADAS À MÚSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso, elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II, da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas, como um dos requisitos necessários para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles

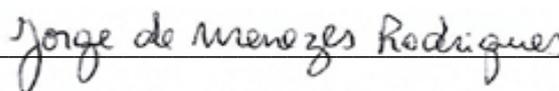
MANAUS, JULHO

2021

TERMO DE APROVAÇÃO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **KEVEN WILLIAM MARQUES DE OLIVEIRA**.

Aos 22 dias do mês de julho de 2021, às 18 horas e 45 minutos, em sessão pública, via *Google Meet*, link <https://meet.google.com/psu-sxjq-obc>, na presença da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. Alessandro Augusto dos Santos Michiles (orientador), Dra. Josefina Diosdada Barrera Kalhil (avaliadora 1) e Dr. Almir Cunha da Graça Neto (avaliador 2), o aluno **KEVEN WILLIAM MARQUES DE OLIVEIRA** apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado **ONDAS MECÂNICAS UNIDIMENSIONAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS À MÚSICA**, como requisito curricular do Curso de Licenciatura em Matemática. A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela aprovação do referido trabalho, com o conceito 10,0 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.



Presidente da Banca Examinadora



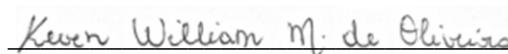
Orientador



Avaliadora 1



Avaliador 2



Aluno

AGRADECIMENTOS

A D'us, pela oportunidade de vida e saúde durante a trajetória.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Alessandro Michiles, por todo suporte e auxílio no desenvolvimento da pesquisa.

Aos demais professores e amigos que contribuíram para o meu crescimento intelectual e profissional.

À minha família, pelo apoio e, apesar das dificuldades, estar sempre presente.

A música é celeste, de natureza divina e de tal beleza que encanta a alma e a eleva acima da sua condição.

(Aristóteles)

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Descoberta e construção musical por Pitágoras	p. 22
Figura 2 - Tiorba	p. 24
Figura 3 - Harmônicos numa corda	p. 28
Figura 4 - Timbre	p. 31
Figura 5 - Flauta Doce Germânica	p. 44
Figura 6 - Violão Di Giorgio	p. 45
Figura 7 - Intervalo de repetição de ciclo para uma nota de violino	p. 45
Figura 8 - Desenho dos seis primeiros harmônicos na corda de um violão	p. 47
Figura 9 - Aproximação do sexto harmônico da Figura 8 e medidas dos comprimentos horizontal do harmônico e da amplitude	p. 48
Figura 10 - Gráfico da função pulso: a) para diferentes instantes; b) deslocando-se na corda	p. 50
Figura 11 - Gráficos da função pulso original e da SF gerada via MAN por somatório discreto	p. 54
Figura 12 - Gráficos da função pulso original e da SF gerada via MAN por método dos trapézios.....	p. 56
Figura 13 - Áudio capturado pelo software Audacity da nota Sol (783 Hz) da flauta doce	p. 57
Figura 14 - Gráfico das repetições de sinal da nota Sol (783 Hz) num intervalo de $1,00 \times 10^{-2} s$ com aproximadamente 7,8 oscilações.....	p. 57
Figura 15 - Gráficos do sinal capturado do som da flauta doce: a) sinal original; b) sinal com segmentos para interpolação linear	p. 59
Figura 16 - Gráfico do sinal coletado e das funções interpoladoras de primeiro grau para a flauta	p. 62
Figura 17 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MA para a flauta	p. 64
Figura 18 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MAN para a flauta	p. 67
Figura 19 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MON para a flauta	p. 69
Figura 20 - Gráfico do sinal coletado e da modelagem por MHS para a flauta	p. 70
Figura 21 - Captação da nota Sol (196 Hz) emitida pelo violão.....	p. 71
Figura 22 - Sinal coletado do violão na fase de sustentação	p. 71

Figura 23 - Gráfico do sinal coletado e das funções interpoladoras de segundo grau para o violão.....	p. 74
Figura 24 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MA para o violão	p. 77
Figura 25 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MAN para o violão	p. 80
Figura 26 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MON para o violão	p. 82
Figura 27 - Gráfico do sinal coletado e da modelagem por MHS, para um e dois harmônicos, para o violão	p. 83
Figura 28 - Gráfico da SF gerada pelo MON para o sinal da flauta, para três períodos consecutivos	p. 86
Figura 29 - Gráfico da SF gerada pelo MON para o sinal do violão, para três períodos consecutivos	p. 88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frações do comprimento de uma corda para a escala diatônica	p. 24
Tabela 2 - Coeficientes da SF, obtidos pelas equações 4.15 e 4.16, para $t = T/2 = 0,425 \text{ ms}$	p. 53
Tabela 3 - Coeficientes da SF, obtidos pelas equações 4.17 e 4.18, para $t = T/2 = 0,425 \text{ ms}$	p. 55
Tabela 4 - Valores dos coeficientes angular e linear das funções interpoladoras	p. 61
Tabela 5 - Limites de intervalos de tempo para as funções interpoladoras.....	p. 61
Tabela 6 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MA	p. 64
Tabela 7 - Valores iniciais e finais do índice i para cada k das funções interpoladoras de primeiro grau	p. 66
Tabela 8 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MAN	p. 66
Tabela 9 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MON	p. 68
Tabela 10 - Valores dos coeficientes linear, angular e termo independente das funções interpoladas	p. 74
Tabela 11 - Intervalo de tempo para cada função interpolada	p. 75
Tabela 12 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MA	p. 77
Tabela 13 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MAN	p. 79
Tabela 14 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MON	p. 81
Tabela 15 - Valores dos coeficientes das regressões lineares entre os métodos para gerar a SF e os dados do sinal coletado da flauta	p. 86
Tabela 16 - Valores dos coeficientes das regressões lineares entre os métodos para gerar a SF e os dados do sinal coletado do violão	p. 87

RESUMO

A Música, além de uma arte apreciada pela maioria dos seres humanos, é uma área do conhecimento que apresenta relações com a Matemática e a Física. A estruturação de notas musicais, em uma escala harmônica, e o estudo do som e de suas diferentes características pode ser realizada por meio do uso de ferramentas computacionais e da modelagem matemática, como a aplicação da série de Fourier, por exemplo. Deste modo, o principal objetivo desta pesquisa foi desenvolver um estudo físico-matemático de sinais captados de ondas sonoras emitidas por instrumentos musicais, fazendo uso de programas computacionais e de modelagem matemática, por série de Fourier. Para tanto, procurou-se entender o processo de construção da escala musical e aparentes falhas iniciais e analisaram-se os aspectos principais dos estudos do som na Física, com o advento da Ondulatória. Especificamente, para a obtenção dos resultados do trabalho, foram coletados e decodificados, separadamente, os sinais sonoros (oscilatórios) emitidos pela nota Sol de uma flauta doce e de um violão, por meio do *software* livre *Audacity* e utilizados métodos analíticos e numéricos para se gerar a série de Fourier desses sinais. Os principais resultados mostram que a série de Fourier é uma excelente ferramenta para se representar sinais sonoros por meio de equações matemáticas e que, com poucos harmônicos dessa série, é possível representar, com boa aproximação, sinais de notas musicais por meio de modelos matemáticos simples.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática. Música. Ondas Mecânicas Unidimensionais. Séries de Fourier.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
1.1 A MÚSICA DE PITÁGORAS	21
1.2 A FÍSICA DO SOM	25
1.3 MÚSICA E ONDAS HARMÔNICAS	31
1.4 A SÉRIE DE FOURIER	35
CAPÍTULO 2: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DA PESQUISA	43
3.1 A ABORDAGEM E AS ESTRATÉGIAS DE INVESTIGAÇÃO	43
3.2 INSTRUMENTAÇÃO E COLETA DE DADOS	43
3.3 MÉTODOS UTILIZADOS PARA A OBTENÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER	45
CAPÍTULO 4: APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	47
4.1 PULSO DE ONDA NUMA CORDA DE VIOLÃO	47
4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SOM COLETADO DA FLAUTA DOCE	56
4.2.1 INTERPOLAÇÃO LINEAR DO SINAL	59
4.2.2 MÉTODO ANALÍTICO	62
4.2.3 MÉTODO ANALÍTICO-NUMÉRICO	65
4.2.4 MÉTODO OBSERVACIONAL-NUMÉRICO	67
4.2.5 MODELO HARMÔNICO SIMPLES	69
4.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SOM COLETADO DO VIOLÃO	71
4.3.1 INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA DO SINAL	73
4.3.2 MÉTODO ANALÍTICO	75
4.3.3 MÉTODO ANALÍTICO-NUMÉRICO	78
4.3.4 MÉTODO OBSERVACIONAL-NUMÉRICO	80

4.3.5 MODELO HARMÔNICO SIMPLES	82
CAPÍTULO 5: ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	85
CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERÊNCIAS	91

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa trata do estudo de ondas sonoras produzidas por instrumentos musicais, por meio da utilização da modelagem matemática e do cálculo numérico, considerando funções trigonométricas como soluções da equação da onda linear. Entre as possíveis soluções dessa natureza, tem-se a Série de Fourier (doravante, abreviada no trabalho como SF), muito utilizada para a decomposição de sinais periódicos, mas, originalmente, apresentada como solução para a equação de condução de calor em sólidos.

Ao longo da história da humanidade, a ciência tem caminhado em função das descobertas que têm sido feitas por meio dos recursos disponíveis em cada época. A ciência musical segue, exatamente, esse mesmo curso, tendo sido iniciada através de experimentos realizados por Pitágoras. Nos dias atuais, existem estudos aprofundados sobre o tema musical, tanto em termos da Matemática e da construção da escala, quanto do comportamento do som, pela Física. Por meio da tecnologia disponível atualmente, a análise das ondas sonoras pode ser feita por meio da computação, com a coleta e o processamento de dados sonoros, a utilização de funções matemáticas e o cálculo numérico.

Ao se falar de música, dificilmente faz-se uma relação com as ciências exatas para se compreender como essa arte foi construída e organizada. Ao longo da história da ciência, a compreensão da música caminhou, inicialmente, ao lado da Matemática e, muito tempo depois, da Física. A construção do que se conhece hoje como escala musical, como uma sequência de notas agradáveis ao ouvido humano, se deu por meio dos estudos realizados pela Escola Pitagórica. O aprofundamento do estudo da física contida nas ondas sonoras e, conseqüentemente, na música, se deu com os resultados obtidos pelo matemático e físico francês Joseph Fourier e da criação de uma ferramenta matemática para estudar fenômenos periódicos que, posteriormente, foi chamada de Análise de Fourier.

Tantos os músicos, que produziram grandes obras, quanto os matemáticos e físicos, que se debruçaram na decodificação dos fenômenos musicais, tiveram papéis de suma importância na história da arte e da ciência, deixando conhecimentos fundamentais para o avanço da ciência musical e utilizados como

base, até os dias atuais. É através desses conhecimentos que, hoje, não só se pode ouvir uma boa música, mas conseguir enxergá-la por meio da utilização de ferramentas matemáticas, como a modelagem computacional do som através de funções, unindo esses dois universos, arte e ciência.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma base histórica e os estudos matemáticos e físicos, relacionados à Música, realizados ao longo da trajetória da existência humana e suas principais contribuições para que, hoje, fosse possível a execução desse trabalho. O segundo capítulo revisa metodologias que abordam temas relacionados à SF e sua aplicação na Música. O terceiro capítulo descreve a metodologia utilizada para se obterem os resultados do trabalho, apresentando os instrumentos musicais analisados, os programas computacionais e as equações que serviram de ferramentas para o cumprimento dos objetivos. O quarto capítulo expressa os resultados obtidos através da modelagem matemática por meio dos métodos adotados para a pesquisa. O quinto e último capítulo apresenta uma análise mais detalhada dos resultados mais relevantes, avaliando a qualidade da modelagem matemática realizada e possíveis desdobramentos desses resultados.

O objetivo geral desta pesquisa foi desenvolver um estudo físico-matemático das ondas sonoras por meio da coleta e da decomposição de sinais oscilatórios emitidos por instrumentos musicais, a partir do uso da SF.

Os objetivos específicos foram:

- a) Entender o processo de construção da escala pitagórica, por meio de um estudo bibliográfico;
- b) Comparar a escala encontrada por Pitágoras e a escala utilizada na atualidade e verificar suas equivalências e diferenças;
- c) Estudar os fundamentos das ondas mecânicas unidimensionais e de suas relações com a música;
- d) Modelar, utilizando programas computacionais, interpolação polinomial, SF e métodos do cálculo numérico, sinais sonoros emitidos por dois instrumentos musicais: a flauta doce e o violão.

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 A MÚSICA DE PITÁGORAS

A música, como expressão e arte, existe desde os primórdios da humanidade sendo, o próprio ser humano, o primeiro instrumento musical. Ao longo da evolução do conhecimento, novas ferramentas de reprodução de som, mesmo que rudimentares, foram sendo elaboradas, criando-se, assim, uma nova ciência. Segundo Candé (2001), musicólogo francês, a sequência de eventos começa com a percussão através do corpo e dos sons obtidos a partir de madeira, seguindo com a imitação e a criação de instrumentos que fizessem sons da natureza, chegando, posteriormente, ao aprimoramento dos instrumentos.

A partir do século XI, foi necessária a organização e a sistematização das notas musicais. Rodrigues (1999) apresenta como Guido d'Arezzo descreve, no seu tratado de música, intitulado *Micrologus*, uma lenda de como ocorreu o interesse de Pitágoras pela música e a relação com intervalos harmônicos através de números racionais:

Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batiam martelos. Espantado pela agradável harmonia (*concordiam*) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (*modulationis*) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso. (RODRIGUES, 1999, p. 17)

Dessa forma, a Escola Pitagórica subdividiu as ciências exatas da seguinte maneira: aritmética, astronomia, geometria e música. Esses quatro conhecimentos formavam o que se convencionou chamar de *Quadrivium*, compondo uma parte fundamental das sete artes liberais do currículo medieval, que se complementava com o *Trivium*, composto pela gramática, dialética e retórica (RODRIGUES, 1999).

Pitágoras construiu um instrumento chamado Monocórdio (Figura 1), que consistia em uma corda esticada e uma haste móvel que marcava o tamanho da corda desejada, no qual realizava seus experimentos, observando a relação entre os

sons que se ouvia de forma agradável e o comprimento da corda que compunha o instrumento.

Figura 1 - Descoberta e construção musical por Pitágoras.



Fonte: GAFFURIUS (1492, p. 35)¹.

Primeiramente, Pitágoras observou o som produzido pela corda solta. Tomou esse som como referência e constatou que, quando posicionava a haste na metade da corda e fazia um dos lados da corda vibrar, o som emitido era percebido pelo ouvido como o mesmo som produzido com a corda solta só que mais agudo. Também fez comparativos das massas dos martelos, que eram 12, 9, 8 e 6 unidades de massa, com o comprimento de corda. Tomando a fração 12 / 12, como o comprimento da corda inteira, ele fez as proporções dos outros valores e o denominador 12 para obter as frações que estabeleceriam o tamanho da corda que reproduziria sons harmoniosos, assim como os dos martelos na oficina (RODRIGUES, 1999).

As proporções ficaram da seguinte forma:

$$\frac{12}{12'} \quad \frac{9}{12'} \quad \frac{8}{12'} \quad \frac{6}{12}$$

¹ GAFFURIUS, Franchinus. *Theorica Musicae*, 1942.

Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/Theorica_musicae_\(Gaffurius,_Franchinus\)](https://imslp.org/wiki/Theorica_musicae_(Gaffurius,_Franchinus))>. Acesso em: 5 de agosto de 2020.

Simplificando as frações, têm-se as frações de corda que reproduziriam sons agradáveis, ou seja:

$$1, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{2}$$

Mesmo que simples, esta foi a primeira escala organizada e sistematizada matematicamente, composta por essas quatro notas. Então, o monocórdio sofreu uma atualização para quatro cordas e passou a ser chamado de tetracórdio, que produzia as quatro notas da escala.

Conforme Pereira (2013), a escala pitagórica era a mais aceita até o período da Idade Média. Mas outras escalas já estavam sendo desenvolvidas para corrigir algumas diferenças entre os intervalos em que não havia os mesmos valores.

A escala pitagórica serviu como base para a construção da escala diatônica. Essa escala expandiu sua extensão para sete notas musicais. A criação dessa nova escala foi feita através do que se chamam de “ciclo das quintas”. A quinta de uma nota é determinada pela fração $2/3$ multiplicada pela fração correspondente à nota inicial.

Exemplo:

Supondo a escala de Dó: Dó, Re, Mi, Fá, Sol, La, Si. A nota Dó é a primeira nota da escala e corresponde à corda inteira, ou seja, seu valor correspondente ao comprimento da corda é 1. Para se saber a quinta nota partindo do Dó, basta multiplicar seu valor correspondente da corda por $2/3$. Assim, faz-se:

$$\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Portanto, a fração $2/3$ da corda, quando tocada, produzirá o som corresponde à quinta nota da escala de Dó que é a nota Sol. Utilizando o ciclo das quintas, encontrar-se-ão as frações correspondentes a todas as notas da escala diatônica (Tabela 1).

Tabela 1 - Frações do comprimento de uma corda para a escala diatônica.

DÓ (1ª)	RÉ (2ª)	MI (3ª)	FÁ (4ª)	SOL (5ª)	LÁ (6ª)	SI (7ª)	DÓ (8ª)
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: Do autor (2020).

Os estudos sobre a música e a escala cromática tiveram seu início no Oriente com o príncipe Chu Tsai-yu, em 1596, que desenvolveu uma divisão de intervalos de mesma proporção. O uso de logaritmos foi apresentado pela primeira vez por Simon Stevin (1528-1620). O aprofundamento e a expansão da ideia foram realizados através das obras de Mersenne (1635) e sua grande contribuição para a matemática: a teoria dos números (LOY, 2006).

Com os avanços nos estudos musicais e a construção de instrumentos musicais mais sofisticados, no século XVI, na Itália, foi criado o instrumento tiorba (Figura 2) como um aprimoramento dos instrumentos de corda (BURMESTER, 2010).

Figura 2 - Tiorba.

Fonte: MICHILES (2018)².

Na Figura 2, apresenta-se a tiorba disponível em exposição no *The Metropolitan Museum of Art* (O Museu Metropolitano de Arte), em Nova Iorque. Conforme Burmester (2010), a tiorba, ou teorba, atendia a necessidade de grupos

² MICHILES, A. A. S. Fotografia capturada no *The Metropolitan Museum of Art* (O Museu Metropolitano de Arte), em Nova Iorque, 2018.

musicais que precisavam de um instrumento com som mais grave. Então, foram adicionadas cordas com maior comprimento e espessura para que reproduzisse o som desejado.

Com a construção da escala musical e a criação de novos instrumentos, a música foi ganhando forma, mas algumas propriedades ainda precisavam ser entendidas. O que faz a nota ser aguda ou grave? Volume alto ou baixo? Essas perguntas são respondidas, por meio de estudos realizados no âmbito da Física, na próxima Seção.

1.2 A FÍSICA DO SOM

A transição de um estudo da matemática da música para a física do som se deu por volta do século XVI com o músico italiano Vincenzo Galilei, pai do cientista Galileu Galilei. De acordo com Bromberg (2011), após estudos realizados usando métodos produzidos por Aristóteles, Vincenzo fundamentou um pensamento mais moderno da ciência e pôde “descobrir conceitos e desenvolver uma teoria para tirar a música do pedestal da matemática e conduzi-la para o campo da acústica”.

