

JOSÉ FRANCISCO CASTELO BRANCO FILHO

SISTEMAS

TRIFÁSICOS E TRANSFORMADORES



editora
UEA

SISTEMAS

TRIFÁSICOS E TRANSFORMADORES

Governo do Estado do Amazonas

Wilson Miranda Lima
Governador

Universidade do Estado do Amazonas

Cleinaldo de Almeida Costa
Reitor

Cleto Cavalcante de Souza Leal
Vice-Reitor

*editora*UEA

Maristela Barbosa Silveira e Silva
Diretora

Maria do Perpetuo Socorro Monteiro de Freitas
Secretária Executiva

Síndia Siqueira
Editora Executiva

Samara Nina
Produtora Editorial

Maristela Barbosa Silveira e Silva (Presidente)
Allison Marcos Leão da Silva
Almir Cunha da Graça Neto
Erivaldo Cavalcanti e Silva Filho
Jair Max Furtunato Maia
Jucimar Maia da Silva Júnior
Manoel Luiz Neto
Mário Marques Trilha Neto
Sílvia Regina Sampaio Freitas
Conselho Editorial

José Francisco Castelo Branco Filho

Sistemas Trifásicos e Transformadores



Clarice Almeida
Raquel Maciel
Projeto Gráfico

André Teixeira
Sindell Amazonas
Wanessa Ramos
Revisão

Clarice Almeida
Raquel Maciel
Diagramação

Samara Nina
Finalização

Todos os direitos reservados © Universidade do Estado do Amazonas
Permitida a reprodução parcial desde que citada a fonte

Esta edição foi revisada conforme as regras do Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

B816s
2021

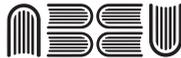
Branco Filho, José Francisco Castelo
Sistemas trifásicos e transformadores/ José Francisco Castelo
Branco Filho. – Manaus (AM) : Editora UEA, 2021.
E-book: 111 p.: il., color; 21 cm.

ISBN 978-65-87214-95-5

Inclui referências bibliográficas

1. Sistemas de energia elétrica. 2. Transformadores. 3.
Engenharia elétrica. I. Título.

CDU 1997 – 621.3

Editora afiliada

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

*editora*UEA

Av. Djalma Batista, 3578 – Flores | Manaus – AM – Brasil
CEP 69050-010 | +55 92 38784463
editora.uea.edu.br | editora@uea.edu.br

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	08
CAPÍTULO 1 - POTÊNCIA CA	12
1.1 - Considerações gerais	13
1.2 - Expressão geral para a potência CA	13
1.3 - Potência aparente, complexa e fator de potência	15
1.4 - Circuitos resistivos	16
1.5 - Circuitos indutivos	18
1.6 - Circuitos capacitivos	21
1.7 - Triângulo de potência	23
1.8 - Exercícios	25
CAPÍTULO 2 - SISTEMAS TRIFÁSICOS	27
2.1 - Considerações gerais	28
2.2 - O gerador trifásico	28
2.3 - O gerador conectado em Y	30

2.4 - Tensões de linha e de fase para a conexão em Y	31
2.5 - Conexão Y-Y entre gerador e carga	34
2.6 - O gerador conectado em Δ	36
2.7 - Associação gerador-carga	39
2.8 - Exercícios	48
CAPÍTULO 3 - POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS	50
3.1 - Considerações Iniciais	51
3.2 - Carga equilibrada conectada em Y	51
3.3 - Carga equilibrada conectada em Δ	54
3.4 - Medida de potência em circuitos trifásicos	56
3.5 - Medida de potência em sistemas monofásicos	58
3.6 - Exercício	62
CAPÍTULO 4 - TRANSFORMADORES	64
4.1 - Introdução	65
4.2 - O transformador	65
4.3 - A bobina	66
4.4 - Indutância mútua	70

4.5 - Transformador linear	86
4.6 - Transformador de armazenamento de energia	94
4.7 - Fator de acoplamento	98
4.8 - Transformador de impedância refletida	102
REFERÊNCIAS	109
SOBRE O AUTOR	110

APRESENTAÇÃO



Esta obra é voltada para o curso de graduação de circuitos elétricos na área de engenharia elétrica, podendo se estender a áreas afins como engenharia eletrônica, de controle, telecomunicações e mecatrônica. Tem o objetivo geral voltado para formação do profissional em engenharia elétrica. Seu conteúdo é abordado de forma didática, utilizando recursos de figuras, tabelas, equações, exemplos e exercícios para facilitar a interpretação física e matemática dos fenômenos envolvidos na eletricidade. O objetivo específico é voltado para o estudo de transformadores, em que os conceitos fundamentais necessários são desenvolvidos nos três primeiros dos quatro capítulos. A extensão do seu conteúdo é adequada para aplicação em um semestre do curso de engenharia.

No Capítulo 1, **Potência CA**, são abordados os conceitos de potência e energia em corrente alternada, em elementos resistivos, capacitivos e indutivos. Suas equações são matematicamente representadas no domínio do tempo, sendo acompanhadas de figuras de formas de onda representativas, que são fundamentais para a interpretação física dessas grandezas.