Os conhecimentos físicos, como a frequência, ainda não eram utilizados até aquele momento, e sim sobre a matemática e os números. Vincenzo chama a música, vista do ponto de vista matemático, como um “número sonoro”, comenta Bromberg (2011). A autora acrescenta que Vincenzo, através de demonstrações e argumentos filosóficos, “provou a ineficácia da base matemática para a música”. Essa nova concepção musical não teve grande relevância na sua época e só seria reconhecido no século XVII pelo filósofo Marin Mersenne.

Na física, o conceito de ondas fornece o suporte para compreender os fenômenos presentes na música. Segundo Michiles (2019, p. 57), “as ondas mecânicas transportam energia sem, necessariamente, transportar matéria e precisam de um meio material para que se propaguem”. Pode-se dividir as ondas de acordo com o tipo de perturbação provocada no meio material em questão. Chama-se de onda transversal, se a perturbação realizada for perpendicular à direção de propagação (como uma onda que viaja numa corda de violão). As ondas longitudinais são aquelas cuja perturbação é paralela à direção de propagação (como no caso das ondas sonoras que surgem no interior do violão).

Em termos gerais, as ondas, tanto mecânicas quanto eletromagnéticas (que não precisam de um meio material para se propagar) apresentam algumas características fundamentais, que são apresentadas a seguir.

Frequência: é o número de oscilações para um dado intervalo de tempo. Na música, a frequência (f) diz quando uma nota será aguda (alta frequência) ou grave (baixa frequência), isto é:

$$f = \frac{\text{número de oscilações}}{\text{intervalo de tempo}} \quad (1.1)$$

Período: é o inverso da frequência, ou seja, o tempo (T) necessário para completar uma oscilação.

Comprimento de onda: é representado pela letra grega λ (lâmbda) e corresponde ao comprimento horizontal total de uma onda completa, entre picos ou vales consecutivos.

Velocidade de propagação: é a distância que uma onda percorre, ou seja, o seu comprimento de onda, em um determinado intervalo de tempo (período de oscilação). Para as condições padrão de temperatura (20 °C) e pressão atmosférica (1,0 atm), a velocidade de propagação de uma onda sonora no ar apresenta o valor de cerca de 343 m / s (ver equação 1.12). Genericamente, se usa a equação 1.2 para calcular a velocidade de propagação de uma onda utilizando o seu comprimento e o tempo gasto, ou seja:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (1.2)$$

Sabendo que a frequência é dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

Tem-se, para a velocidade de propagação a seguinte equação fundamental:

$$v = \lambda f \quad (1.4)$$

Amplitude: é a altura, ou a distância, entre o eixo e um pico, ou também do eixo a um vale. A amplitude é sempre apresentada com valores positivos.

Uma onda sonora é diferente de outras ondas de mesma natureza (ondas mecânicas) em razão de algumas grandezas fundamentais, que são apresentadas abaixo:

Intensidade: está relacionada ao volume do som. Quanto mais intenso é um som, maior volume terá. A intensidade (I) está relacionada à energia (E) que uma onda transporta que, por sua vez, está associada à amplitude. Quanto maior a amplitude, maior será intensidade e, por fim, maior o volume. Dessa forma:

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot A} = \frac{P_{ot}}{A} \quad (1.5)$$

Então, a intensidade é a energia transportada por intervalo de tempo (Δt), por unidade de área (A). Pode-se reescrever a equação 1.5, uma vez que a razão da energia pelo tempo é a potência (P_{ot}). Isso explica porque o mesmo som, ouvido de perto de uma caixa de som, tem um volume mais alto do que ouvido de uma certa distância, pois a área de propagação do som é maior à medida que o ouvinte se distancia, fazendo com que a intensidade (volume) diminua.

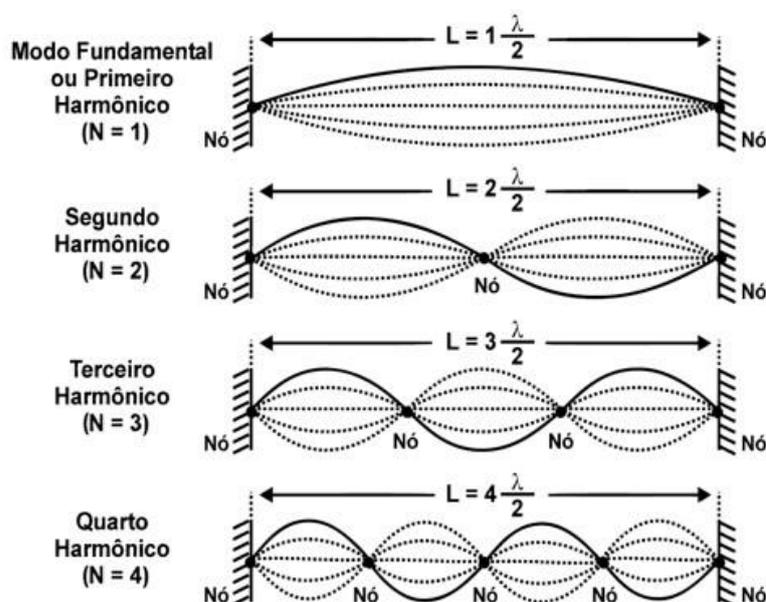
Nível de intensidade sonora: o ouvido humano faz ajustes na intensidade sonora que chega até ele. A intensidade que se ouve não é exatamente a mesma produzida por uma fonte sonora, justamente por essa adaptação que o ouvido realiza. A intensidade mais baixa que o ouvido humano consegue perceber é de $1,0 \times 10^{-12} \text{ W / m}^2$ (I_0). O nível de intensidade mostra qual, realmente, é o valor de intensidade que se capta e chama-se de β (beta), medido em decibéis (dB).

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.6)$$

Observando uma corda de um violão, as ondas ali formadas são chamadas de ondas estacionárias, por se propagarem limitadamente em uma corda fixa nas extremidades. Fazendo um movimento periódico na corda, obtêm-se dois tipos de onda: incidente e refletida. A onda incidente é aquela produzida no ponto de perturbação. A onda refletida é aquela que volta no sentido contrário da perturbação após chegar na outra extremidade da corda. A mesma quantidade de energia transportada pela onda incidente será a da onda refletida, causando uma interferência entre essas ondas e formando uma onda estacionária.

Ondas estacionárias em uma corda resultam em modos de vibração que estão relacionados à frequência do som. Esses modos de vibração são caracterizados por harmônicos nas cordas e podem ser representados nas formas apresentadas na Figura 3. O primeiro harmônico, chamado também de modo fundamental, tem o comprimento da corda igual à metade do comprimento da onda, pois, como se verifica na Figura 3, o comprimento de onda não é completo, sendo formado por um vale ou um pico. O segundo harmônico é caracterizado por ter o seu comprimento de onda completo, ou seja, o comprimento da corda é igual ao comprimento da onda ($L = \lambda$).

Figura 3 - Harmônicos numa corda.



Fonte: PROENEM (2014, p. 1)³.

De forma geral, tem-se que o comprimento da onda estacionária é igual a duas vezes o comprimento da corda dividido pelo número do harmônico (HALLIDAY ET AL., 2012):

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.7)$$

³ PROENEM. Ondas Estacionárias. 2014.

Disponível em: < <https://www.proenem.com.br/enem/fisica/ondas-estacionarias/>>. Acesso em: 17 de agosto de 2020.

Para os casos de velocidade de uma onda numa corda, e somente para esse caso, tem-se a equação de Taylor que diz que a velocidade para esse tipo de onda, considerando pequenas amplitudes, é a raiz quadrada da razão entre a força de tração (F_t) exercida na corda (se a corda está muito esticada, a tensão é alta) e a sua densidade linear de massa (μ):

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad (1.8)$$

Cada corda tem uma espessura diferente, que é resultado da sua massa e de seu comprimento. Então, a densidade linear é justamente o valor do calibre da corda. Quanto mais espessa a corda, maior a sua densidade.

$$\mu = \frac{\text{massa}}{\text{comprimento}} \quad (1.9)$$

Igualando as velocidades 1.4 e 1.8 e isolando a frequência, tem-se:

$$\lambda f = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

Utilizando o inverso da equação 1.7, faz-se:

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \quad (1.10)$$

Pode-se, assim, fazer simulações e verificar a relação de cada propriedade do som e de suas aplicações no violão. Quanto maior o harmônico produzido em um instrumento, quer seja um violão, piano ou flauta, o mais alto é o som percebido, pois sua frequência aumenta, como verificado na equação 1.10.

Outra característica é a força de tração. Quando se aperta mais a corda do violão, através das tarraxas presentes na cabeça do instrumento, constata-se uma alteração no som, que fica cada vez mais agudo (aumenta frequência), à medida que a corda é esticada. Tem-se uma relação de proporcionalidade inversa tanto entre a frequência e o comprimento quanto entre a frequência e a densidade da corda. Quanto maior a corda tocada, mais grave será o som escutado. Se se

pressiona a corda em qualquer ponto, tem-se a diminuição desse comprimento, fazendo com que a frequência aumente. A densidade linear é facilmente compreendida ao se observar a primeira e a última corda do violão, ambas produzem a mesma nota (Mi, se estiverem na afinação padrão). A diferença é a espessura da corda, a corda mais “grossa” produz uma nota Mi com baixa frequência, a corda mais “fina” produz uma nota Mi com alta frequência (PEREIRA, 2013).

Para o cálculo da velocidade de propagação de uma onda sonora, tem-se uma equação semelhante à 1.8, sendo dada pela raiz quadrada da razão entre o módulo de elasticidade volumétrica (B) do meio pelo qual a onda viaja e a sua massa específica (razão da massa pelo volume – ρ):

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (1.11)$$

Se o meio, pelo qual a onda se propaga, varia pouco de volume, enquanto há variações de pressão com a passagem da onda, o valor de B é alto e a onda tende a viajar a uma velocidade mais alta. Há, também, uma versão da equação 1.11 adaptada para gases e já ajustada para o ar atmosférico, levando em conta sua composição e a dependência de suas propriedades com a temperatura (θ_c – dada em °C), a saber:

$$v_{ar} = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta_c}{273,15}} \quad (1.12)$$

na qual 331 m / s é a velocidade de propagação de uma onda sonora medida para $\theta_c = 0,0$ °C.

Analisando pela visão física das ondas sonoras produzidas por um instrumento, Halliday et al. (2012) explica que se escuta o som proveniente de alguma fonte devido ao princípio da superposição de ondas, que nada mais é que a soma dos deslocamentos individuais das ondas geradas. Dessa forma, tomando duas ondas lineares unidimensionais quaisquer que se propagam ao mesmo tempo, no mesmo meio material, cujas funções de onda são dadas por $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$, sua interferência será representada pela soma:

$$u'(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (1.13)$$

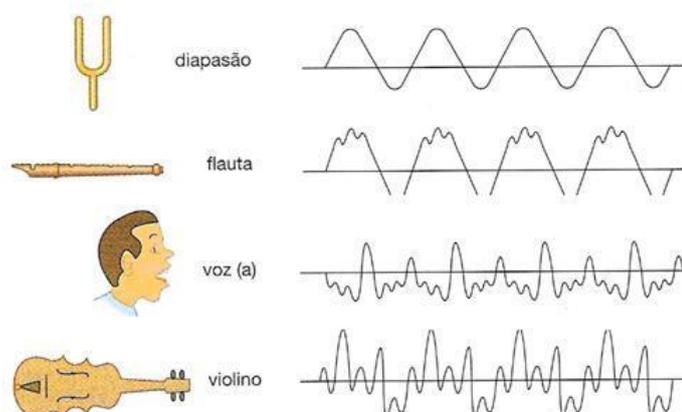
O resultado da soma dessas ondas superpostas é a onda resultante ou onda total (HALLIDAY ET AL., 2012) e corresponde ao princípio da superposição de ondas.

A Física apresentou novos conceitos contidos em uma única nota musical como a frequência que determina a altura da nota, amplitude que diz respeito ao volume da nota, dentre outros. Mas como reconhecer uma mesma nota tocada por dois instrumentos diferentes? Ferramentas, como a SF, auxiliarão a compreender a diferenciação do som através de funções matemáticas.

1.3 MÚSICA E ONDAS HARMÔNICAS

Uma mesma nota, emitida por dois instrumentos diferentes, reproduzem sons diferentes, apesar de a frequência sonora resultante dos instrumentos ser igual. Como se pode identificar ou diferenciar o som de uma nota Dó, por exemplo, tocada em um piano e a mesma nota, na mesma oitava, tocada por uma flauta? O timbre é a propriedade do som que permite analisar os diferentes sons de mesma altura. O formato da onda sonora (Figura 4) emitida por uma fonte nunca será igual ao de outra, por diversas características, tais como o material que é feito, temperatura, tamanho, dentre outras.

Figura 4 - Timbre.



Fonte: SOLMUSICAL (2012, p. 1)⁴.

⁴ SOLMUSICAL. O que é Timbre. 2012.

Disponível em: <<https://sites.google.com/site/solmusical/material-didatico/material-de-apoio/o-que-e-timbre>>. Acesso em: 31 de agosto de 2020.

Para a apresentação de uma dedução simplificada da equação da onda linear, considerar-se-á uma onda harmônica produzida numa corda de violino. Considera-se que a corda é elástica, que a densidade linear de massa μ é uniforme e que a corda está sujeita a uma tensão F_t também uniforme. A fonte da onda vibra em movimento harmônico simples (ciclos de vibração em intervalos de tempos iguais), o deslocamento $y(x, t)$ é caracterizado por pequenas amplitudes Y e a propagação na corda é unidimensional. Dessa forma, pode-se escrever para a função de onda:

$$y(x, t) = Y \text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.14)$$

em que a função seno (sen) descreve o formato da onda, podendo-se utilizar, alternativamente, cosseno. Chama-se de ângulo de fase o deslocamento em relação à origem no eixo horizontal x e denota-se pela letra grega φ . O valor k ($= 2\pi/\lambda$) é o número de onda e informa quantas ondas estão sendo formadas em um intervalo de 0 a 2π (que representa um ciclo completo). A frequência angular, representada pela letra ω ($= 2\pi/T$), está relacionada à quantidade de ondas formadas em um dado intervalo de tempo (período), durante cada ciclo completo. Para as ondas sonoras produzidas no interior do violino, poder-se-ia escrever as funções de onda, de maneira simplificada, em termos do deslocamento horizontal $s(x, t)$ ou das variações de pressão $\Delta p(x, t)$ das camadas de ar que vibram no interior do violino, ou seja:

$$s(x, t) = S \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.15)$$

$$\Delta p(x, t) = \Delta P \text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.16)$$

Considerando o princípio da conservação da energia mecânica para um comprimento de onda e utilizando as equações 1.5, 1.15 e 1.16, após algum trabalho algébrico obtêm-se equações específicas para o cálculo das intensidades em função das amplitudes do deslocamento (S) e da pressão (ΔP), ou seja:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 S^2 v \quad (1.17)$$

$$I = \frac{\Delta P^2}{2\rho v} \quad (1.18)$$

com

$$\Delta P = \rho \omega S v \quad (1.19)$$

Para demonstrar a equação da onda linear, utilizar-se-á a função de onda harmônica 1.14 e chamar-se-á o argumento da função seno de $g(x, t)$, somente para facilitar os cálculos, ou seja:

$$g(x, t) = kx - \omega t + \varphi$$

Como a equação da onda linear descreve as variações de uma função y para um determinado ponto x de uma corda em um instante de tempo t , necessita-se derivar essa função duas vezes, para relacionar a aceleração de cada ponto com as variações da posição vertical.

Primeiramente, deriva-se a função $y(x, t)$ em relação ao tempo, para se encontrar a velocidade de vibração, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= Y \frac{d[\text{sen}(g)]}{dg} \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= Y \cos(g) (-\omega) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -Y\omega \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Derivando, novamente, em relação ao tempo, encontra-se a aceleração de vibração:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -Y\omega \frac{d[\cos(g)]}{dg} \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= -Y\omega [-\text{sen}(g)](-\omega) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -Y\omega^2 \text{sen}(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Em seguida, calcula-se a derivada de 1.14, em relação à posição x , ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= Y \frac{d[\text{sen}(g)]}{dg} \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= Y \cos(g) k \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= Yk \cos(kx - \omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Derivando, uma segunda vez, em relação a x , tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= Yk \frac{d[\cos(g)]}{dg} \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= -Yk \operatorname{sen}(g) k\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Yk^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.23)$$

Multiplicando por $\frac{1}{\omega^2}$ ambos os lados da equação 1.21:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Y \omega^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \frac{1}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Y \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.24)$$

Multiplicando a equação 1.23 por $\frac{1}{k^2}$:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Yk^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Y \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) \quad (1.25)$$

De acordo com os resultados acima, verifica-se que as equações 1.24 e 1.25 são iguais, dessa forma, tem-se:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.26)$$

Sabe-se, pela equação 1.4 e pelas definições de k e ω , que a velocidade de propagação de uma onda é dada por:

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{k} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}$$

Substituindo a velocidade na equação 1.26, tem-se a equação da onda linear:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.27)$$

Essa equação relaciona a aceleração de um segmento infinitesimal de corda de violino com o deslocamento médio de segmentos vizinhos e prediz que a corda se moverá em ondas. A equação pode ser generalizada para outros sistemas físicos em que as ondas ocorrem (STEWART, 2013).

1.4 A SÉRIE DE FOURIER

O método que é, hoje, largamente utilizado para representar diferentes sinais que apresentem qualquer padrão no espaço e no tempo, por meio de uma superposição de harmônicos (padrões senoidais com diferentes frequências), iniciou com os estudos sobre a condução do calor por Joseph Fourier, no fim do século XVIII e começo do século XIX (STEWART, 2013; BASSALO E CATTANI, 2010). A equação diferencial apresentada por Fourier, para representar a condução de calor em um sólido, tem o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1.28)$$

na qual θ representa a temperatura de uma haste de metal na posição x num instante t e α é uma constante, chamada de difusividade térmica. Como se pode verificar, há uma grande semelhança entre as equações 1.27 e 1.28, com a diferença na ordem da derivada que aparece no lado esquerdo de cada uma dessas equações. Isso se explica pelo fato de uma onda numa corda de um violino pode permanecer vibrando indefinidamente (desde que mantenha as condições de pequenas amplitudes e não amortecimento), enquanto o calor, ao ser transportado num sólido condutor, dissipa com tempo, a menos que exista alguma fonte para mantê-lo (o que não está previsto na equação 1.28).

O aspecto mais destacável na busca pelo entendimento do fenômeno do transporte de calor por condução por Fourier, mas do que a própria equação 1.28, foi a forma que como ele a resolveu. Como a equação 1.28 é linear (assim como a

equação 1.27), pode-se escrever a solução geral por meio da sobreposição de soluções. Assim, para um tempo inicial $t = 0$, ele exprimiu a seguinte solução:

$$\begin{aligned}\theta(x, 0) &= F(x) \\ &= a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots + b_1 \sin(x) \\ &\quad + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad (1.29)$$

na qual não há b_0 , pois $\sin(0x) = 0$, e os coeficientes a_n e b_n são obtidos por meio das fórmulas deduzidas por Fourier (após uma longa viagem através de expansões de séries de potências de funções trigonométricas), conforme é apresentado abaixo:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.30)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.31)$$

A equação 1.29 é conhecida como SF de $f(x)$ e os coeficientes a_n e b_n , relativos à função $f(x)$ e calculados pelas equações 1.30 e 1.31, são chamados de *coeficientes de Fourier* de $f(x)$ (BUTKOV, 1988). Segundo Arfken e Weber (2005), as condições impostas a $f(x)$ para que a equação 1.29 seja válida é que $f(x)$ tenha apenas um número finito de descontinuidades e de valores extremos (máximos e mínimos), no intervalo $[0, 2\pi]$. Essas condições são conhecidas como *condições de Dirichlet*. Adicionalmente, para que a_n e b_n possam ser calculados pelas equações 1.30 e 1.31, as funções $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ devem ser ortogonais (mais detalhes podem ser encontrados em BUTKOV, 1988, e ARFKEN E WEBER, 2005).