No Capítulo 2, **Sistemas Trifásicos**, são abordados os conceitos de geração e transmissão de energia seguidos do estudo de sistemas trifásicos ideais envolvendo as quatro possíveis associações dos circuitos de gerador e carga. Os conceitos de geração e transmissão de energia elétrica são explanados em regime permanente senoidal, com auxílio de figuras representativas do gerador trifásico e diagramas fasoriais, onde tensão e corrente são matematicamente representadas nas formas: fasorial e instantânea, mostrando claramente o desenvolvimento de suas respectivas seqüências de fase. São adotadas as configurações em triângulo (Δ) ou estrela (Y) para a associação das bobinas do gerador e do circuito de carga, permitindo quatro possíveis associações no sistema gerador-carga. Nele, são calculadas as tensões e correntes de linha e de fase na forma fasorial e instantânea, baseadas nas leis e teoremas fundamentais da análise de circuitos. Seus cálculos

se aplicam genericamente a sistemas equilibrados e desequilibrados. Tem como destaque uma abordagem inédita em circuitos elétricos no cálculo da propagação dos ângulos das grandezas elétricas ao longo do sistema de transmissão. Isto permite a aplicação de projetos de qualidade de energia nestes sistemas, assim como um resultado mais preciso no cálculo de tensões e correntes, fornecendo uma base de conhecimento mais sólida ao estudante.

O Capítulo 3, **Potência em Sistemas Trifásicos**, complementa o Capítulo 2 no cálculo das potências trifásicas e energias em regime permanente. São elas as potências: ativa, reativa, aparente e complexa. Tais conceitos são fundamentais em uma rede de energia elétrica para o dimensionamento de geradores, motores e transformadores, e, também, implementação de qualidade de energia no sistema.

Uma abordagem prática de medição de potências em cargas trifásicas desequilibradas é acrescentada, apresentando um método em que somente dois wattímetros de medição de cargas monofásicas são utilizados. É apresentada ainda uma abordagem na medição de cargas monofásicas utilizando equipamentos digitais. Isto proporciona ao estudante um auxílio teórico importante que direciona a prática de medições de potência em laboratório em equipamentos modernos, fortalecendo a aprendizagem do conceito físico da potência elétrica.

No Capítulo 4, **Transformadores**, é feita uma abordagem de um transformador monofásico ideal, voltado para aplicação em circuitos de baixa potência. Sua descrição começa mostrando sua concepção histórica surgida a partir dos anos 1880. Em seguida, é realizado um estudo detalhado da *autoindutância* e *indutância* da bobina baseado nas leis de Faraday e de Lens, possibilitando a determinação da tensão induzida. O método de enlace é utilizado aplicando-se uma relação linear entre fluxo e corrente, permitindo equacionamento mais preciso de indutâncias e tensões onde é incluída a permeância do espaço atravessado pelo fluxo magnético.

O estudo prossegue em **Indutância mútua** na aplicação de dois transformadores formados por bobinas a núcleo de ar. Um com secundário em aberto, e outro com carga. Neles são calculados os fluxos totais no primário e secundário, seguido do cálculo de suas tensões e indutâncias para bobinas enroladas no sentido horário no primário e sentido anti-horário no secundário. São fornecidas tabelas inéditas para as oito possíveis configurações do transformador com secundário em aberto, associando a polaridade da tensão na saída

com a polaridade na entrada e com os sentidos dos enrolamentos e dos fluxos nas duas bobinas.

Um estudo da regra do ponto em ambos os circuitos de transformadores permite associar os pontos de polaridade de seus terminais com suas possíveis configurações de bobinas e equações de entrada e saída. Isto produz tabelas inéditas que são fornecidas para configurações em aberto e com carga. Tais ferramentas reforçam significativamente o conhecimento do estudante, facilitando sua aplicação em projetos de transformadores de forma geral. Uma análise do transformador abaixador ideal e com carga finaliza o estudo das tabelas de configurações, proporcionando a escolha correta das configurações de bobinas utilizadas no transformador.

O estudo prossegue com as abordagens do **Transformador linear**, **Transformador de armazenamento de energia**, finalizando com **Transformador de impedância refletida**.

O estudo do **Transformador linear** aborda as principais equações no cálculo das tensões e correntes do transformador com carga. Estas grandezas são representadas na forma fasorial, sendo as correntes de malha, no primário e secundário, obtidas na aplicação da Lei de Kirchhoff, formando um sistema de equações lineares. Esta técnica permite o cálculo da corrente de saída na forma matricial utilizando a regra de Cramer, como também a formulação da equação do transformador, obtida na relação das tensões de saída e de entrada em função das impedâncias de primário e secundário. Substituindo a relação de espiras, esta técnica apresenta um resultado mais preciso, necessário para aplicação em projetos de transformadores, onde as indutâncias podem ser calculadas para a construção das bobinas. Em seguida, é desenvolvida uma técnica inédita, respaldada em experiências práticas para cálculo da indutância mútua do transformador. Vale ressaltar que, apesar da modelagem ideal utilizada na equação do transformador, o resultado calculado obtido em transformadores de baixa potência se mostra preciso nos cálculos de corrente e tensão de saída comparados aos resultados medidos em laboratório. O assunto é encerrado com aplicação de um exemplo, em que é ilustrado um circuito com diferentes potenciais de referência utilizado comumente em fontes que alimentam circuitos eletrônicos.

Em **Transformador de armazenamento de energia** um estudo da energia armazenada é feito em bobinas linearmente acopladas. Nesta técnica, duas formas de onda de corrente, graficamente representadas, são integradas em diferentes estados alternativos ao

longo de dois intervalos de tempo. Isto proporciona uma compreensão clara do efeito da indutância mútua, permitindo visualizá-lo individualmente no cálculo da energia total acumulada nas bobinas. Dessa forma, o termo da indutância mútua é gerado na integração da energia total acumulada.

Complementando o assunto, é feito o estudo detalhado dos limites do **Fator de acoplamento** a partir de sua fórmula obtida do estudo do eletromagnetismo. Isto é elaborado aplicando a técnica de concatenamento de fluxo no acoplamento entre as bobinas, conhecimento este indispensável à formação do engenheiro para compreensão do circuito magnético do transformador.

A abordagem do **Transformador de impedância refletida** completa o assunto de transformadores nesta obra, incluindo o cálculo da impedância refletida na entrada. Assim procedendo, um estudo é feito considerando um transformador linear com uma fonte real no primário alimentando uma impedância no secundário. Também são calculadas suas relações de tensão e corrente na forma fasorial, a partir do sistema de equações do transformador. O equacionamento da impedância complexa refletida no primário, juntamente com as relações dos fasores, permitem uma análise do comportamento da indutância mútua e do aspecto reativo desta impedância, onde propriedades importantes são reveladas. Tal conhecimento ganha relevância, principalmente, quando precisamos acoplar dois circuitos com um transformador.

Finalizando o assunto, um estudo da impedância refletida no primário é feito na condição de ressonância do secundário. Tal condição proporciona aplicações do efeito de transformação na amplificação de sinais, ou realizando casamento de impedância. Isto expande a aplicação do transformador em filtros de tensão na rede elétrica, em sinais de áudio e de telecomunicações. Tal aprendizado torna mais versátil a aplicação do conhecimento do estudante em diferentes modalidades da engenharia elétrica.

POTÊNCIA CA

I

1.1 - Considerações gerais

A potência total em um circuito elétrico é uma potência complexa, conhecida como potência aparente. Em um circuito RLC, ela é resultante da soma da componente ativa representada por um número real, com a componente reativa, representada por um número imaginário. Neste capítulo será examinada a expressão da potência total representante deste circuito, bem como a energia e o fator de potência em cada componente.

1.2 - Expressão geral para a potência CA

A potência instantânea fornecida a uma carga a qualquer instante é:

$$p(t) = v(t) i(t)$$

Onde pode-se estabelecer que:

$$v(t) = V_m \text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t)$$

Se a carga for resistiva: $\theta = 0$

Se a carga for indutiva: $\theta = 90^\circ$

Se a carga for capacitiva: $\theta = -90^\circ$

Então:

$$p(t) = V_m I_m \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega t + \theta)$$

Sabendo-se que:

$$\text{sen}(a) \text{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

obtem-se:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta) - \cos(2\omega t + \theta)]$$

Sendo:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b)$$

obtem-se:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta) - \cos(2\omega t) \cos(\theta) + \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\theta)]$$

onde:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta) - \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t) \cos(\theta) + \frac{V_m I_m}{2} \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\theta)$$

como:

$$V_m = \sqrt{2} V \text{ e } I_m = \sqrt{2} I$$

$$\frac{V_m I_m}{2} = \frac{\sqrt{2} V \sqrt{2} I}{2} = VI$$

que resulta em:

$$p(t) = VI \cos(\theta) - VI \cos(2\omega t) \cos(\theta) + VI \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\theta)$$

de onde podemos interpretar que:

$$VI \cos(\theta) \rightarrow \text{Potência média}$$

$$-VI \cos(2\omega t) \cos(\theta) \rightarrow \text{Potência reativa capacitiva}$$

$$VI [\sin(2\omega t) \sin(\theta)] \rightarrow \text{Potência reativa indutiva}$$

1.3 - Potência aparente, complexa e fator de potência

a) Potência aparente

A potência aparente ou potência total é normalmente utilizada na especificação de sistemas senoidais, equipamentos e componentes de sistemas elétricos. É representada de forma geral por:

$$S = VI = ZI^2 = \frac{V^2}{Z}$$

Dada em Volt-Ampère (VA).

b) Fator de Potência

O fator de potência pode ser obtido da componente de potência ativa da potência total, que é a potência média, dada por:

$$P = VI \cos(\theta)$$

Como $S = VI$,

$$P = S \cos(\theta)$$

em que:

$$\cos(\theta) = F_p = \frac{P}{S}$$

c) Potência Complexa

A expressão da potência complexa em um circuito é dada pelo produto do fasor de tensão pelo conjugado do fasor de corrente, onde:

$$\dot{S}_{RLC} = \dot{V} \cdot I^* = V e^{j\theta_E} \cdot I e^{-j(\theta_I)}$$

$$\dot{S}_{RLC} = VI e^{j(\theta_E - \theta_I)}$$

Em geral, a potência de equipamentos elétricos é especificada em (VA) ou (KVA) e não em watts.