A SF pode ser escrita, também, para uma $f(x)$ periódica com um comprimento de repetição $2l$. Dessa forma, se $f(x)$ é definida no intervalo $(-l, l)$ e determinada fora desse intervalo por $f(x + 2l) = f(x)$, as equações 1.29, 1.30 e 1.31 podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (1.32)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.33)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.34)$$

Segundo Bassalo e Cattani (2010), em geral, quando se considera uma função do tempo $f(t)$, contínua ou seccionalmente contínua, definida no intervalo $(-\infty, +\infty)$, periódica de período $T = 2\pi/\omega$, pode-se escrever a SF, $F(t)$, e o cálculo de seus coeficientes, a_n e b_n , como:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)] \quad (1.35)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.36)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.37)$$

As equações 1.35, 1.36 e 1.37 têm larga aplicabilidade na representação, por meio de funções trigonométricas, de diferentes sinais periódicos, que podem ser obtidos a partir de funções matemáticas ou de uma série de dados, com as integrais dos coeficientes de Fourier podendo ser calculados analiticamente ou, mesmo, numericamente.

Se a função que se está procurando representar por meio da SF for par, isto é, se $f(-t) = f(t)$, então todos os coeficientes b_n devem anular-se e $f(t)$ admite um desenvolvimento em semi-série de cossenos. Caso a função seja ímpar, ou seja, se $f(-t) = -f(t)$, todos os coeficientes a_n devem anular-se e $f(t)$ admite um desenvolvimento em semi-série de senos.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As funções periódicas, tão necessárias para se compreender fenômenos cíclicos da natureza, encontram, também, a sua importância no estudo da Música. Pereira (2013), na análise de sinais sonoros, diz que “a própria escala temperada é uma função periódica de período 12 unidades” e que, por meio das funções seno e cosseno, se podem descrever esses sinais por se repetirem em intervalos regulares. Segundo o autor, como nenhum instrumento produz um som puro, e sim uma série de harmônicos que, juntos, resultam na nota, a série harmônica pode ser representada por uma soma de funções seno, ou seja:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen}(2\pi n f_1 x)$$

$$f(x) = k_1 \text{sen}(2\pi f_1 x) + k_2 \text{sen}(2\pi 2 f_1 x) + k_3 \text{sen}(2\pi 3 f_1 x) + \dots$$

nas quais os valores de k_n representam a intensidade ou amplitude dos harmônicos. À medida que a sequência aumenta, os k_n assumem valores muito pequenos.

Nascimento et al. (2015) descrevem a flauta como um dos instrumentos, historicamente, mais antigos e tocados da humanidade, cuja forma de reprodução é diferente para cada espécie de flauta. As diferentes características do som de cada instrumento, chamadas de timbre, “são resultado de fatores como a forma e o material de constituição”. Para a análise de seus resultados, foram gravados e apresentados os níveis de intensidade sonora, em um determinado intervalo escolhido, para todas as notas desse intervalo. Os espectros sonoros obtidos mostram picos de intensidade mais altos que indicam as frequências reforçadas pelo instrumento. Através dessas observações de frequências, verificou-se que as notas médias possuem o valor do primeiro harmônico mais intenso. As notas graves são mais difíceis de serem diferenciadas das que tem uma oitava acima.

Ainda, segundo Nascimento et al. (2015), o som de uma determinada nota é composto por uma série de harmônicos com diferentes intensidades, que pode ser representada como a soma de funções senoidais através da Transformada de

Fourier (TF). Adicionalmente, verificaram que, para os três primeiros harmônicos, já é possível se obter boas aproximações, tendo em vista que os harmônicos seguintes tem pouca influência.

Conforme apresentado na Seção 1.2, dependendo da direção de vibração, uma onda mecânica pode ser classificada como longitudinal ou transversal. O timbre, que é característica singular de cada instrumento, resulta do somatório de ondas senoidais, que podem ser obtidas através da SF. Saito e Depizoli (2018) demonstram os coeficientes e a SF, considerando as funções ortogonais, para o intervalo $[-p, p]$, apresentadas abaixo:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \cos\left(\frac{3\pi}{p}x\right), \dots, \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right), \sin\left(\frac{3\pi}{p}x\right), \dots \right\}$$

Os autores concluem que o sinal periódico resultante provém da soma dos harmônicos escolhidos. De acordo com essa escolha, podem-se obter variados timbres. Das maneiras possíveis de se estabelecer diferenças entre os timbres de determinados instrumentos, o modo auditivo é o mais habitual, mas não o único. Por meio da utilização de programas computacionais de captação de áudio, podem-se gerar gráficos e se verificar, analiticamente, as diferenças de sinal coletado.

Chang (2016), após coletar dados de som reproduzidos por um violino, uma flauta e um monocórdio, estabelece comparações entre os gráficos resultantes. Após a coleta desses dados e as devidas adaptações na SF e na TF, foi utilizado o programa computacional *wxMaxima* para o cálculo numérico das integrais que surgem para o cálculo dos coeficientes, dada a dificuldade em resolvê-las analiticamente. As funções utilizadas para a obtenção dos coeficientes foram funções escada, “definidas por partes em intervalos de comprimento fixos”. O intervalo de integração sofreu adaptação de $[-l, l]$ para $[0, 2L]$, pois o programa utilizado para a coleta de dados, denominado *Audacity*, fornece os elementos da amostra a partir do instante 0. Ao final, a função obtida através da SF foi inserida no programa *GeoGebra* na ferramenta funcional *TocarSom* e reproduzida. Obtiveram, como resultado, um som bem próximo ao coletado dos instrumentos, mesmo com possíveis ruídos na captação e erros provenientes das aproximações nos cálculos.

A coleta de dados de um sinal sonoro precisa obedecer a algumas especificidades para se garantir a qualidade da análise. Segundo Covo (2016), a taxa de amostragem padrão para esses sinais coletados deve ser de 44100 Hz, pois a frequência máxima que ouvido humano consegue captar é de 20 kHz, então o dobro disso, isto é, 40 kHz, já seriam suficientes. Outra explicação para o uso dessa taxa é que 44100 é o produto dos quatro primeiros números primos ao quadrado, $(2 \times 3 \times 5 \times 7)^2$, o que facilita o “fracionamento do conjunto de dados mostrado” e remover possíveis frequências maiores que 20 kHz.

A partir da coleta de dados, o sinal é expresso, graficamente, em termos de amplitude ou intensidade versus tempo. Esse sinal é recebido pelo programa computacional *Audacity* e exportado em formato de texto, podendo ser utilizado por outros aplicativos. Na captação de um som reproduzido por um instrumento musical, o som coletado tem características ao longo do seu desenvolvimento. Ao se tocar uma corda de violão, por exemplo, o som parece ser mais intenso (volume maior) no começo e depois vai diminuindo gradativamente de volume. Covo (2016) chama esse fenômeno de *envelopamento dinâmico*, que é “uma forma de retratar o desenvolvimento dinâmico do som, do seu nascimento até a sua morte”.

As partes desse envelopamento dinâmico são quatro: (i) *ataque* é o momento inicial do som, quando, geralmente, a amplitude chega ao seu ponto máximo; (ii) após isso, o som sofre um *decaimento*, caracterizado pela perda de energia ocorrida pelo ataque inicial; (iii) o som, então, se mantém equilibrado por algum tempo, o que é chamado de *sustentação*; (iv) depois diminui a sua intensidade até chegar à última etapa, a *extinção* (COVO, 2016). Para a coletada de dados e estudos gerais é selecionado instante em que o som se mantém equilibrado, isto é, sustentado.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DA PESQUISA

3.1 A ABORDAGEM E AS ESTRATÉGIAS DE INVESTIGAÇÃO

O tipo de estudo realizado neste trabalho é de natureza quantitativa, uma vez que o som pode ser descrito por meio de ferramentas computacionais e de análises da física-matemática. Dessa forma, os resultados são escritos a partir de dados quantitativos coletados e de cálculos analíticos e numéricos, utilizando a modelagem matemática.

A abordagem quantitativa é utilizada quando se tem um conhecimento prévio teórico sobre o objeto de estudo (SILVA e SIMON, 2005), conforme se apresentou no Capítulo 1. Segundo Knechtel (2014), a pesquisa quantitativa quantifica os dados e classifica a relação entre as variáveis. Além disso, esse tipo pesquisa tem como foco determinar se as teorias generalizadas sobre o assunto têm ou não confirmação científica através de uma investigação empírico-descritiva.

A estratégia metodológica aplicada ao trabalho foi o estudo de caso que, conforme De André (2013), é caracterizada por uma descoberta em que o pesquisador parte de alguns pressupostos que direcionaram os seus estudos, mas sempre sabendo que informações importantes surgirão ao longo da pesquisa e que os resultados podem ser alterados de acordo com a sua particularidade.

3.2 INSTRUMENTOS E COLETA DE DADOS

Os primeiros dados sonoros foram coletados a partir da captação da nota Sol, reproduzida por uma Flauta Germânica da marca Yamaha (Figura 5). Apesar de um instrumento de simples execução e baixo custo, a flauta tem a sua importância histórica por ter sido um dos primeiros instrumentos construídos pela humanidade, inicialmente feitos com pedaços de madeira ou ossos de animais. A escolha pela nota Sol se deu por ser uma nota mediana no instrumento, oferecendo uma precisão maior de afinação para um som mais limpo, ou seja, sem interferências e/ou ruídos. A nota Sol reproduzida é chamada de G5 (G corresponde ao nome da nota Sol e 5 é a oitava que o sol está sendo tocado) e a frequência dessa nota é de 783 Hz.

Figura 5 - Flauta Doce Germânica.



Fonte: Do autor (2021).

Para a captação do som e a exportação dos dados da nota Sol da flauta, foram utilizados o microfone Philips SBC MD195 (que recebeu o sinal sonoro), e o *software* livre *Audacity* (que registrou o sinal sonoro), a uma taxa de amostragem de 44,1 kHz (ou 44100 registros, a cada segundo). Ao ser captada pelo microfone e gravada pelo *Audacity*, em decibéis (dB), a trilha padrão criada é exibida na forma de um sinal oscilatório com uma escala linear, obtida por meio de um subprograma do referido *software*, que converte a escala de captura (dB) em uma amplitude de unidade arbitrária (ua), variando entre $-1,0$ e $+1,0$, com o centro em zero. Essa trilha também pode ser visualizada em dB, caso seja necessário.

Processo de gravação semelhante ao realizado para a flauta foi aplicado para extrair os dados de amostragem do violão. O instrumento foi um Violão Di Giorgio modelo *Classic Guitar 28*, com cordas de nylon (Figura 6). A nota escolhida para a modelagem foi a mesma da flauta, ou seja, a nota Sol, mas para uma oitava diferente. A nota reproduzida foi o G3 (Sol 3, frequência de 196 Hz), ou seja, duas oitavas mais grave do que a reproduzida pela flauta doce. A nota Sol em questão é reproduzida através da perturbação da terceira corda do violão (de cima para baixo) de forma solta, sem ser necessário pressionar a corda em nenhum ponto do braço do violão. Esse foi o critério para que fosse escolhida essa nota, pois o som sai mais limpo e afinado.

Figura 6 - Violão Di Giorgio.



Fonte: Do autor (2021).

3.3 MÉTODOS UTILIZADOS PARA A OBTENÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER

A partir dos dados da nota Sol tocada tanto pela flauta quanto pelo violão e que foram coletados por meio do programa *Audacity*, separou-se um conjunto correspondente ao intervalo de repetição de um ciclo. Na Figura 7, apresenta-se, como exemplo, a partir da Figura 4, a separação de um intervalo de tempo (em vermelho) em que ocorre a repetição de ciclo para uma nota tocada num violino. Uma vez separado o ciclo a ser estudado, utilizaram-se três diferentes métodos para gerar as séries de Fourier correspondentes ao sinal.

Figura 7 - Intervalo de repetição de ciclo para uma nota de violino.



Fonte: SOLMUSICAL (2012).

A primeira metodologia, para gerar a SF, corresponde ao que se convencionou chamar no trabalho de Método Analítico (MA). Por meio desse método, subdividiu-se o intervalo do ciclo em partes menores e modelaram-se as curvas resultantes dessa subdivisão, utilizando funções interpoladoras polinomiais (interpolação linear ou quadrática). Em seguida, aplicou-se cada uma dessas funções obtidas como $f(t)$ nas equações 1.36 e 1.37, para calcular os coeficientes

a_n e b_n , resolver as integrais resultantes, e gerar a SF para o subintervalo. Por fim, se somaram todas as séries resultantes dos subintervalos para se obter a SF para ciclo completo (mais detalhes no Capítulo 4).

O segundo método utilizado para a obtenção das séries de Fourier dos sinais coletados, chamado no trabalho de Método Analítico-Numérico (MAN), consistiu em aplicar as funções interpoladoras, obtidas conforme descrito acima, calcular seus valores para cada instante t , e aplicar esses valores nas equações para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n (1.36 e 1.37, respectivamente), utilizando métodos numéricos para calcular as integrais resultantes (mais detalhes na Seção 4.1). Uma vez obtidos os valores de a_n e b_n , aplicaram-se na equação 1.35 para a geração da SF.

Por fim, o último método, em razão de utilizar diretamente os dados dos sinais coletados (valores observados), convencionou-se chamá-lo de Método Observacional-Numérico (MON). Esse método é, basicamente, a aplicação direta dos valores dos dados coletados do sinal como $f(t)$ nas equações 1.36 e 1.37. A partir dos valores de a_n e b_n obtidos, gera-se uma nova SF.

CAPÍTULO 4

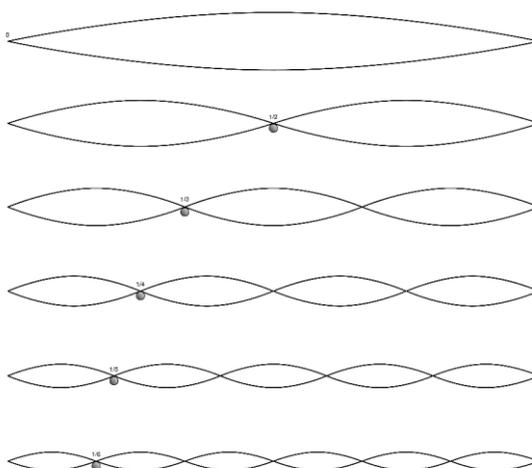
APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente, antes de se realizar o estudo e a modelagem matemática dos sinais coletados das notas tocadas pelos instrumentos musicais escolhidos (flauta doce e violão), decidiu-se fazer um estudo de caso de um pulso de onda numa corda de violão, idealizado para se avaliar a validade e a aplicação da equação da onda linear e se utilizar a SF para decompor o pulso, como forma de exercício e entendimento do MAN, apresentado na Seção 3.3.

4.1 PULSO DE ONDA NUMA CORDA DE VIOLÃO

Conforme especificado acima, para o primeiro estudo de caso de uma onda mecânica associada à música, e de sua modelagem matemática por SF, escolheu-se um pulso de onda propagando-se numa corda de violão, especificamente ao se tocar o sexto harmônico de uma nota Sol. Na Figura 8, é apresentado um desenho que mostra os seis primeiros harmônicos numa corda de violão. A escolha se deu em razão de ser um exemplo de onda transversal relacionado à música, que remete, inclusive, às primeiras observações de Pitágoras com o monocórdio, e por se poder utilizar um modelo matemático conhecido, conforme se descreve a seguir.

Figura 8 - Desenho dos seis primeiros harmônicos na corda de um violão.



Fonte: Wikimedia Commons (2007)⁵.

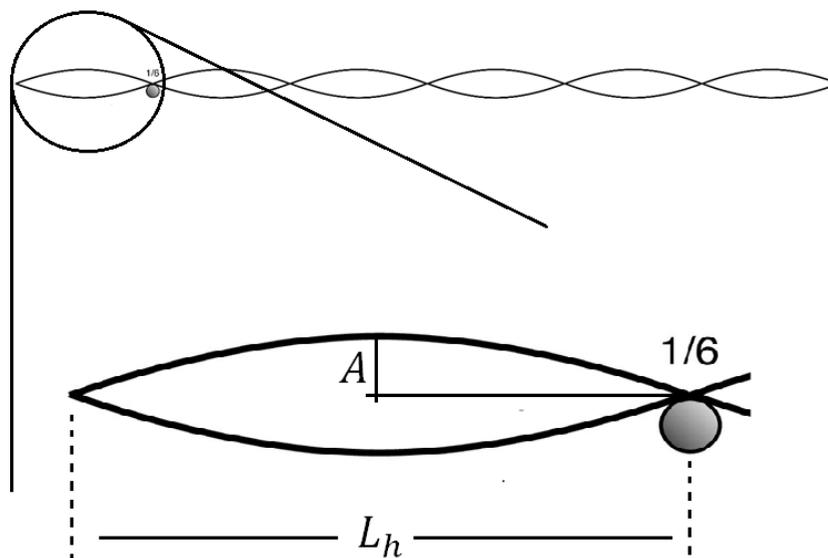
⁵ Wikimedia Commons. Overtone. 2007. Figura de domínio público disponível em: < <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Overtone.jpg> >. Acesso 20 de junho de 2021.

Para este estudo, selecionou-se a seguinte função pulso:

$$y(x, t) = \frac{A}{(kx - \omega t)^2 + 1} \quad (4.1)$$

Para este pulso, as grandezas são relacionadas ao sexto harmônico ($n = 6$) da nota Sol num violão, cuja frequência fundamental (f_1) é igual a 196 Hz. De acordo com as especificações do violão (Di Giorgio modelo *Classic Guitar 28*, com cordas de nylon) e do fabricante da corda, a mesma possui um comprimento padrão (L) de 64,0 cm e uma “carga de afinação” (m_{af} – valor utilizado para estimar a tensão na corda, quando se multiplica pela aceleração da gravidade) igual a 5,35 kg. Por meio de medida simples de comprimentos do sexto harmônico apresentado na Figura 8, conforme é detalhado na Figura 9, verificou-se que a amplitude é 1,8% do comprimento da corda.

Figura 9 - Aproximação do sexto harmônico da Figura 8 e medidas dos comprimentos horizontal do harmônico e da amplitude.



Fonte: Wikimedia Commons (2020).

Dessa forma, as grandezas relacionadas ao pulso, utilizando os valores especificados acima, as equações 1.7, 1.3 e 1.4 e as definições de número de onda (k) e frequência (ω) angulares, apresentadas na Seção 1.3, respectivamente, são conforme se apresenta abaixo:

$$f_1 = 196 \text{ Hz (frequência fundamental)}$$

$L = 64,0$ cm (comprimento da corda)

$A = 1,8\%L = 1,15$ cm (amplitude)

$\lambda = \frac{2L}{n} = 21,3$ cm (comprimento de onda)

$f = nf_1 = 1,18$ kHz (frequência)

$T = \frac{1}{f} = 0,850$ ms (período)

$v = \lambda f = 251$ m / s (velocidade de propagação)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 29,5$ rad / m (número de onda angular)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,39 \times 10^3$ rad / s (frequência angular)

Utilizando os valores obtidos acima, a equação do pulso fica:

$$y(x, t) = \frac{1,15 \times 10^{-2} \text{ m}}{[(29,5 \text{ rad / m})x - (7,39 \times 10^3 \text{ rad / s})t]^2 + 1} \quad (4.2)$$

Na Figura 10a é apresentado o gráfico da função pulso, descrita acima, para diferentes instantes, e na Figura 10b é mostrado o pulso se deslocando, no tempo $t = 0,272$ ms, entre o início e a metade da corda.