1.4 - Circuitos resistivos

No circuito resistivo o valor instantâneo da tensão v e da corrente i estão em fase. Tornando $\theta = 0$ na expressão da potência total, temos:

$$P_R(t) = VI - VI \cos(2\omega t)$$

$$P_R(t) = VI (1 - \cos(2\omega t))$$

Onde VI é a potência média ou cc.

Plotando a forma de onda para $P_R(t)$, obtemos:

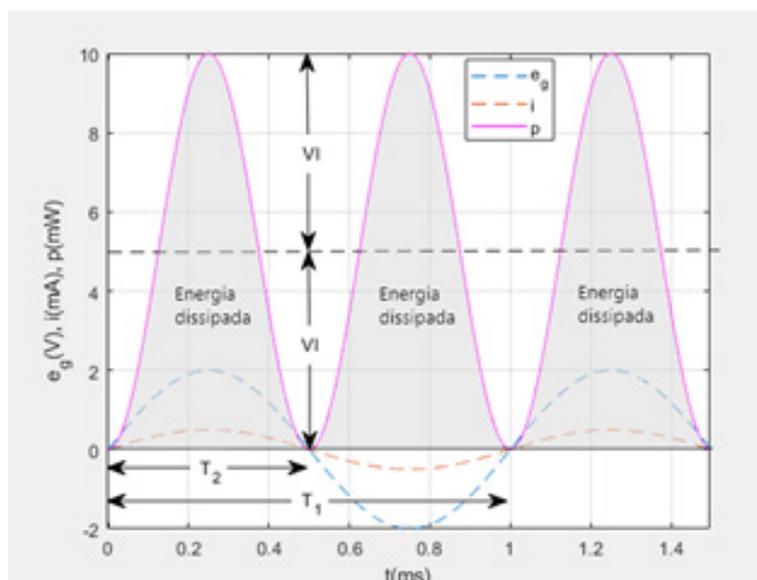


Figura 1.1 - Potência instantânea para uma carga resistiva

a) Potência no resistor

Calculando o valor médio na equação de P_R , obtemos:

$$P_R = VI = \frac{V_m I_m}{2} = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

que é a potência média consumida no circuito, dada em Watts (W).

b) A Energia no resistor

A energia média W_R dissipada no resistor durante um tempo t é dada por:

$$W_R = \int_0^t P dt$$

que, no intervalo de um período de 0 a T_1 resulta em:

$$W_R = \int_0^{T_1} VI dt = VI T_1$$

onde:

$$W_R = \frac{VI}{f_1}$$

Dado em Joule (J) ou (ws).

c) Potência aparente no resistor

A potência aparente ou potência total é normalmente utilizada na especificação de sistemas senoidais, equipamentos e componentes de sistemas elétricos.

A potência aparente no resistor é, portanto,

$$S_R = V_R I = RI^2 = \frac{V_R^2}{R}$$

d) Fator de Potência no resistor

Para um circuito puramente resistivo $\theta = 0$ e, portanto,

$$P = VI = S$$

onde:

$$F_p = \frac{VI}{S} = \frac{S}{S} = 1$$

1.5 - Circuitos indutivos

Nos circuitos indutivos $\theta_v = 90^\circ$ adiantados em relação à corrente. Substituindo na expressão da potência total, resulta:

$$q_L(t) = VI \text{ sen}(2\omega t)$$

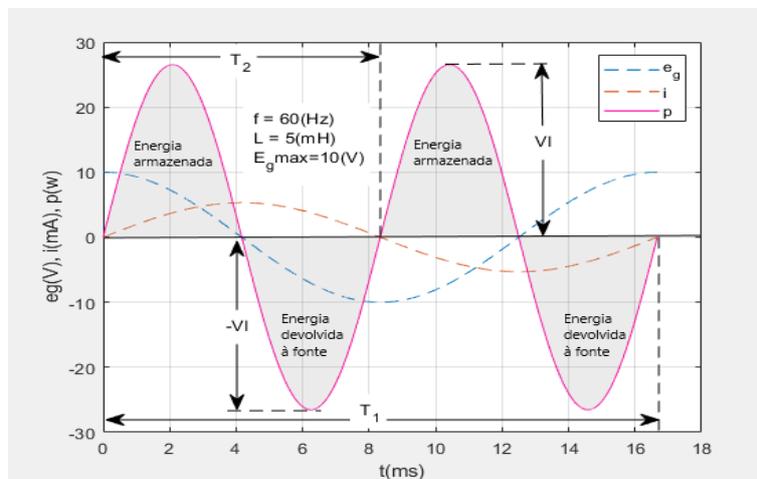


Figura 1.2 - Potência instantânea para uma carga indutiva

onde Q_L é a potência reativa armazenada durante um ciclo da tensão, dada em VAR.