Adicionalmente, a título de curiosidade, uma vez que não se encontram com facilidade informações adequadas sobre a densidade linear (μ) de cordas de nylon, pode-se estimá-la por meio da aplicação da equação 1.8, conforme segue:

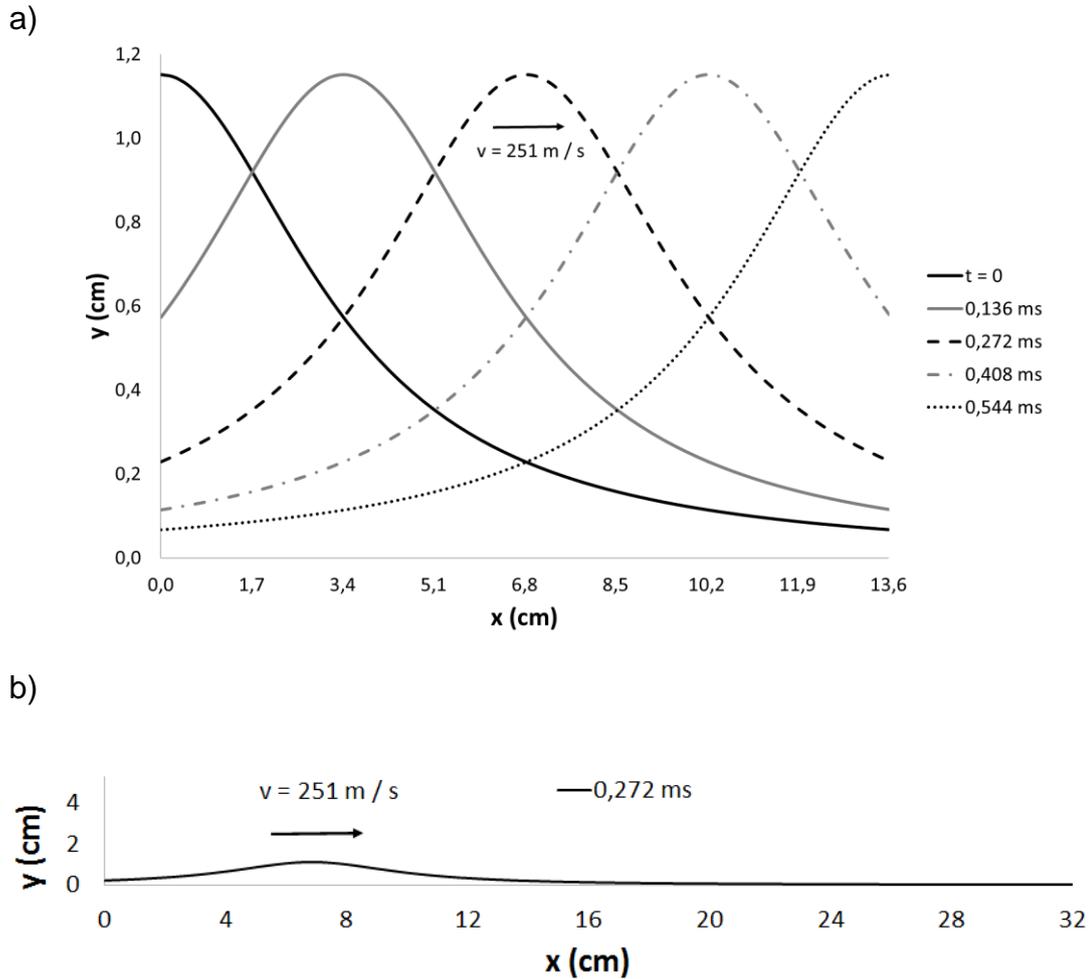
$$\mu = \frac{F_t}{v^2} = \frac{m_{af}g}{v^2} = 0,833 \text{ g / m}$$

Como primeira parte do estudo, procurou-se fazer a demonstração de que a função de onda do pulso satisfaz a equação da onda linear. Dessa forma, seguiram-se os passos descritos abaixo:

(i) Derivou-se, por duas vezes, em relação à posição x , a equação 3.1:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 2A \left\{ \frac{3(kx - \omega t)^2 - 1}{[(kx - \omega t)^2 + 1]^3} \right\} \quad (4.3)$$

Figura 10 - Gráfico da função pulso: a) para diferentes instantes; b) deslocando-se na corda.



Fonte: Do autor (2021).

(ii) Derivou-se, por duas vezes, em relação ao tempo t , a equação 3.1:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 2A \left\{ \frac{3(kx - \omega t)^2 - 1}{[(kx - \omega t)^2 + 1]^3} \right\} \quad (4.4)$$

(iii) Multiplicou-se a equação 4.4 por $1/v^2$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{1}{v^2} = \frac{\omega^2}{v^2} 2A \left\{ \frac{3(kx - \omega t)^2 - 1}{[(kx - \omega t)^2 + 1]^3} \right\} \quad (4.5)$$

Como $k = \omega/v$, das equações 4.3 e 4.5, tem-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

em que é a equação da onda linear. Dessa forma, se verifica que não somente as funções de onda harmônicas (formadas pela combinação de senos e cossenos, conforme apresentado na Seção 1.3) satisfazem a equação da onda linear, mas qualquer sinal que tenha a característica de uma onda linear, ou seja, que satisfaça o princípio da superposição de ondas (Seção 1.2).

A segunda parte do estudo foi a modelagem por SF do pulso de onda, utilizando o MAN. Para tal, escolheu-se o instante $t = T/2 = 0,425$ ms e decidiu-se utilizar dez harmônicos na série, pois foi a quantidade para a qual os resultados obtidos já apresentaram uma aproximação muito boa. Por conseguinte, as demais aplicações da modelagem por SF, apresentadas nas próximas Seções, seguem este mesmo padrão de dez harmônicos.

Fazendo uma adaptação das equações 1.32, 1.33 e 1.34, para o comprimento de repetição $2l = \lambda$, obtém-se:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{10} [a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)] \quad (4.7)$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} y(x, t) \cos(nkx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (4.8)$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} y(x, t) \sin(nkx) dx, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.9)$$

Substituindo a função pulso 4.1 nas equações 4.8 e 4.9 e calculando a_0 separadamente, tem-se:

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{A}{(kx - \omega t)^2 + 1} dx \quad (4.10)$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{A}{(kx - \omega t)^2 + 1} \cos(nkx) dx, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.11)$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{A}{(kx - \omega t)^2 + 1} \sin(nkx) dx, \quad n = 1, 2, \dots, 10 \quad (4.12)$$

Dada a dificuldade para se efetuar a integração analítica das equações 4.11 e 4.12, uma vez que foram tentadas diferentes técnicas, inclusive com o auxílio de tabelas de integrais, mas não se obteve sucesso, realizou-se a integração analítica apenas de 4.10 e se aplicaram duas técnicas de integração numérica distintas para a obtenção dos coeficientes a_n e b_n . Dessa forma, realizando a integração analítica da equação 4.12, obtém-se:

$$a_0 = \frac{A}{\pi} [\text{arctg}(2\pi - \omega t) + \text{arctg}(\omega t)] \quad (4.13)$$

Para o instante $t = T/2 = 0,425$ ms, a SF 4.7, já com o valor calculado de a_0 , fica:

$$F(x) = 0,463 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{10,65} x\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{10,65} x\right) \right] \quad (4.14)$$

Para o cálculo das integrais das equações 4.11 e 4.12, como forma de teste de aproximação, utilizaram-se os seguintes métodos: (i) somatório discreto, dividindo o comprimento de onda em 100 partes iguais; (ii) aproximação numérica por trapézios. Utilizando o somatório discreto, as equações 4.11 e 4.12 podem ser reescritas da seguinte forma:

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y(x_i, t) \cos(nkx_i) = \frac{2A}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\cos(nkx_i)}{(kx_i - \omega t)^2 + 1} \quad (4.15)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N y(x_i, t) \text{sen}(nkx_i) = \frac{2A}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\text{sen}(nkx_i)}{(kx_i - \omega t)^2 + 1} \quad (4.16)$$

nas quais $N (= 100)$ é o número total de dados contidos no comprimento de repetição $2l = \lambda$ e $y(x_i, t)$ são os valores da função pulso pela aplicação de cada x_i entre 0 e λ , para um determinado instante t .

Na Tabela 2, seguem os valores dos coeficientes da SF, obtidos por meio das equações 4.15 e 4.16, para $t = T/2 = 0,425$ ms e $n = 1$ a 10.

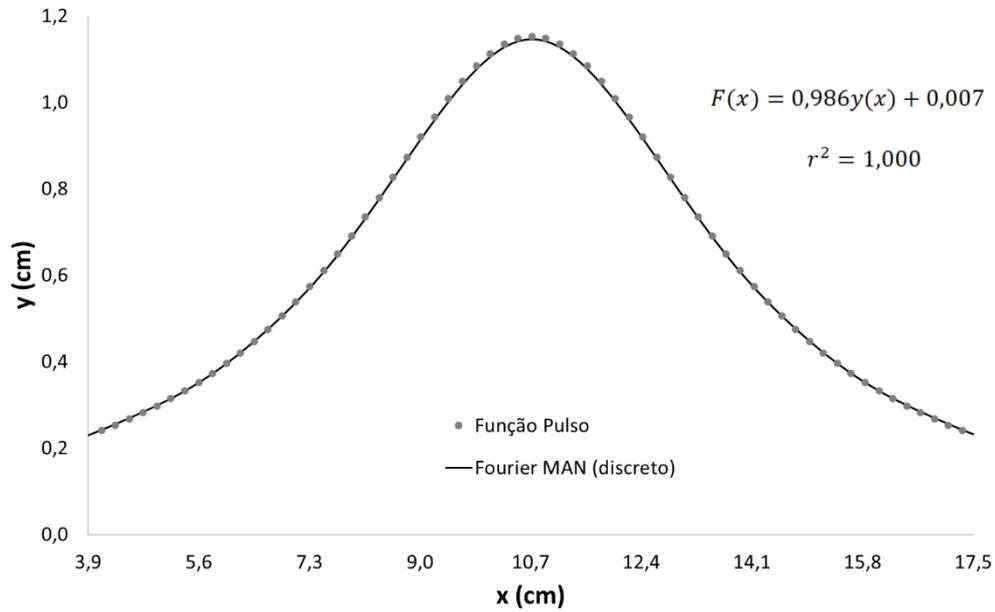
Tabela 2 - Coeficientes da SF, obtidos pelas equações 4.15 e 4.16, para $t = T/2 = 0,425$ ms.

n	a_n	b_n
1	-0,441	0,00
2	0,148	0,00
3	$-5,86 \times 10^{-2}$	0,00
4	$2,07 \times 10^{-2}$	0,00
5	$-7,09 \times 10^{-3}$	0,00
6	$3,87 \times 10^{-3}$	0,00
7	$2,72 \times 10^{-4}$	0,00
8	$1,87 \times 10^{-3}$	0,00
9	$1,47 \times 10^{-3}$	0,00
10	$1,75 \times 10^{-3}$	0,00

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 11, são apresentados os gráficos da função pulso original (4.1) e da SF (4.14), gerada pelo cálculo dos coeficientes a_n e b_n por meio das equações 4.15 e 4.16. Adicionalmente, são apresentados, na Figura 11 (canto superior direito), os resultados da regressão linear por mínimos quadrados, por meio da equação de regressão ($y = ax + b$) e do coeficiente de determinação (r^2) entre os valores calculados pela função pulso (4.1) e aqueles obtidos pela SF (4.14). Os resultados ideais ocorrem quando os coeficientes angular (a), linear (b) e de determinação são iguais a, respectivamente, 1,0, 0,0 e 1,0. Dessa forma, por meio da Figura 9, verifica-se que a modelagem, via cálculo numérico, utilizando o somatório discreto para os coeficientes a_n e b_n , apresentou um resultado bastante aproximado da função original, tanto visualmente quanto pelos valores dos coeficientes de regressão: $a = 0,986$, $b = 0,007$ e $r^2 = 1,000$.

Figura 11 - Gráficos da função pulso original e da SF gerada via MAN por somatório discreto.



Fonte: Do autor (2021).

Utilizando o segundo método numérico escolhido para efetuar o cálculo das integrais 4.11 e 4.12, isto é, a aproximação por trapézios, pode-se reescrevê-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{i=1}^N [y(x_i, t) \cos(nkx_i) + y(x_{i-1}, t) \cos(nkx_{i-1})] \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} \\
 &= \frac{2A}{\lambda} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\cos(nkx_i)}{(kx_i - \omega t)^2 + 1} + \frac{\cos(nkx_{i-1})}{(kx_{i-1} - \omega t)^2 + 1} \right] \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{i=1}^N [y(x_i, t) \operatorname{sen}(nkx_i) + y(x_{i-1}, t) \operatorname{sen}(nkx_{i-1})] \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} \\
 &= \frac{2A}{\lambda} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\operatorname{sen}(nkx_i)}{(kx_i - \omega t)^2 + 1} + \frac{\operatorname{sen}(nkx_{i-1})}{(kx_{i-1} - \omega t)^2 + 1} \right] \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

nas quais $N (= 100)$ é o número total de dados contidos no comprimento de repetição $2l = \lambda$ (gerando 100 áreas de trapézio) e seus valores são calculados para cada x_i entre 0 e λ , para um determinado instante t .

Na Tabela 3, seguem os valores dos coeficientes da SF, obtidos por meio das equações 4.17 e 4.18, para $t = T/2 = 0,425$ ms e $n = 1$ a 10.

Tabela 3 - Coeficientes da SF, obtidos pelas equações 4.17 e 4.18, para $t = T/2 = 0,425$ ms.

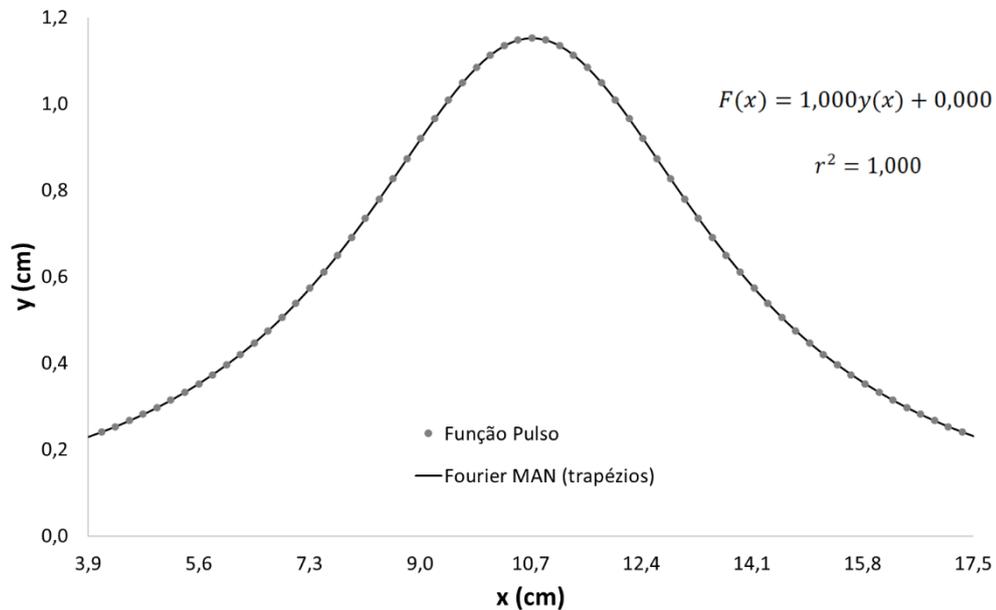
n	a_n	b_n
1	-0,448	0,00
2	0,148	0,00
3	$-6,13 \times 10^{-2}$	0,00
4	$1,88 \times 10^{-2}$	0,00
5	$-9,28 \times 10^{-3}$	0,00
6	$1,79 \times 10^{-3}$	0,00
7	$-1,85 \times 10^{-3}$	0,00
8	$-2,28 \times 10^{-4}$	0,00
9	$-6,31 \times 10^{-4}$	0,00
10	$-3,47 \times 10^{-4}$	0,00

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 12, são apresentados os gráficos da função pulso original 3.2 e da SF 3.13, gerada pelo cálculo dos coeficientes a_n e b_n por meio das equações 3.16 e 3.17, juntamente com os resultados da regressão linear por mínimos quadrados ($y = ax + b$ e r^2). Assim, verifica-se que a modelagem, via cálculo numérico por método dos trapézios, apresentou um resultado praticamente correspondente à função original, pois os valores dos coeficientes de regressão, que foram: $a = 1,000$, $b = 0,000$ e $r^2 = 1,000$, são os melhores resultados possíveis. Portanto, apesar do método por somatório discreto resultar numa aproximação muito boa da função original, o método dos trapézios provou ser mais adequado, quando se busca uma melhor representação da função de interesse. Este já era um resultado esperado, pois o erro associado à aproximação por somatório discreto é, geralmente, maior que pelo método dos trapézios, uma vez que o cálculo dos subintervalos das integrais se dá por meio de retângulos.

Como resultado desse teste, quando se discutirem métodos que envolvam cálculo numérico das integrais dos coeficientes da SF, nas próximas Seções, terá sido utilizada a integração numérico pelo método dos trapézios.

Figura 12 - Gráficos da função pulso original e da SF gerada via MAN por método dos trapézios.



Fonte: Do autor (2021).

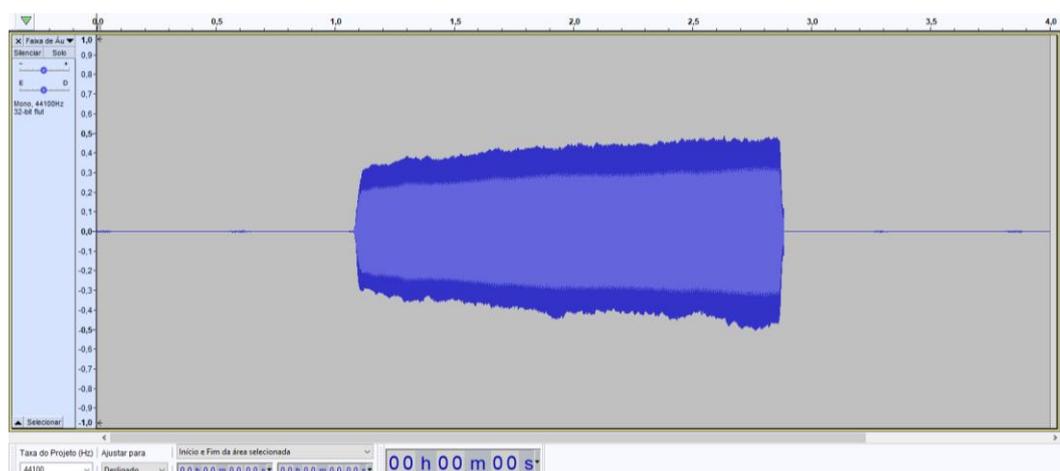
4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SOM COLETADO DA FLAUTA DOCE

O áudio da nota Sol foi capturado e expresso conforme se apresenta na Figura 13. O tempo total de reprodução do som selecionado foi de, aproximadamente, quatro segundos, sendo o suficiente para que o sinal pudesse ser analisado com o grau de detalhamento adequado.

Para a estimativa da frequência (f), a partir dos dados coletados, foi selecionado o intervalo entre 2,94 e 2,95 s, conforme se mostra na Figura 14. Para este intervalo contaram-se, aproximadamente, sete repetições de sinal (oscilações) inteiras e uma quase completa. Para calcular a frequência, dividiu-se o número de oscilações (aproximadamente 7,8) pelo intervalo de tempo ($2,95 - 2,94 = 1,00 \times 10^{-2}$ s), resultando no valor aproximado da frequência da nota, ou seja:

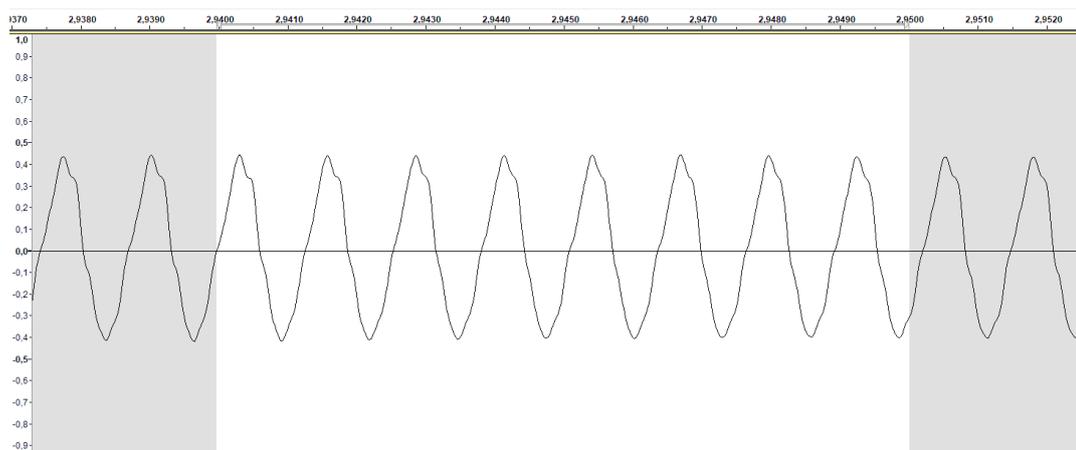
$$f = \frac{7,8}{1,00 \times 10^{-2}} = 780 \text{ Hz}$$

Figura 13 - Áudio capturado pelo software Audacity da nota Sol (783 Hz) da flauta doce.



Fonte: Do autor (2021).

Figura 14 - Gráfico das repetições de sinal da nota Sol (783 Hz) num intervalo de $1,00 \times 10^{-2}$ s com aproximadamente 7,8 oscilações.



Fonte: Do autor (2021).

Com o valor de frequência, obtido acima, e informações adicionais sobre as características médias do ar da cidade de Manaus (como temperatura e massa específica), é possível se estimar outras grandezas associadas à propagação da onda sonora gerada pelo toque da nota Sol em análise. Utilizando a equação 1.12 e o valor da temperatura média anual da cidade de Manaus ($\bar{\theta} = 27,0 \text{ }^\circ\text{C}$)⁶, a velocidade de propagação dessa onda sonora é igual a:

⁶ INMET. Instituto Nacional de Meteorologia «Banco de dados meteorológicos». Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Predefini%C3%A7%C3%A3o:Tabela_clim%C3%A1tica_de_Manus> Acesso em: 14 de novembro de 2020.

$$v = 331 \cdot \sqrt{1 + \frac{27,0}{273,15}} = 347 \text{ m / s}$$

Dessa forma, pela equação 1.4, o comprimento de onda é:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{347}{780} = 44,5 \text{ cm}$$

Adicionalmente, com os valores mínimo e máximo de intensidade registrados pelo *Audacity* (em decibéis), pode-se fazer o cálculo dessas intensidades em W / m^2 , por meio da equação 1.6 e obter as amplitudes mínimas e máximas em termos de deslocamento e pressão, utilizando as equações 1.17 e 1.19. Para o sinal coletado da nota Sol tocada pela flauta doce, os valores mínimo e máximo de intensidade foram, respectivamente, $\beta_{mín} = 65,68 \text{ dB}$ e $\beta_{máx} = 111,29 \text{ dB}$. Dessa forma, tem-se, para as intensidades, em W / m^2 , os seguintes valores mínimo e máximo:

$$I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow \begin{cases} I_{mín} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{65,68}{10}} = 3,70 \mu W / m^2 \\ I_{máx} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{111,29}{10}} = 134 \text{ mW} / m^2 \end{cases}$$

Considerando a massa específica do ar para o nível do mar, a uma temperatura de $27,0 \text{ }^\circ\text{C}$ e umidade relativa de $80,0 \%$ ($\bar{\rho} = 1,16 \text{ kg} / m^3$)⁷, como representativa para o ar da cidade de Manaus, as amplitudes, em termos de deslocamento e pressão, mínimas e máximas, respectivamente, são iguais a:

$$S = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} \Rightarrow \begin{cases} S_{mín} = \frac{1}{2\pi \cdot 780} \sqrt{\frac{2 \cdot 3,70 \times 10^{-6}}{1,16 \cdot 347}} = 2,77 \text{ nm} \\ S_{máx} = \frac{1}{2\pi \cdot 780} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,34 \times 10^{-1}}{1,16 \cdot 347}} = 5,27 \mu m \end{cases}$$

⁷ A., Picard, R.S., Davis, M., Gläser and K., Fujii (CIPM-2007). Revised formula for the density of moist air. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Densidade_do_ar>. Acesso em: 28 de junho de 2021.

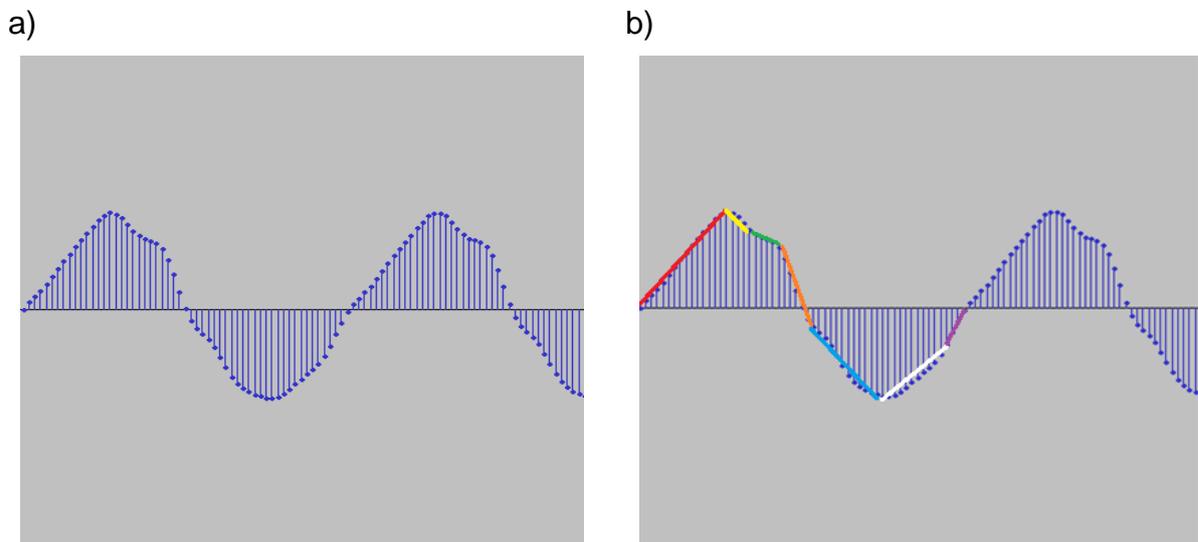
$$\Delta P = \rho v \omega S = \rho v 2\pi f S \Rightarrow \begin{cases} \Delta P_{\text{mín}} = 1,16 \cdot 347 \cdot 2\pi \cdot 780 \cdot 2,77 \times 10^{-9} = 5,46 \text{ mPa} \\ \Delta P_{\text{máx}} = 1,16 \cdot 347 \cdot 2\pi \cdot 780 \cdot 5,27 \times 10^{-6} = 10,4 \text{ Pa} \end{cases}$$

4.2.1 INTERPOLAÇÃO LINEAR DO SINAL

A utilização da SF, por meio do método analítico, necessita de, pelo menos, uma função (ou um conjunto delas) que descreva a oscilação do sinal para um determinado período e, assim, ser possível obter os coeficientes e escrever a expressão da série. Visualmente, o sinal coletado da nota Sol da flauta doce, e separado na Figura 15, tem características semelhantes a uma senoide, e as suas pequenas diferenças, em relação a função seno, determinam o seu timbre, distinguindo a flauta de outros instrumentos.

Para a obtenção das funções a serem utilizadas para o cálculo dos coeficientes da SF, foram realizadas interpolações lineares do sinal em determinados intervalos através do período (T).

Figura 15 - Gráficos do sinal capturado do som da flauta doce: a) sinal original; b) sinal com segmentos para interpolação linear.



Fonte: Do autor (2021)

A Figura 15b mostra como cada interpolação foi definida para cada intervalo de tempo entre 0 e T . A interpolação linear foi escolhida como um meio mais simples de se calcularem as integrais dos coeficientes de Fourier, dadas pelas equações 1.33 e 1.34, e em razão de os erros relacionados à interpolação apresentarem

valores absolutos pequenos (por causa do expoente 1), algo que não ocorreria se se utilizassem interpolações quadráticas ou exponenciais.

Para uma visualização mais organizada dos dados e resultados e a simplificação nos procedimentos de cálculo, os valores de tempo e amplitude do sinal coletado foram adaptados. Dessa forma, o tempo é apresentado em décimo de milésimo (10^{-4}) de segundo, e a amplitude em centésimo (10^{-2}) de unidade arbitrária (ua – unidade apresentada pelo *Audacity*, conforme descrito na Seção 3.2). Essa forma de apresentação de dados e resultados será mostrada daqui para frente no trabalho, nas equações, nos gráficos e nas tabelas.

A interpolação foi realizada a partir dos dados exportados do *Audacity* e salvos em documento de texto simples (.txt). Buscando melhores resultados, aproximou-se tanto quanto se podia as interpolações lineares dos segmentos do gráfico original do sinal. A obtenção das funções interpoladoras se deu por meio das ferramentas do *software* pago Microsoft Excel. Primeiramente, gerou-se um gráfico de dispersão com os dados coletados e, posteriormente, adicionou-se uma linha de tendência, marcando a opção de exibição da equação de regressão no gráfico, juntamente com o coeficiente de determinação (r^2), para se verificar o ajuste da reta ao conjunto de dados selecionado.

As funções $j_{1k}(t)$, obtidas por meio de interpolação linear, para sete diferentes intervalos de tempo entre 0 e o período $T (= 12,2 \times 10^{-4} \text{ s})$, como aproximação do sinal $q(t)$ da flauta, são da forma apresentada abaixo, com seus respectivos coeficientes lineares e angulares dados na Tabela 4.

$$j_{1k}(t) = A_k + B_k t, \quad k = 1, 2, 3 \dots 7 \quad (4.19)$$

Na Tabela 5, são apresentados os valores dos limites (que definem os intervalos de tempo) para cada uma das sete funções interpoladoras, utilizados, na próxima Seção, para o cálculo dos coeficientes da SF.

Na Figura 16, é apresentado o gráfico com um ciclo do sinal, $q(t)$, originalmente coletado da flauta e as funções interpoladoras, $j_{1k}(t)$, para cada intervalo de tempo, juntamente com os resultados da correlação entre os dados e as funções (coeficientes angular e linear da equação no gráfico e r^2).

Tabela 4 - Valores dos coeficientes angular e linear das funções interpoladoras.

k	A_k	B_k
1	-0,619	11,6
2	76,8	-10,9
3	35,2	-1,63
4	163	-25,8
5	72,9	-11,8
6	-108	7,44
7	-299	24,0

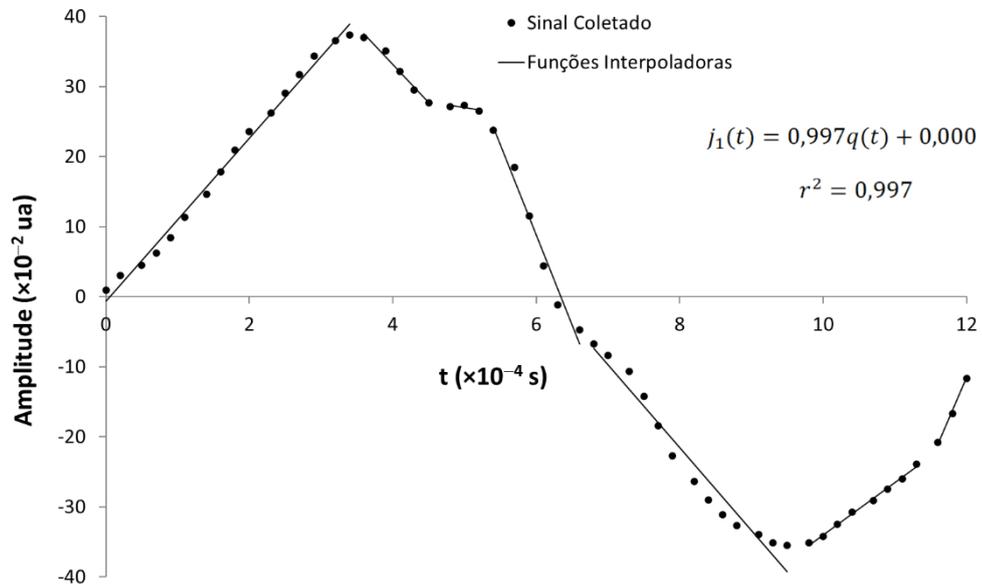
Fonte: Do autor (2021).

Tabela 5 - Limites de intervalos de tempo para as funções interpoladoras.

k	$t_{k-1} (\times 10^{-4} \text{ s})$	$t_k (\times 10^{-4} \text{ s})$
1	0,0	3,4
2	3,4	4,5
3	4,5	5,4
4	5,4	6,6
5	6,6	9,5
6	9,5	11,6
7	11,6	12,2

Fonte: Do autor (2021).

Figura 16 - Gráfico do sinal coletado e das funções interpoladoras de primeiro grau para a flauta.



Fonte: Do autor (2021).

4.2.2 MÉTODO ANALÍTICO

Utilizando as funções de primeiro grau 4.19, com seus coeficientes angulares e lineares apresentados na Tabela 4, o cálculo dos coeficientes da SF, a partir das equações 1.36 e 1.37, fica da seguinte forma:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 \int_{t_{k-1}}^{t_k} j_{1k}(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_k + B_k t) \cos(n\omega t) dt, \quad \text{com } t_0 = 0 \text{ e } t_7 = T \quad (4.20)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sen(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 \int_{t_{k-1}}^{t_k} j_{1k}(t) \sen(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_k + B_k t) \sen(n\omega t) dt, \quad \text{com } t_0 = 0 \text{ e } t_7 = T \quad (4.21)$$

Após o cálculo das integrais 4.20 e 4.21, os coeficientes são dados pelas seguintes equações:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 \left[A_k(t_k - t_{k-1}) + \frac{B_k}{2}(t_k^2 - t_{k-1}^2) \right] \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 & \left\{ \frac{A_k}{n\omega} [\text{sen}(n\omega t_k) - \text{sen}(n\omega t_{k-1})] \right. \\ & + \frac{B_k}{n\omega} \left[t_k \text{sen}(n\omega t_k) \right. \\ & \left. \left. - t_{k-1} \text{sen}(n\omega t_{k-1}) + \frac{1}{n\omega} (\cos(n\omega t_k) - \cos(n\omega t_{k-1})) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^7 & \left\{ \frac{A_k}{n\omega} [\cos(n\omega t_{k-1}) - \cos(n\omega t_k)] \right. \\ & + \frac{B_k}{n\omega} \left[t_{k-1} \cos(n\omega t_{k-1}) \right. \\ & \left. \left. - t_k \cos(n\omega t_k) + \frac{1}{n\omega} (\text{sen}(n\omega t_k) - \text{sen}(n\omega t_{k-1})) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Para as quais $t_0 = 0$ e $t_7 = T$. Por conseguinte, a SF para esta modelagem com funções de primeiro grau, utilizando a equação 1.35 e considerando dez harmônicos, assume a seguinte forma:

$$F(t) = 0,134 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{6,1}t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{6,1}t\right) \right] \quad (4.25)$$

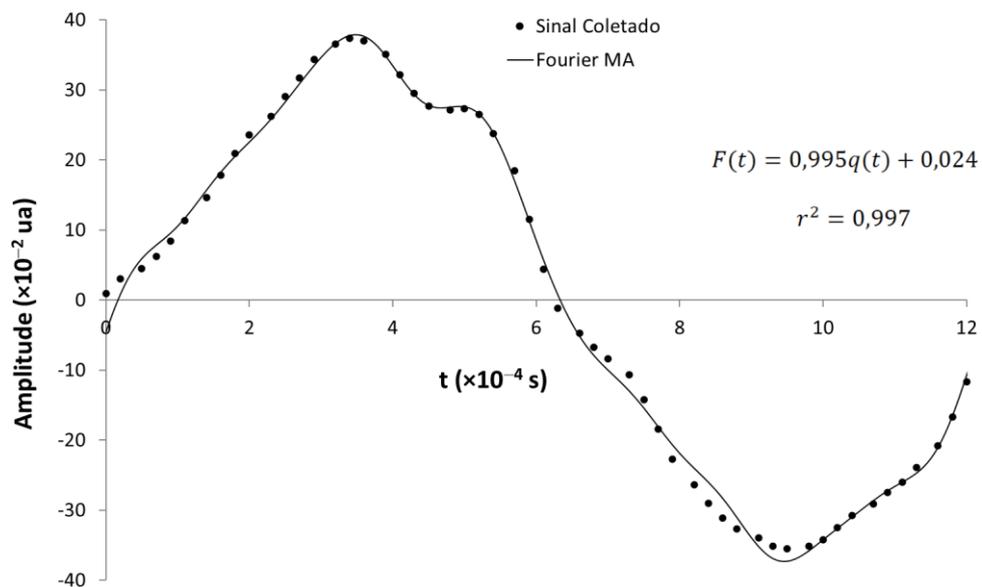
Na Tabela 6, seguem os valores dos coeficientes da SF para $n = 1$ a 10.

Na Figura 17, é apresentado o gráfico com a SF, gerada analiticamente, em comparação ao sinal coletado, assim como os resultados da correlação entre a SF obtida por MA e o sinal (coeficientes $a = 0,995$, $b = 0,024$ e $r^2 = 0,997$), verificando-se uma excelente correspondência entre o modelo matemático obtido e os dados.

Tabela 6 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MA.

n	a_n	b_n
1	-7,75	34,1
2	0,257	$-6,38 \times 10^{-2}$
3	1,38	0,836
4	0,216	$-6,55 \times 10^{-2}$
5	$-6,63 \times 10^{-2}$	2,53
6	$-4,64 \times 10^{-2}$	-0,196
7	1,25	0,568
8	-0,149	0,260
9	$7,90 \times 10^{-2}$	0,201
10	0,222	0,253

Fonte: Do autor (2021).

Figura 17 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MA para a flauta.

Fonte: Do autor (2021).