No caso de um indutor puro (ideal), o fluxo de potência entre a fonte e a carga durante um ciclo completo da tensão da fonte é exatamente zero, onde não existe perda no processo de transferência de energia.

a) Potência reativa em um indutor

A potência armazenada em um indutor também pode ser calculada por:

$$Q_L = VI$$

Aplicando a Lei de Ohm, temos:

$$V = IX_L$$

de onde obtemos:

$$Q_L = \frac{V^2}{X_L} = X_L I^2$$

b) Potência aparente e fator de potência em um indutor

A potência aparente associada a um indutor é:

$$S_L = VI$$

e a potência média é:

$$P_L = VI \cos(90^\circ) = 0$$

onde o fator de potência é dado por:

$$F_p = \cos(90^\circ) = \frac{P_L}{S_L} = \frac{0}{VI} = 0$$

c) Energia armazenada em um indutor

A energia armazenada em um indutor na área positiva da curva de potência é:

$$W_L = \int_0^t P_L dt$$

onde P_L é a potência média no indutor.

O valor médio é obtido do semiciclo positivo da senoide de potência, onde:

$$P_L = \frac{1}{T} \int_0^T VI \operatorname{sen}(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi VI \operatorname{sen}(\alpha) d\alpha$$

Calculando a integral, obtemos:

$$P_L = \frac{2VI}{\pi}$$

Como $T = T_2/2$ a cada semiciclo da potência, a energia neste intervalo será:

$$W_L = \frac{2VI}{\pi} \frac{T_2}{2}$$

Simplificando:

$$W_L = \frac{VIT_2}{\pi}$$

sendo $T_2 = 1/f_2$,

$$W_L = \frac{VI}{f_2\pi} \text{ e } f_2 = 2f_1$$

$$W_L = \frac{VI}{2\pi f_1} = \frac{VI}{\omega_1}$$

Sendo $V = V_L = IX_L = I \omega_1 L$, resulta:

$$W_L = \frac{\omega_1 L I^2}{\omega_1}$$

onde finalmente obtemos:

$$W_L = L I^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$$

que é dado em Joules (J) ou (Ws).

Portanto, podemos afirmar que, em um indutor, a energia armazenada depende diretamente da corrente que se manifesta numa proporção quadrática.

1.6 - Circuitos capacitivos

Nos circuitos capacitivos $\theta_v = -90^\circ$ a tensão está atrasada em relação à corrente. Assim, substituindo na expressão da potência total, obtemos:

$$q_c(t) = -VI \operatorname{sen}(2\omega t)$$

Onde Q_c é a potência reativa armazenada durante um ciclo da tensão, dada em VAR. A *Figura 1.3* ilustra seu comportamento ao longo dos ciclos de tensão e corrente, para uma carga puramente capacitiva.

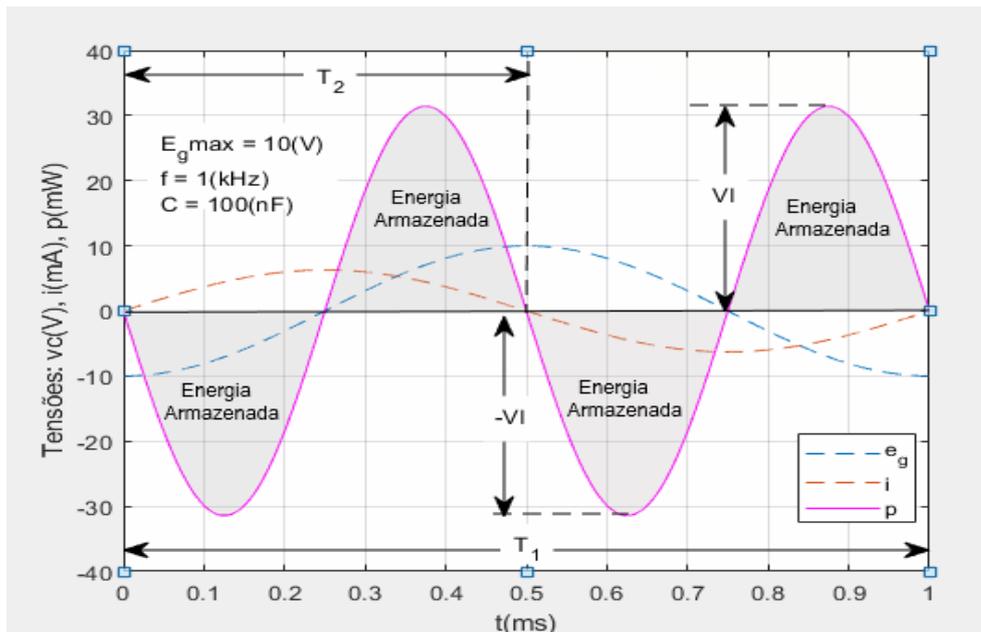


Figura 1.3 - Potência instantânea para uma carga capacitiva

De forma similar ao indutor, as potências ativa, reativa e aparente no capacitor são:

a) Potência ativa

$$P_C = -VI \cos(-90^\circ) = 0$$

b) Potência reativa

$$Q_C = -X_C I^2 = -\frac{V^2}{X_C}$$

c) Potência aparente

$$S_C = -VI$$

d) Fator de potência

$$F_p = \cos(-90^\circ) = 0$$

e) Energia

$$W_C = \frac{VI}{\pi} T_2$$

que resulta em:

$$W_C = \frac{VI}{\omega_1} = \frac{VV\omega_1 C}{\omega_1}$$

onde:

$$W_C = CV^2$$

Como era de se esperar, a energia armazenada durante um ciclo da tensão no capacitor depende diretamente da tensão numa proporção quadrática de seu valor.