4.2.3 MÉTODO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Pode-se gerar uma nova SF, combinando-se as funções analíticas 4.19, geradas pela interpolação linear do sinal, e segundo método numérico utilizado para a solução das integrais dos coeficientes da SF, apresentado e testado na Seção 4.1, ou seja, a aproximação por trapézios. Essa combinação de função analítica com solução numérica das integrais 1.36 e 1.37, para o cálculo de a_n e b_n , é o que se convencionou chamar de MAN, conforme mencionado na Seção 3.3. Sendo assim, dividindo-se o período $T (= 12,2 \times 10^{-4} \text{ s})$ em $N (= 122)$ passos, de mesmo tamanho ($\Delta t = T/122$), os coeficientes da SF, aplicando o MAN nas equações 1.36 e 1.37 e apresentando a_0 separadamente, são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i) + (A_k + B_k t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.26)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i) \cos(n\omega t_i) + (A_k + B_k t_{i-1}) \cos(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.27)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i) \text{sen}(n\omega t_i) + (A_k + B_k t_{i-1}) \text{sen}(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.28)$$

para as quais os valores de k , que variam de acordo com a função interpoladora específica para cada intervalo de tempo, são dados na Tabela 7, com os respectivos valores iniciais e finais do índice i (que representa cada passo de integração).

Como resultado do MAN, considerando dez harmônicos, a SF assume a seguinte forma:

$$F(t) = 0,112 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{6,1} t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{6,1} t\right) \right] \quad (4.29)$$

Na Tabela 8, seguem os valores dos coeficientes da SF para $n = 1$ a 10.

Tabela 7 - Valores iniciais e finais do índice i para cada k das funções interpoladoras de primeiro grau.

k	i
1	1 a 34
2	35 a 45
3	46 a 54
4	55 a 66
5	67 a 95
6	96 a 116
7	117 a 122

Fonte: Do autor (2021).

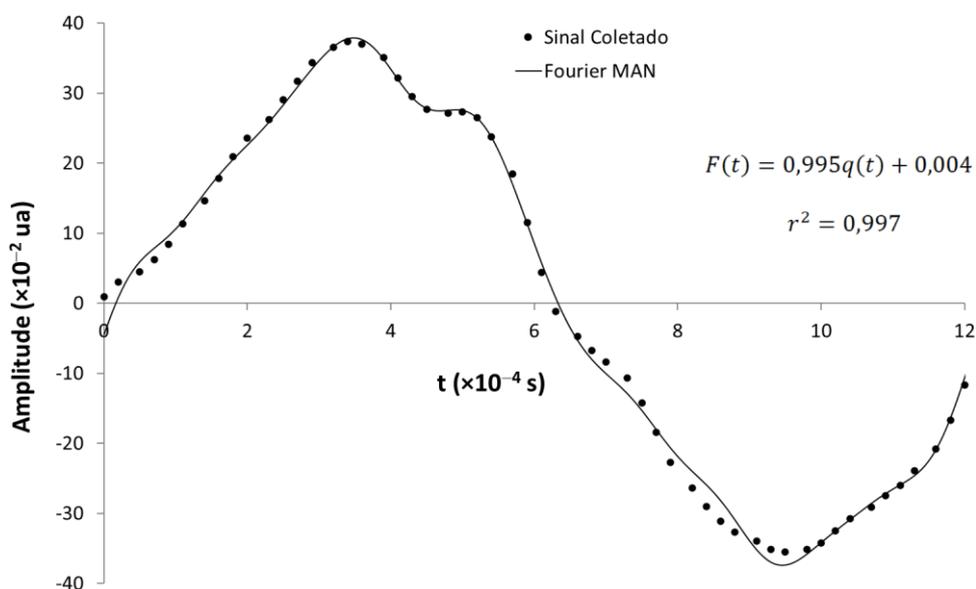
Tabela 8 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MAN.

n	a_n	b_n
1	-7,72	34,1
2	0,256	$-5,73 \times 10^{-2}$
3	1,41	0,816
4	0,199	$-8,55 \times 10^{-2}$
5	$-7,63 \times 10^{-2}$	2,53
6	$-3,01 \times 10^{-2}$	-0,194
7	1,24	0,567
8	-0,132	0,224
9	$3,76 \times 10^{-2}$	0,207
10	0,240	0,253

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 18, é apresentado o gráfico com a SF, obtida pela aplicação do MAN, em comparação ao sinal coletado, além dos resultados da correlação entre a SF-MAN e o sinal (coeficientes $a = 0,995$, $b = 0,004$ e $r^2 = 0,997$), obtendo-se uma correspondência muito alta entre o modelo matemático resultante e os dados. Adicionalmente, observa-se que esse resultado é muito próximo ao obtido pela aplicação do MA, com valores dos coeficientes a_n e b_n muito parecidos entre os métodos, conforme se verifica pela comparação das Tabelas 7 e 8, e coeficientes de regressão praticamente idênticos, havendo, apenas, uma melhora no coeficiente linear (de 0,024 do MA para 0,004 do MAN), conforme se verifica pela comparação entre as Figuras 17 e 18.

Figura 18 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MAN para a flauta.



Fonte: Do autor (2021).

4.2.4 MÉTODO OBSERVACIONAL-NUMÉRICO

O terceiro método, utilizado para se obter a SF do sinal coletado do som da flauta, aplica, diretamente, os valores dos dados, $q(t)$, como a função $f(t)$ nas equações 1.36 e 1.37, e, novamente, se usa o método dos trapézios para se calcularem as integrais dos coeficientes da SF. Exatamente em razão dessa combinação de dados (valores observados – $q(t)$) com cálculo numérico das integrais, convencionou-se chama-lo de MON.

Seguindo uma metodologia semelhante ao MAN, apenas com a substituição das funções analíticas $j_{1k}(t)$ pelos valores observados do sinal coletado $q(t)$, nas equações 4.26, 4.27 e 4.28, os coeficientes da SF são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [q(t_i) + q(t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.30)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [q(t_i) \cos(n\omega t_i) + q(t_{i-1}) \cos(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.31)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [q(t_i) \sin(n\omega t_i) + q(t_{i-1}) \sin(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.32)$$

Ao se aplicar o MON (dez harmônicos), obtiveram-se a SF (4.33), com o valor de a_0 já aplicado, e os demais coeficientes ($n = 1$ a 10) apresentados na Tabela 9.

$$F(t) = 9,37 \times 10^{-2} + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{6,1}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{6,1}t\right) \right] \quad (4.33)$$

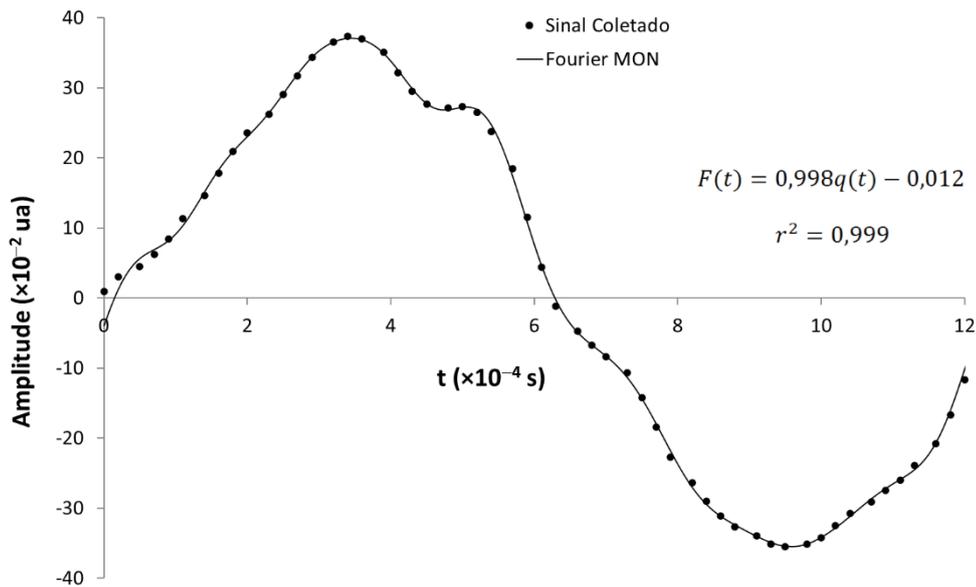
Tabela 9 - Coeficientes da SF para o sinal da flauta pelo MON.

n	a_n	b_n
1	-7,71	34,2
2	0,317	-0,300
3	0,962	0,477
4	0,388	0,207
5	0,848	2,08
6	-0,439	-0,526
7	1,25	1,13
8	$3,75 \times 10^{-2}$	0,123
9	0,378	0,251
10	$-5,54 \times 10^{-2}$	0,330

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 19, é apresentado o gráfico com a SF, resultante do MON, em comparação ao sinal coletado do som da flauta, acompanhado com os resultados da correlação entre a SF-MON e o referido sinal (coeficientes $a = 0,998$, $b = -0,012$ e $r^2 = 0,999$), obtendo-se a melhor correspondência entre modelo matemático e dados do trabalho, para o sinal da flauta.

Figura 19 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MON para a flauta.



Fonte: Do autor (2021).

4.2.5 MODELO HARMÔNICO SIMPLES

Ao se observar, com atenção, o gráfico do sinal coletado do som emitido pela flauta, $q(t)$, como mostrado nas Figuras 16 a 19, verifica-se que o seu formato se aproxima da forma de uma função seno. Adicionalmente, ao se conferir os valores dos coeficientes de Fourier, por meio das Tabelas 6, 8 e 9, observa-se que os valores de a_1 e, especialmente, b_1 , são proporcionalmente bem maiores que os outros coeficientes, indicando o domínio do primeiro harmônico e da semi-série de senos na decomposição do sinal. Dessa forma, resolveu-se testar a aproximação da SF, utilizando o MON, com apenas o primeiro harmônico, caracterizando, assim, a modelagem por Modelo Harmônico Simples (MHS). Consequentemente, pode-se escrever a SF, para apenas um harmônico da seguinte maneira:

$$F_1(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \quad (4.34)$$

Reescrevendo a equação 3.34 na forma mais usual do MHS apresentada na literatura de Física Básica (como, por exemplo, em HALLIDAY ET AL., 2012), enfatizando a função seno, fica-se com:

$$h_1(t) = \bar{h} + H \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (4.35)$$

na qual \bar{h} , H e φ representam, respectivamente, o valor médio, a amplitude e a constante de fase do sinal e se relacionam com as variáveis da equação 4.35 por:

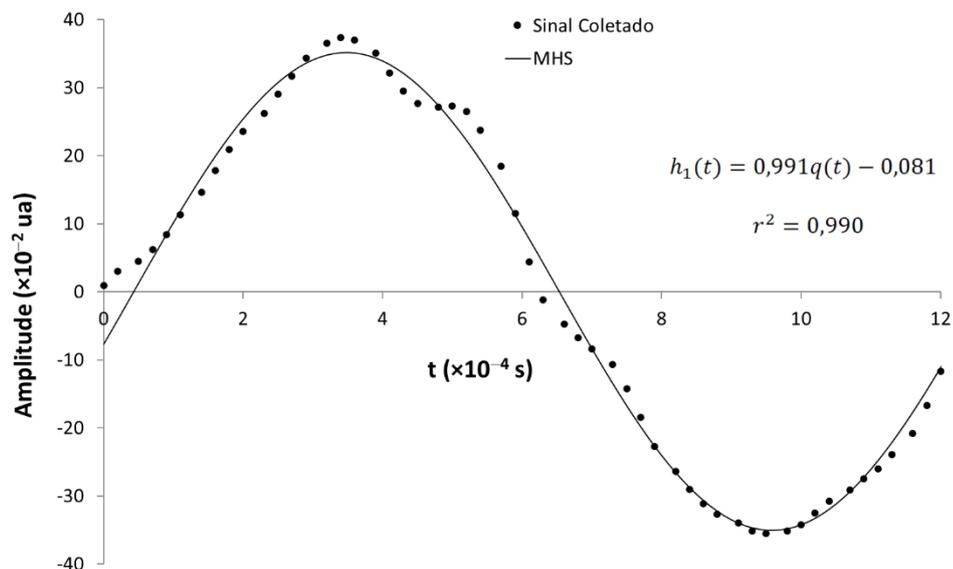
$$\bar{h} = \frac{a_0}{2}, \quad H = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{e} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

Dessa forma, utilizando os valores calculados, a equação 3.35 fica:

$$h_1(t) = 9,37 \times 10^{-2} + 35,1 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6,1}t - 0,221\right) \quad (4.36)$$

A Figura 20 mostra o gráfico para esta modelagem, por meio da qual se verifica que a oscilação senoidal apresenta fase e amplitude bem próximas às do sinal coletado. Além disso, apesar da simplicidade do método, os resultados da correlação entre o MHS e o sinal (coeficientes $a = 0,991$, $b = -0,081$ e $r^2 = 0,990$), apresentam uma correspondência surpreendentemente boa, mostrando a validade dessa modelagem matemática simplificada.

Figura 20 - Gráfico do sinal coletado e da modelagem por MHS para a flauta.

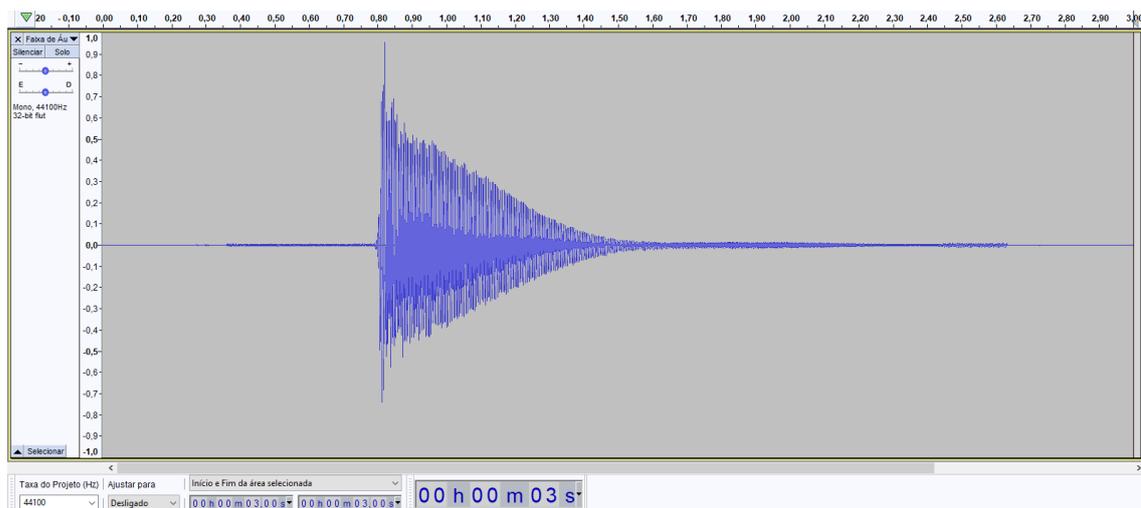


Fonte: Do autor (2021)

4.3 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SOM COLETADO DO VIOLÃO

Com a reprodução da nota Sol no violão, foi obtida a representação gráfica do sinal coletado do som pelo programa *Audacity* em um intervalo de tempo de gravação de três segundos, nas condições já comentadas na Seção 3.3.

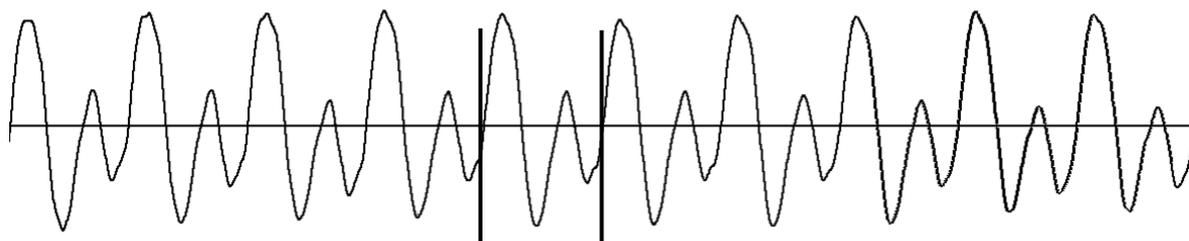
Figura 21 - Captação da nota Sol (196 Hz) emitida pelo violão.



Fonte: Do autor (2021).

Para o estudo do som do violão, foi selecionada uma parte do sinal que se manteve com periodicidade constante, isto é, na fase de sustentação (conforme Covo, 2016) e, portanto, mais favorável à modelagem. Como se pode observar na Figura 21, o som perde a sua intensidade ao longo do tempo (decaimento), modificando, por consequência, o formato do sinal. A Figura 22 ilustra a parte selecionada para a aplicação dos métodos para a obtenção da SF.

Figura 22 - Sinal coletado do violão na fase de sustentação.



Fonte: Do autor (2021).

Realizando a mesma análise, apresentada na Seção 4.2 para a flauta, pode-se obter a velocidade de propagação da onda sonora emitida pela nota Sol do violão, através da equação 1.12, conhecendo o valor da temperatura média da cidade de Manaus $\bar{\theta} = 27,0 \text{ }^\circ\text{C}$, resultando em $v = 347 \text{ m/s}$ (calculado na Seção 4.2). Com a frequência da referida nota, isto é, $f = 196 \text{ Hz}$, e velocidade de propagação obtida, pode-se calcular, por meio da equação 1.4, o comprimento da onda, cujo resultado é:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{347}{196} = 177 \text{ cm}$$

Tendo-se coletado os valores mínimo e máximo de intensidade, em decibéis, através do programa *Audacity*, efetuou-se o cálculo dessas intensidades em W/m^2 , pela equação 1.6, e obteram-se as amplitudes mínimas e máximas, em termos de deslocamento e pressão, utilizando as equações 1.17 e 1.19. Os valores de mínimo e máximo de intensidade para o sinal coletado do violão foram $\beta_{\text{mín}} = 66,69 \text{ dB}$ e $\beta_{\text{máx}} = 107,79 \text{ dB}$. Dessa forma, tem-se, para as intensidades, em W/m^2 , os seguintes valores mínimo e máximo:

$$I = I_0 10^{\frac{\beta}{10}} \Rightarrow \begin{cases} I_{\text{mín}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{66,69}{10}} = 4,67 \text{ } \mu\text{W/m}^2 \\ I_{\text{máx}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{107,79}{10}} = 60,1 \text{ mW/m}^2 \end{cases}$$

Levando em consideração a massa específica do ar para o nível do mar, a uma temperatura de $27,0 \text{ }^\circ\text{C}$ e umidade relativa de $80,0 \%$ ($\bar{\rho} = 1,16 \text{ kg/m}^3$), como representativa para o ar da cidade de Manaus, as amplitudes, em termos de deslocamento e pressão, mínimas e máximas, respectivamente, são iguais a:

$$S = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} \Rightarrow \begin{cases} S_{\text{mín}} = \frac{1}{2\pi \cdot 196} \sqrt{\frac{2 \cdot 4,67 \times 10^{-6}}{1,16 \cdot 347}} = 1,24 \text{ nm} \\ S_{\text{máx}} = \frac{1}{2\pi \cdot 196} \sqrt{\frac{2 \cdot 0,601 \times 10^{-1}}{1,16 \cdot 347}} = 1,40 \text{ } \mu\text{m} \end{cases}$$

$$\Delta P = \rho v \omega S = \rho v 2\pi f S \Rightarrow \begin{cases} \Delta P_{\text{mín}} = 1,16 \cdot 347 \cdot 2\pi \cdot 196 \cdot 1,24 \times 10^{-9} = 0,61 \text{ mPa} \\ \Delta P_{\text{máx}} = 1,16 \cdot 347 \cdot 2\pi \cdot 196 \cdot 1,40 \times 10^{-6} = 0,69 \text{ Pa} \end{cases}$$

4.3.1 INTERPOLAÇÃO QUADRÁTICA DO SINAL

Assim como na interpolação do sinal da flauta, descrita na Seção 4.2.1, houve a necessidade de, pelo menos, uma função analítica que descrevesse o sinal coletado do som emitido pelo violão para, dessa forma, ser aplicada nas equações para o cálculo dos coeficientes da SF. Destarte, analisando-se, visualmente, o gráfico do referido sinal (Figura 23), verificou-se a viabilidade de se realizar sua interpolação por meio de funções de segundo grau, dividindo-o em quatro diferentes intervalos de tempo, entre 0 e o período T . A interpolação quadrática foi selecionada em razão dos segmentos escolhidos se assemelharem muito a parábolas, mesmo com a desvantagem desse tipo de interpolação (segundo grau) apresentar erros que tendem a valores absolutos maiores (potência dois) do que aqueles que surgem no processo de interpolação linear (potência um).

Utilizou-se a mesma adaptação, adotada para o sinal da flauta, para a apresentação dos valores de tempo e amplitude para os dados coletados do violão. Sendo assim, o tempo é expresso em décimo de milésimo (10^{-4}) de segundo, e a amplitude em centésimo (10^{-2}) de ua (unidade arbitrária, já comentada nas Seções 3.2 e 4.2.1).

Após a coleta dos dados pelo programa *Audacity* e a exportação, em documento no formato de texto (.txt), os valores foram inseridos em uma planilha do software *Excel*, extraíndo dela o gráfico de dispersão e determinadas as funções interpoladoras através da função *linha de tendência*. As funções $j_{2k}(t)$, obtidas por meio de interpolação quadrática para quatro diferentes intervalos de tempo entre 0 e o período T ($= 50,8 \times 10^{-4}$ s), como aproximação do sinal do violão, são da forma apresentada abaixo, com seus respectivos termos livres, e coeficientes lineares e quadráticos dados na Tabela 10.

$$j_{2k}(t) = A_k + B_k t + C_k t^2, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.37)$$

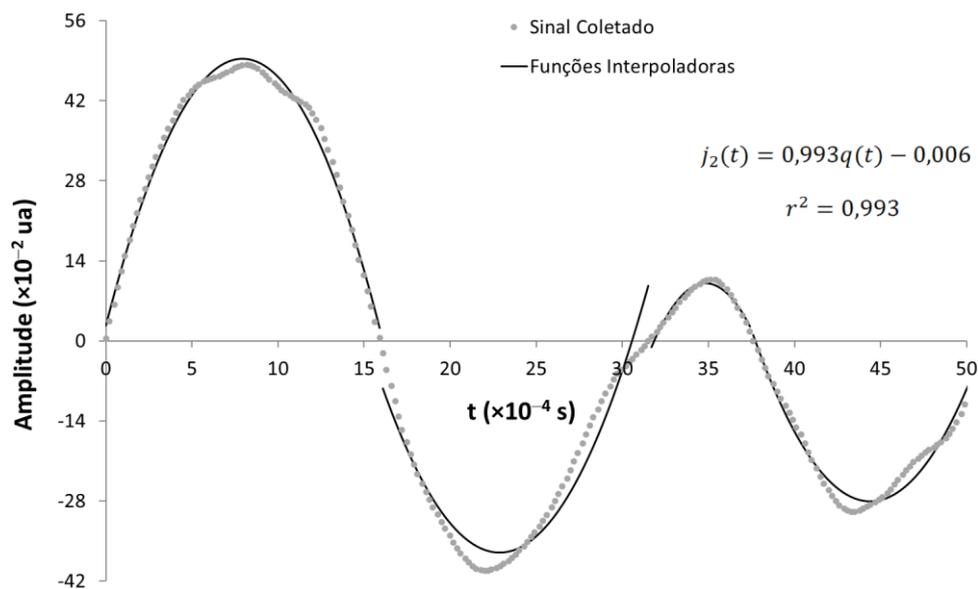
Na Figura 23, são apresentados os gráficos, respectivamente, de um período de repetição do sinal coletado do som emitido pelo violão e das funções interpoladoras, para cada um dos quatro intervalos de tempo definidos.

Tabela 10 - Valores dos coeficientes linear, angular e termo independente das funções interpoladas.

k	A_k	B_k	C_k
1	2,64	11,8	-0,742
2	291	-28,7	0,627
3	$-1,37 \times 10^3$	79,5	-1,14
4	$1,21 \times 10^3$	-56,0	0,630

Fonte: Do autor (2021).

Figura 23 - Gráfico do sinal coletado e das funções interpoladoras de segundo grau para o violão.



Fonte: Do autor (2021).

Na Tabela 11, são apresentados os valores dos limites (que definem os intervalos de tempo) para cada uma das quatro funções interpoladoras, utilizados para o cálculo dos coeficientes da SF, pelo MA, conforme descrito na próxima Seção.

Tabela 11 - Intervalo de tempo para cada função interpoladora.

k	$t_{k-1} (\times 10^{-4} \text{ s})$	$t_k (\times 10^{-4} \text{ s})$
1	0,00	16,1
2	16,1	31,5
3	31,5	37,4
4	37,4	50,8

Fonte: Do autor (2021).

4.3.2 MÉTODO ANALÍTICO

Utilizando as funções de segundo grau, dadas pela equação 4.37, cujos valores dos coeficientes são apresentados na Tabela 10, o cálculo dos coeficientes da SF fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \int_{t_{k-1}}^{t_k} j_{2k}(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\
 &= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_k + B_k t + C_k t^2) \cos(n\omega t) dt, \quad \text{com } t_0 = 0 \text{ e } t_4 = T \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \int_{t_{k-1}}^{t_k} j_{2k}(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\
 &= \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_k + B_k t + C_k t^2) \sin(n\omega t) dt, \quad \text{com } t_0 = 0 \text{ e } t_4 = T \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Após o cálculo das integrais, os coeficientes são dados pelas seguintes equações:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \left[A_k (t_k - t_{k-1}) + \frac{B_k}{2} (t_k^2 - t_{k-1}^2) + \frac{C_k}{3} (t_k^3 - t_{k-1}^3) \right] \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{A_k}{n\omega} [\sin(n\omega t_k) - \sin(n\omega t_{k-1})] \right. \\
+ \frac{B_k}{n\omega} \left[t_k \sin(n\omega t_k) - t_{k-1} \sin(n\omega t_{k-1}) + \frac{1}{n\omega} (\cos(n\omega t_k) - \cos(n\omega t_{k-1})) \right] \\
+ \frac{C_k}{n\omega} \left[t_k^2 \sin(n\omega t_k) \right. \\
- t_{k-1}^2 \sin(n\omega t_{k-1}) + \frac{2}{n\omega} \left(t_k \cos(n\omega t_k) - t_{k-1} \cos(n\omega t_{k-1}) \right) \\
\left. \left. + \frac{1}{n\omega} (\sin(n\omega t_k) - \sin(n\omega t_{k-1})) \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^4 \left\{ \frac{A_k}{n\omega} [\cos(n\omega t_{k-1}) - \cos(n\omega t_k)] \right. \\
+ \frac{B_k}{n\omega} \left[t_{k-1} \cos(n\omega t_{k-1}) - t_k \cos(n\omega t_k) + \frac{1}{n\omega} (\sin(n\omega t_k) - \sin(n\omega t_{k-1})) \right] \\
+ \frac{C_k}{n\omega} \left[t_{k-1}^2 \cos(n\omega t_k) \right. \\
- t_k^2 \cos(n\omega t_{k-1}) + \frac{2}{n\omega} \left(t_k \sin(n\omega t_k) - t_{k-1} \sin(n\omega t_{k-1}) \right) \\
\left. \left. + \frac{1}{n\omega} (\cos(n\omega t_k) - \cos(n\omega t_{k-1})) \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Para as quais $t_0 = 0$ e $t_4 = T$. Por conseguinte, a SF para esta modelagem com funções de segundo grau, utilizando a equação 1.35 e considerando dez harmônicos, assume a seguinte forma:

$$F(t) = -0,890 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{25,4} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{25,4} t\right) \right] \tag{4.43}$$

Na Tabela 12, seguem os valores dos coeficientes da SF para $n = 1$ a 10. Na Figura 24, é apresentado o gráfico com a SF, gerado pelo MA, em comparação ao sinal coletado. Apesar de pequenas diferenças entre os dados, em alguns pontos, obteve-se um bom resultado, tendo em vista a integração de funções quadráticas.

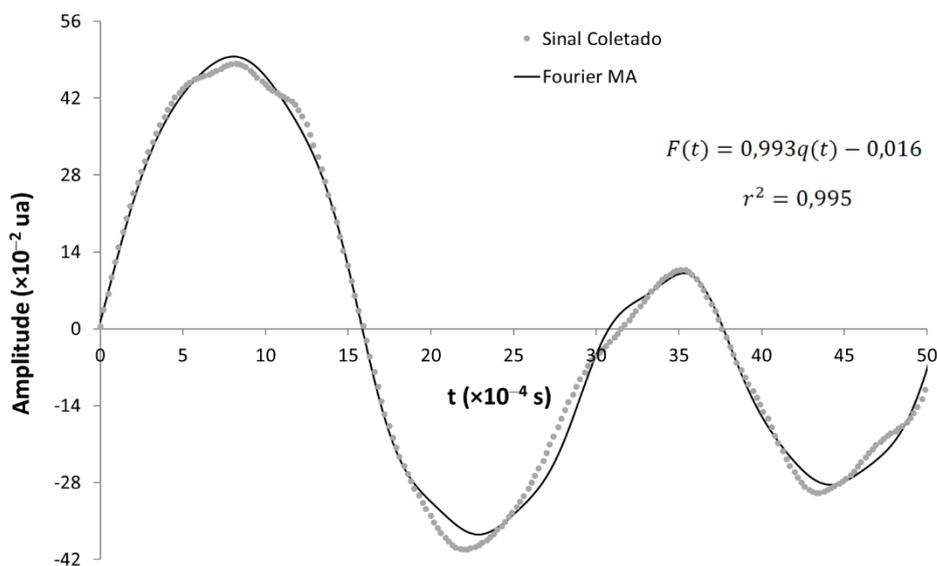
Os coeficientes da regressão, por mínimos quadrados, realizada entre os dados coletados e os da modelagem por MA, apresentaram valores próximos aos ideais ($a = 0,993$, $b = -0,016$ e $r^2 = 0,995$).

Tabela 12 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MA.

n	a_n	b_n
1	16,302	16,8
2	-14,497	27,2
3	1,576	0,440
4	0,519	-0,468
5	-0,824	1,81
6	-1,242	0,330
7	0,746	0,434
8	-0,056	0,218
9	-0,862	0,363
10	0,463	0,0631

Fonte: Do autor (2021).

Figura 24 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MA para o violão.



Fonte: Do autor (2021).

4.3.3 MÉTODO ANALÍTICO-NUMÉRICO

O MAN consiste em utilizar os valores numéricos obtidos pela aplicação dos instantes de tempo (divididos em partes iguais de centésimo de milésimo de segundo) nas funções interpoladoras, considerando os respectivos intervalos de tempo definidos para a geração de cada uma das quatro funções quadráticas (conforme descrito na Seção 4.3.1). As etapas, seguidas para o cálculo dos coeficientes e a geração da SF, foram conforme se descreve abaixo:

- I. Cálculo de $\cos(n\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$;
- II. Produto entre o valor da função interpoladora e os resultados da etapa I, para o instante considerado;
- III. Cálculo de a_0 , com os valores obtidos em II e a aplicação do método de integração numérica por trapézios, isto é:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i + C_k t_i^2) + (A_k + B_k t_{i-1} + C_k t_{i-1}^2)] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.44)$$

- IV. Cálculo dos valores dos demais coeficientes (a_n e b_n , com $n = 1$ a 10), seguindo o mesmo método que em III, por meio das equações abaixo:

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i + C_k t_i^2) \cos(n\omega t_i) + (A_k + B_k t_{i-1} + C_k t_{i-1}^2) \cos(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.45)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{i=1}^N [(A_k + B_k t_i + C_k t_i^2) \sin(n\omega t_i) + (A_k + B_k t_{i-1} + C_k t_{i-1}^2) \sin(n\omega t_{i-1})] \frac{(t_i - t_{i-1})}{2} \quad (4.46)$$

- V. Produto dos valores encontrados na etapa IV pelas funções obtidas na etapa I;
- VI. Somatório de $a_0 / 2$ com os termos resultantes da etapa V, para a geração da SF, dada pela equação 4.47.

$$F(t) = -0,886 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{25,4} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{25,4} t\right) \right] \quad (4.47)$$

Os valores dos coeficientes, obtidos na etapa IV, são apresentados na Tabela 13, para cada valor de n da repetição do somatório.

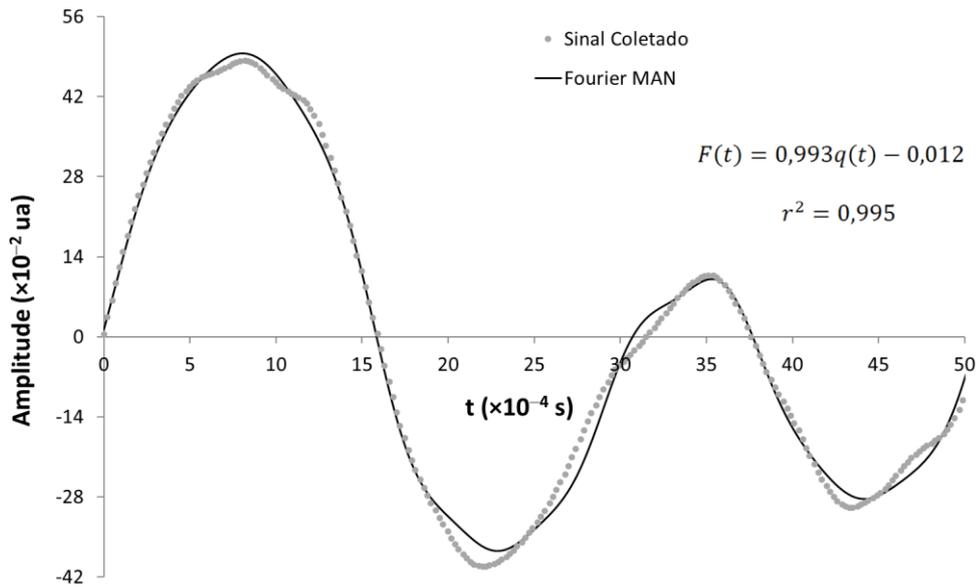
Tabela 13 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MAN.

n	a_n	b_n
1	16,3	16,8
2	-14,5	27,2
3	1,58	0,426
4	0,497	-0,481
5	-0,790	1,83
6	-1,26	0,315
7	0,729	0,438
8	-0,017	0,216
9	-0,892	0,364
10	0,462	0,072

Fonte: Do autor (2021).

Com a SF 4.47 obtida pelo MAN, gerou-se o gráfico apresentado na Figura 25, juntamente com o sinal coletado do violão, verificando-se uma aproximação satisfatória entre o modelo e os dados ($a = 0,993$, $b = -0,012$ e $r^2 = 0,995$), apesar de os pontos de amplitude máxima negativa apresentarem desvio visíveis, mas que se aproximam e dão a forma do sinal coletado. Poder-se-ia melhorar a precisão do modelo com a introdução de mais harmônicos (além dos dez utilizados) e/ou com um processo de interpolação mais criterioso, incluindo interpolação linear nos pontos de maior desvio, para se minimizar os erros.

Figura 25 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MAN para o violão.



Fonte: Do autor (2021).

4.3.4 MÉTODO OBSERVACIONAL-NUMÉRICO

Seguindo os procedimentos descritos nas etapas I a VI da Seção 4.3.3 para o MAN, mas aplicando os dados coletados $q(t)$ no lugar dos valores das funções interpoladoras, obteve-se a SF para dez harmônicos, por meio do MON, já com valor de $a_0 / 2$ calculado, isto é:

$$F(t) = -0,873 + \sum_{n=1}^{10} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{25,4}t\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{25,4}t\right) \right] \quad (4.48)$$

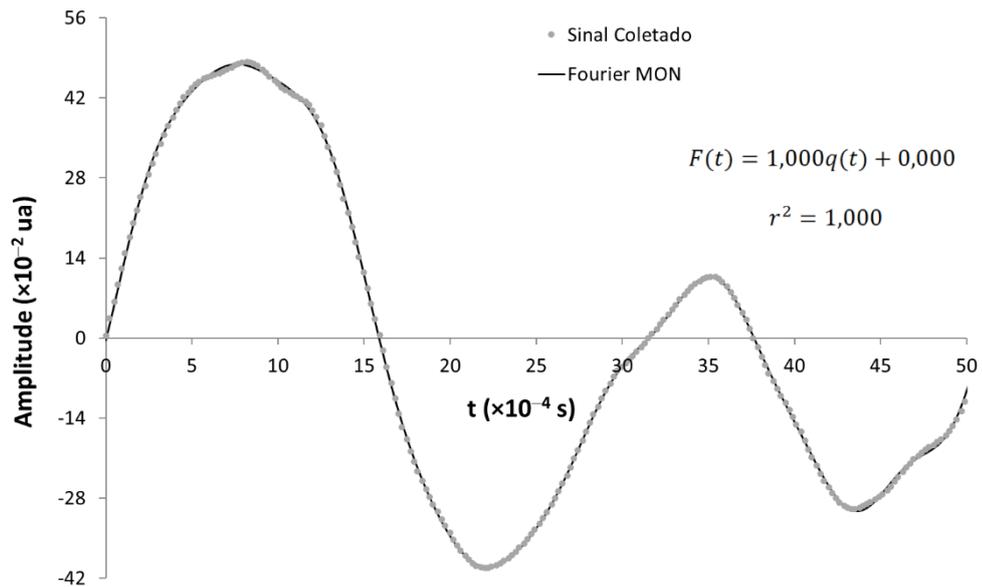
Na Tabela 14 são apresentados os valores dos demais coeficientes da SF ($n = 1$ a 10). Por meio dos gráficos apresentados na Figura 26, verifica-se uma aproximação muito precisa, exatamente em razão dos valores utilizados para o cálculo dos coeficientes da SF terem sido retirados diretamente da coleta dos dados do instrumento. Adicionalmente, por meio da referida Figura, observa-se que há quase somente uma única linha representando tanto o sinal quanto os resultados do modelo, o que se confirma por meio da equação de regressão exibida na parte superior direita da Figura, que apresenta, basicamente, que $F(t) = q(t)$. Conseqüentemente, este resultado é o mais preciso obtido, até então, para todos os métodos aplicados, tanto para a flauta quanto para o violão.

Tabela 14 - Valores dos coeficientes da SF para o violão pelo MON.

n	a_n	b_n
1	16,3	16,7
2	-14,3	27,5
3	1,47	-0,369
4	1,42	0,495
5	-1,88	1,08
6	-1,70	1,06
7	-0,119	0,046
8	-0,489	0,587
9	-0,211	0,983
10	0,072	0,016

Fonte: Do autor (2021).

Figura 26 - Gráfico do sinal coletado e da SF obtida pelo MON para o violão.



Fonte: Do autor (2021).

4.3.5 MODELO HARMÔNICO SIMPLES

Conforme visto na Seção 4.2.5, obtiveram-se resultados relevantes (boa aproximação entre o modelo e os dados, com $r^2 = 0,990$), por meio da aplicação do MHS para o sinal da flauta, utilizando parte dos resultados obtidos pelo MON. Tendo em vista a praticidade do método, em razão do pequeno número de harmônicos necessários para a modelagem matemática do sinal coletado, resolveu-se testá-lo para o caso do violão.