1.7 - O Triângulo das Potências

De acordo com as equações anteriormente desenvolvidas, a potência total em um circuito pode ser representada pela potência complexa, onde:

$$\dot{S} = \dot{P} + j\dot{Q}$$

sendo:

$$\dot{P} = P e^{j0^\circ}; \quad \dot{Q}_L = Q_L e^{j90^\circ}; \quad \dot{Q}_C = Q_C e^{-j90^\circ}$$

de onde podemos obter seus respectivos triângulos:

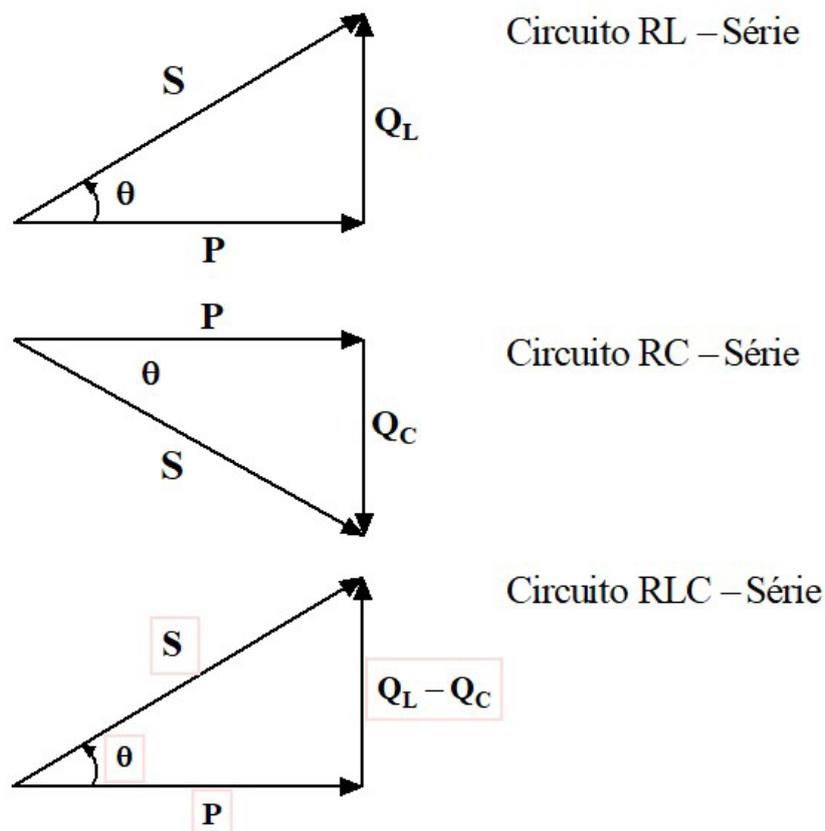


Figura 1.4 - Triângulos de potência

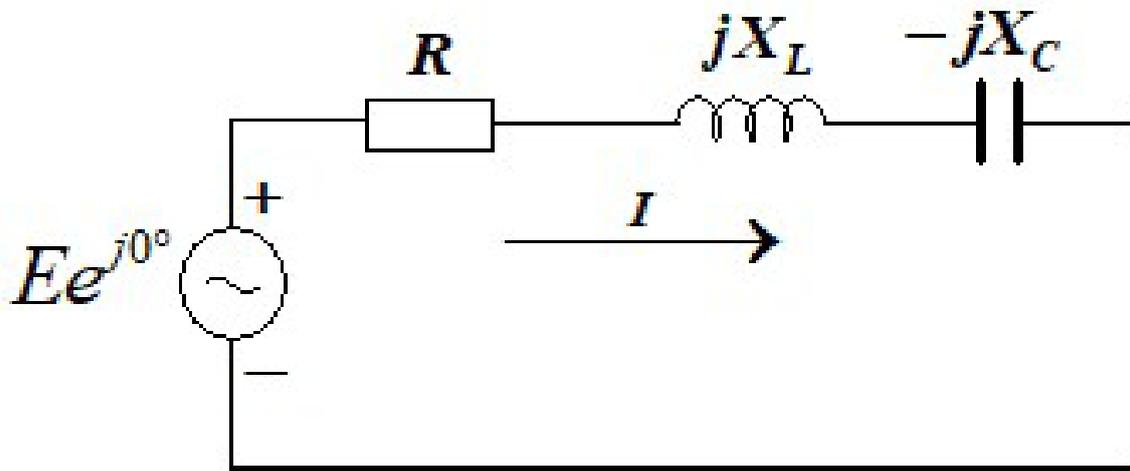
Portanto, as potências complexas são tratadas como fasores e normalmente usadas na representação de circuitos reativos, transformadores e sistemas de potência.