Dessa forma, o mesmo modelo foi aplicado para os dados coletados do violão, verificando-se que, com o uso de um único harmônico, não se obteve um bom resultado, como pode ser verificado na Figura 27. Portanto, adicionou-se um segundo harmônico e lograram-se resultados semelhantes ($r^2 = 0,990$) aos da modelagem do sinal da flauta por MHS. Como o objetivo do modelo é oferecer uma forma mais rápida e prática de calcular os coeficientes da SF, pode-se escrever a função, para dois harmônicos, da seguinte forma:

$$F_2(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) \quad (4.49)$$

e reescrita da maneira mais usual do MHS, como:

$$h_2(t) = \bar{h} + H_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + H_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \quad (4.50)$$

Como descrito, anteriormente, na Seção 4.2.5, tem-se como valor médio, amplitude e constante de fase do sinal, respectivamente, \bar{h} , $H_{1,2}$ e $\varphi_{1,2}$, sendo relacionados aos coeficientes da SF 4.49, por:

$$\bar{h} = \frac{a_0}{2}, \quad H_{1,2} = \sqrt{a_{1,2}^2 + b_{1,2}^2} \quad \text{e} \quad \varphi_{1,2} = \arctan\left(\frac{a_{1,2}}{b_{1,2}}\right)$$

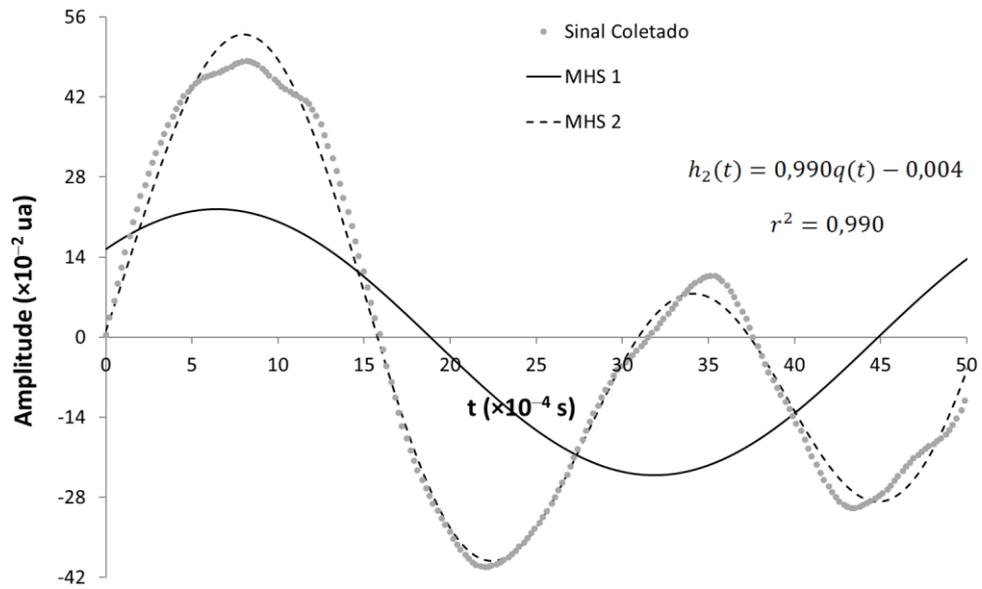
Calculando os valores dados acima e aplicando na equação 4.50, tem-se:

$$h_2(t) = -0,873 + 23,3 \sin\left(\frac{\pi}{50,8}t + 0,773\right) + 31,0 \sin\left(\frac{2\pi}{50,8}t - 0,481\right) \quad (4.51)$$

Com o uso de apenas um harmônico, obteve-se uma diferença muito grande entre o MHS e os dados ($r^2 = 0,355$, não mostrado), contudo, a partir do segundo harmônico, verificou-se uma correlação muito boa entre o modelo e o sinal coletado

($a = 0,990$, $b = -0,004$ e $r^2 = 0,990$), indicando que o método é aplicável para a representação de sinais oscilatórios de notas musicais mais simples (fundamentais).

Figura 27 - Gráfico do sinal coletado e da modelagem por MHS, para um e dois harmônicos, para o violão.



Fonte: Do autor (2021).

CAPÍTULO 5

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Por meio das Tabelas 2 e 3, observa-se que os valores de b_n , obtidos para o pulso de onda na corda do violão, são todos iguais a zero. Isso se dá porque a equação do pulso (4.2), escolhida para o estudo de caso, é uma função par, ou seja, $y(-x) = y(x)$. Portanto, conforme o esperado (e descrito na Seção 1.4), a SF desenvolvida para a referida função assumiu a forma de uma semi-série de cossenos.

Dos métodos utilizados no trabalho, o MON destacou-se por ser uma forma mais simples de se modelar por SF, pois, através dos dados coletados e aplicados nessa série, se obtiveram os melhores resultados do trabalho. O MA se mostrou mais trabalhoso, tanto devido à necessidade de se gerar funções interpoladoras quanto por integrá-las, analiticamente, para o cálculo dos coeficientes de Fourier, o que pode ser bastante complexo.

Conforme o esperado e mencionado acima, o MON resultou nas melhores modelagens matemáticas dos sinais coletados, tanto da flauta doce quanto do violão, pois os ajustes da SF são realizados diretamente com os valores dos dados coletados. Adicionalmente, para o caso da flauta, o MAN também apresentou um resultado bastante satisfatório, inclusive com valores mais próximos aos do sinal coletado quando se testou a integração por somatório discreto no MON (da mesma maneira que foi feita para o pulso na corda do violão). Contudo, ao se utilizar a integração por método dos trapézios, o MON apresentou a melhor aproximação do sinal coletado da flauta, tanto graficamente (Figura 28) quanto pelos coeficientes de regressão linear (Tabela 12).

Com a intenção de comparar os resultados obtidos através da aplicação dos métodos para gerar a SF do sinal da flauta, a Tabela 12 mostra, separadamente, os coeficientes da regressão linear (a e b) e o coeficiente de determinação (r^2), entre os resultados de cada método e os dados do sinal coletado do som emitido pela flauta doce.

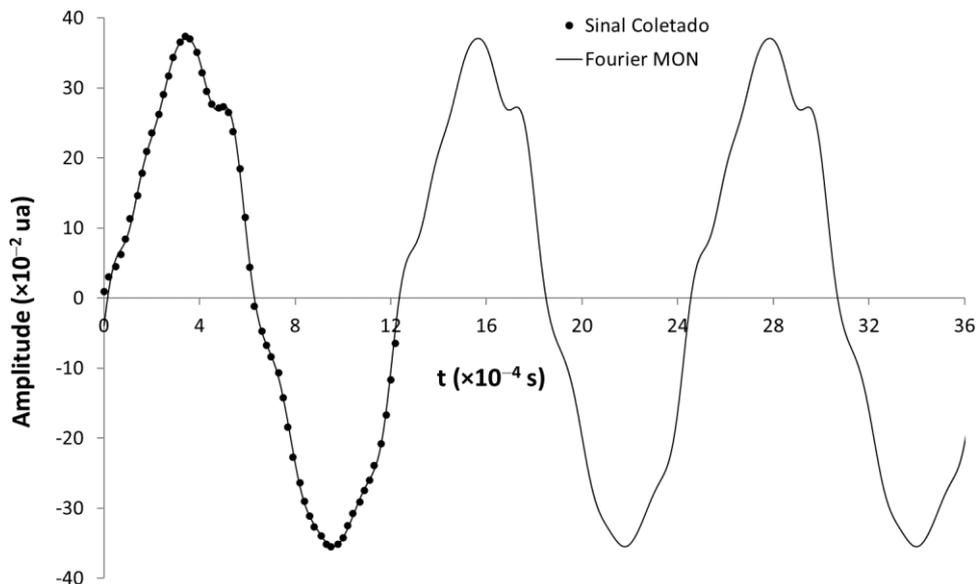
Tabela 15 - Valores dos coeficientes das regressões lineares entre os métodos para gerar a SF e os dados do sinal coletado da flauta.

Método	Coeficiente Angular	Coeficiente Linear	r^2
Analítico	0,995	0,024	0,997
Analítico-Numérico	0,995	0,004	0,995
Observacional-Numérico	0,998	-0,012	0,997
Harmônico Simples (um harmônico)	0,970	-0,154	0,990

Fonte: Do autor (2021).

Na Figura 28, pode-se verificar, por meio do gráfico traçado para o intervalo de três períodos consecutivos, obtido com a aplicação do MON, que este método apresenta um perfil que reproduz, quase com exatidão, o sinal coletado originalmente da flauta.

Figura 28 - Gráfico da SF gerada pelo MON para o sinal da flauta, para três períodos consecutivos.



Fonte: Do autor (2021).

O método que apresentou os melhores resultados para o violão também foi o MON (Figura 29). Por se utilizar dos dados coletados para a aplicação do método, ele acaba sendo o mais aproximado. Apesar de o MON ter se destacado pelo excelente resultado, outros métodos, como o MA e o MAN, também apresentaram resultados satisfatórios, o que pode se verificar pelo coeficiente de determinação ($r^2 = 0,955$), obtido para ambos os métodos, e pelos valores dos coeficientes de regressão, que apresentam valores muito próximos dos ideais, que seriam 1,0 e 0,0, respectivamente, para os coeficientes angular e linear. Esses e os demais resultados das modelagens para o sinal do violão são apresentados na Tabela 16.

Tabela 16 - Valores dos coeficientes das regressões lineares entre os métodos para gerar a SF e os dados do sinal coletado do violão.

Método	Coeficiente Angular	Coeficiente Linear	r^2
Analítico	0,993	-0,016	0,995
Analítico-Numérico	0,993	-0,012	0,995
Observacional-Numérico	1,000	0,000	1,000
Harmônico Simples (dois harmônicos)	0,990	-0,004	0,990

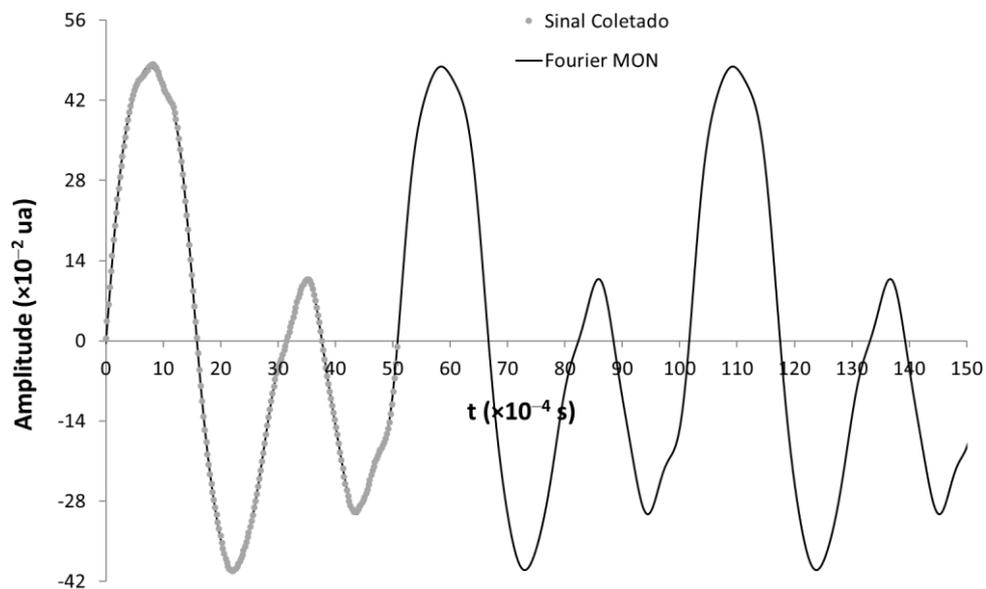
Fonte: Do autor (2021).

A Figura 29 apresenta o gráfico traçado para o intervalo de três períodos consecutivos, obtido com a aplicação do MON, e o sinal coletado originalmente do violão. Tanto pelos resultados dos coeficientes angular, linear e de determinação, apresentados na Tabela 16, quanto pela representação gráfica observada por meio da Figura 29, verifica-se que o MON conseguiu reproduzir o sinal coletado do som emitido pelo violão com perfeição, sendo, este, o resultado de modelagem mais preciso do trabalho.

Diferentemente do que ocorreu para o caso da flauta, ao se testar o MON por meio do somatório discreto para a obtenção da SF para o sinal do violão, continuou-se obtendo melhores resultados que o MAN. Isto se explica pelo fato de se ter utilizado a interpolação quadrática para gerar as funções analíticas, de forma que,

qualquer erro nesse ajuste, faz com que a distância entre os valores dos dados e os previstos pelas funções aumente mais rapidamente do que seria caso se tivesse utilizado a interpolação linear. Adicionalmente, o volume de dados coletados do sinal do violão (225 pontos) facilitou o ajuste da SF por MON com o uso do somatório discreto, enquanto que, para a flauta, coletou-se um volume de dados bem menor (55 pontos), dificultando esse ajuste. Conseqüentemente, verificou-se que uma quantidade maior de dados coletados faz com que o ajuste seja melhor pela proximidade desses dados, aumentando a precisão para o caso MON, mesmo que pelo método mais simples de somatório discreto.

Figura 29 - Gráfico da SF gerada pelo MON para o sinal do violão, para três períodos consecutivos.



Fonte: Do autor (2021).

Observou-se, também, que o MON apresentou resultados satisfatórios, mesmo para um número bem reduzido de harmônicos, gerando o MHS. Assim, para o sinal da flauta, foi necessário somente um harmônico para se obter um resultado bastante aproximado ($r^2 = 0,990$) e, para o sinal do violão, dada sua maior complexidade, necessitou-se de dois harmônicos para descrevê-lo com uma aproximação bastante razoável ($r^2 = 0,990$). Portanto, por apresentar resultados significativos e uma modelagem mais simples e rápida, o MHS se destacou como um método plenamente aplicável para a modelagem matemática de sinais períodos de notas musicais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, realizou-se a modelagem matemática de sinais oscilatórios emitidos pela nota Sol tocada por dois instrumentos que produzem ondas sonoras de forma distinta, isto é, a flauta doce, que origina o som a partir do sopro, e o violão, cujo som é produzido por meio da vibração de cordas. Para se concretizar esse objetivo e obter as grandezas que caracterizam as ondas sonoras produzidas pelos instrumentos (como frequência, comprimento de onda e amplitude), utilizou-se um programa computacional para a coleta dos sinais oscilatórios captados por um microfone e, seguindo as metodologias estudadas ao longo da revisão bibliográfica, selecionou-se uma parte dos sinais coletados quando estes se encontravam na fase de sustentação. Para a modelagem dos sinais, aplicou-se a Série de Fourier, utilizando-se diferentes métodos, em busca do refinamento dos resultados. Os referidos métodos foram denominados de acordo com a forma que se utilizou para o cálculo dos coeficientes de Fourier, a saber: Analítico, Analítico-Numérico e Observacional-Numérico. A priori, esperava-se que este último método apresentasse o melhor ajuste para o sinal de ambos os instrumentos, hipótese que foi confirmada pelos resultados. Como consequência desses resultados, chegou-se a duas principais conclusões para a modelagem de sinais emitidos por notas musicais tocadas por instrumentos: (i) utilizando-se programas computacionais adequados, tanto para a coleta dos sinais quanto para a realização dos cálculos, pode-se escrever, com alto grau de precisão, as equações matemáticas de todas as notas musicais, até mesmo combinadas, por meio de funções trigonométricas; (ii) pode-se obter uma modelagem matemática satisfatória das notas fundamentais, inclusive para fins didáticos, por meio de poucos harmônicos da Série de Fourier, caracterizando, assim, um Modelo Harmônico Simples. Por meio desse modelo, pode-se representar o sinal oscilatório utilizando-se apenas um ou dois harmônicos, como foram os casos da flauta e do violão, respectivamente, obtidos no trabalho. Conseqüentemente, diminui-se o volume de cálculos e, ainda assim, obtêm-se resultados que representam bem os sinais e que podem, adicionalmente, ser reproduzidos, utilizando-se as funções trigonométricas obtidas, por meio de programas computacionais adequados, como o *Audacity*. Apesar dos resultados apontarem para um método mais refinado para a modelagem dos sinais, todos apresentaram boas correlações.

REFERÊNCIAS

- ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J. **Mathematical Methods for Physicists**. 6ª ed. San Diego, Califórnia, EUA: Elsevier, 2005.
- BASSALO, José Maria Filardo; CATTANI, Mauro Sérgio Dorsa. **Elementos de Física Matemática**. Vol. 1. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- BROMBERG, Carla. **Vincenzo Galilei contra o número sonoro**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- BURMESTER, Haroldo Roger Benhi. **Aspectos do Stylus Phantasticus nas Tocatas para Tiorba de Giovanni Girolamo Kapsberger (c.1580-1651)**. 2010. 143 f. Dissertação (Mestrado em Música) – Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/handle/Haroldo.pdf1.pdf>>. Acesso em: 28 de maio de 2020.
- BUTKOV, Eugene. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.
- CANDÉ, Roland de. **História Universal da Música**. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.
- CHANG, Pablo. **Aplicação da Série de Fourier como Análise Acústica de Instrumentos Musicais**. 2016. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo, Paraná, 2016. Disponível em: <<http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/10207/1/aplicacaoseriefourierinstrumentosmusicais.pdf>>. Acesso em: 14 de maio de 2020.
- COVO, Carlos Cesar de Carvalho. **Modelagem Matemática Computacional de Efeitos em Ondas Sonoras**. 2016. 78 f. Trabalho de Conclusão de Curso (PROFMAT) – Universidade Federal do Paraná – Departamento de Matemática, Paraná, 2016. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/dissertacoes_teses/dissertacao_carlos_cesar_carvalho_covo.pdf>. Acesso em: 20 de março de 2020.

DE ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso. Estudo de caso: seu potencial na educação. **Cadernos de pesquisa**, n. 49, p. 51-54, 2013. Disponível em: <<http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/cp/article/view/1427>>. Acesso em: 08 de setembro de 2020.

HALLIDAY, D; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos da Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. Vol. 2. 10^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

KNECHTEL, Maria do Rosário. **Metodologia da pesquisa em educação: uma abordagem teórico-prática dialogada**. Curitiba: Intersaberes, 2014.

LOY, Gareth. **Musimathics — The Mathematical Foundations of Music**. Vol. 1, Cambridge: MIT Press. 2006.

MICHILES, A. A. S. **Física 2 – Ondas, Fluidos e Termodinâmica**. 119 f. Material de Estudo para o Curso de Física 2 – Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2019.

NASCIMENTO, S. A.; DANTAS, J.D.; SOUZA SEGUNDO, P. C. S; SANTOS, C. A. S. Espectro Sonoro da Flauta Transversal. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, p. 2305-1-2305-5, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v37n2/0102-4744-rbef-37-02-2305.pdf>>. Acesso em: 2 de julho de 2021.

PEREIRA, Marcos. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje**. 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <<http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/tcc-marcos>>. Acesso em: 10 de março de 2020.

RODRIGUES, José Francisco. A Matemática e a Música. **Revista Colóquio/Ciências**, n. 23, 1999, p. 17-32. Disponível em: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 13 de maio de 2020.

SAITO, O. H.; DEPIZOLI, C. A. Matemática e música: uma relação harmoniosa no ensino de funções trigonométricas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 6, n. 2, p. 1-7, 2018. Disponível em: <<https://proceedings.sbmacc.org.br/sbmacc/article/view/2380>>. Acesso em: 11 de maio de 2020.

SILVA, Dirceu; SIMON, Fernanda Oliveira. Abordagem quantitativa de análise de dados de pesquisa: construção e validação de escala de atitude. **Cadernos Ceru**, v. 16, p. 11-27, 2005. Disponível em: <<https://www.revistas.usp.br/ceru/article/view/75338>>. Acesso em: 3 de agosto de 2020.

STEWART, Ian. **17 equações que mudaram o mundo**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Schwarcz - Companhia das Letras, 2013.