A potência propriamente dita é diretamente obtida de módulos de tensão, de corrente e de impedância, sendo seu resultado igual aos Volt-Ampères (VA), Volt-Ampères Reativo (VAR) e os Watts (W) consumidos ou armazenados no circuito.

As potências instantâneas são obtidas de valores instantâneos de tensão e corrente onde os Volt-Ampères, Volt-Ampères Reativos e Watts consumidos ou armazenados no circuito são determinados em um instante de tempo.

1.8 – Exercício

Dado o circuito na *Figura 1.5*, onde:



$$E = 50(\text{V}), R = 6(\Omega); X_L = 7(\Omega) \text{ e } X_C = 15(\Omega),$$

Figura 1.5 – Exercício

Calcule:

- 1) Calcule o total de Watts, Volt-Ampère, Volt-Ampère reativos e o fator de potência para o circuito acima.
- 2) Desenhe o triângulo de Potência.
- 3) Calcule a energia dissipada no resistor durante um ciclo completo da tensão se a frequência da tensão for 60(Hz).
- 4) Calcule a energia armazenada ou devolvida pelo capacitor e pelo indutor durante meio ciclo da curva de potência para $f = 60(\text{Hz})$.

Respostas:

1) $P = 150$ (W), $S = 250$ (VA), $Q = -200$ (VAR), $F_p = 0,6$ adiantado.

3) $W_R = 2,5$ (ws).

4) $W_C = 994,7$ (ws); $W_L = 464,2$ (ws).

SISTEMAS TRIFÁSICOS

2

21 - Considerações gerais

Na geração de energia elétrica, o sistema trifásico é o mais usado. Em geral, existe preferência por sistemas trifásicos em vez de monofásicos para transmissão de energia elétrica por diversas razões.

1 - Condutores de menor diâmetro podem ser usados para transmitir a mesma potência com a mesma tensão. Isso reduz a quantidade de cobre necessária (25% a menos) reduzindo o custo de fabricação e manutenção das linhas.

2 - Linhas mais leves são mais fáceis de instalar e as torres de sustentação podem ser mais delgadas e mais espaçadas.

3 - Equipamentos e motores trifásicos apresentam melhores características de partida e operação que em sistemas monofásicos, pois a transferência de potência da fonte para a carga nos sistemas trifásicos está menos sujeita à flutuação de que nos sistemas monofásicos.

4 - Em geral, a grande maioria de motores de grande porte é trifásica, porque a partida não necessita de circuitos externos.

2.2 - O gerador trifásico

Num gerador, a frequência é determinada pelo número de polos (parte giratória) e pela velocidade angular do eixo.

As frequências de 50 (Hz) e 60 (Hz) são escolhidas porque podem ser geradas com relativa eficiência por equipamentos mecânicos, cujo porte depende das dimensões do sistema de geração e da demanda nos períodos de pico.

O gerador trifásico usa três enrolamentos posicionados 120° um do outro, em torno do estator. A *Figura 2.1* ilustra esta situação.

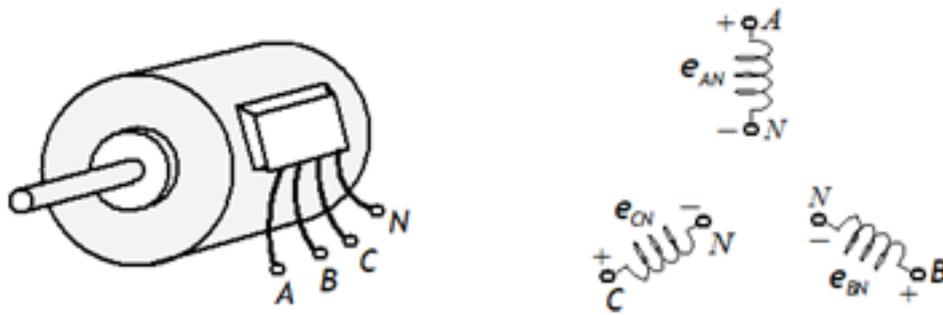


Figura 2.1 - Representação das bobinas trifásicas em um gerador

Como os três enrolamentos possuem o mesmo número de espiras e giram com a mesma velocidade angular, as tensões induzidas nesses enrolamentos possuem a mesma amplitude, forma de onda e frequência.

A soma das tensões a qualquer instante em um gerador trifásico é igual a zero. Sua representação fasorial e demonstração de soma nula é mostrada na Figura 2.2.

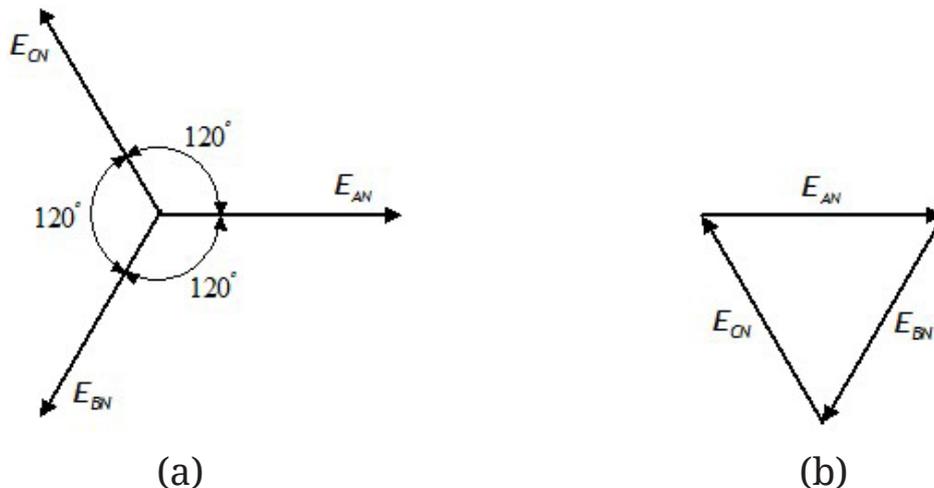


Figura 2.2 - a) Representação fasorial; b) Demonstração de soma nula

Sequência de fase

A sequência de fase de um gerador trifásico é obtida fazendo girar o eixo cartesiano no sentido anti-horário em relação a um ponto fixo. Para o sistema da Figura 2.2 temos a seguinte sequência de fases:

$$a, b, c \rightarrow E_{AN}e^{j0^\circ}, E_{BN}e^{-j120^\circ}, E_{CN}e^{j120^\circ}$$

Quando tomamos a fase a na referência.

Mudando a referência para a mesma sequência anterior, teremos somente duas possibilidades:

$$\mathbf{b, c, a} \rightarrow E_{BN}e^{j0^\circ}, E_{CN}e^{-j120^\circ}, E_{AN}e^{j120^\circ}$$

$$\mathbf{c, a, b} \rightarrow E_{CN}e^{j0^\circ}, E_{AN}e^{-j120^\circ}, E_{BN}e^{j120^\circ}$$

Mudando a sequência de fase em relação à sequência abc, teremos somente:

$$\mathbf{a, c, b} \rightarrow E_{AN}e^{j0^\circ}, E_{CN}e^{-j120^\circ}, E_{BN}e^{j120^\circ}$$

o que equivale a:

$$\mathbf{c, b, a} \rightarrow \mathbf{b, a, c}$$

Podemos concluir, portanto, que:

- Há apenas duas relações de fase possíveis entre a tensão da fase a e a tensão da fase b .
- Em um sistema trifásico equilibrado, se conhecermos a sequência de fase de uma das tensões do conjunto, conheceremos o conjunto inteiro.

2.3 - O gerador conectado em Y

As conexões dos terminais das bobinas do gerador são normalmente feitas em estrela (Y) ou em triângulo (Δ). Quando três terminais N são conectados entre si, o gerador é denominado “gerador trifásico conectado em Y”. Sua representação esquemática é mostrada na *Figura 2.3* conectada a uma carga trifásica.

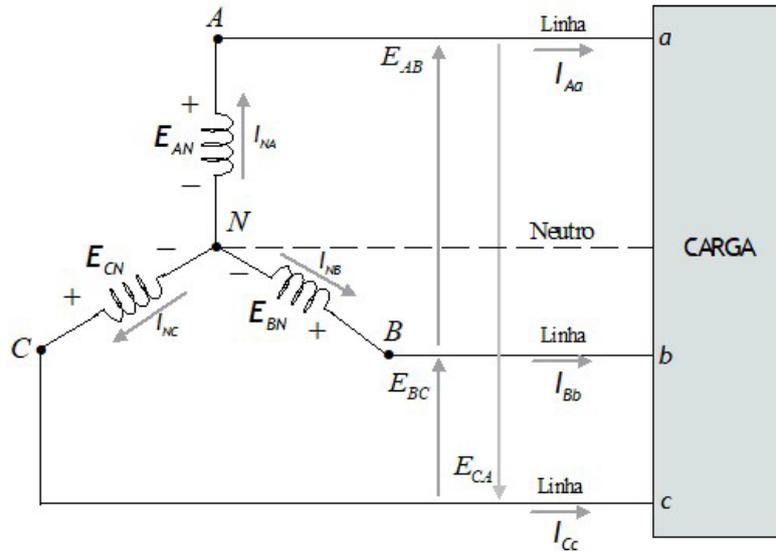


Figura 2.3 - Gerador trifásico conectado em Y

À medida que o eixo do gerador gira acionado por uma força externa, as tensões induzidas e_{AN} , e_{BN} e e_{CN} são geradas simultaneamente.

2.4 - Tensões de linha e de fase para conexão em Y

2.4.1 - Representação fasorial

A representação fasorial das tensões de linha neste caso é ilustrada na Figura 2.4.

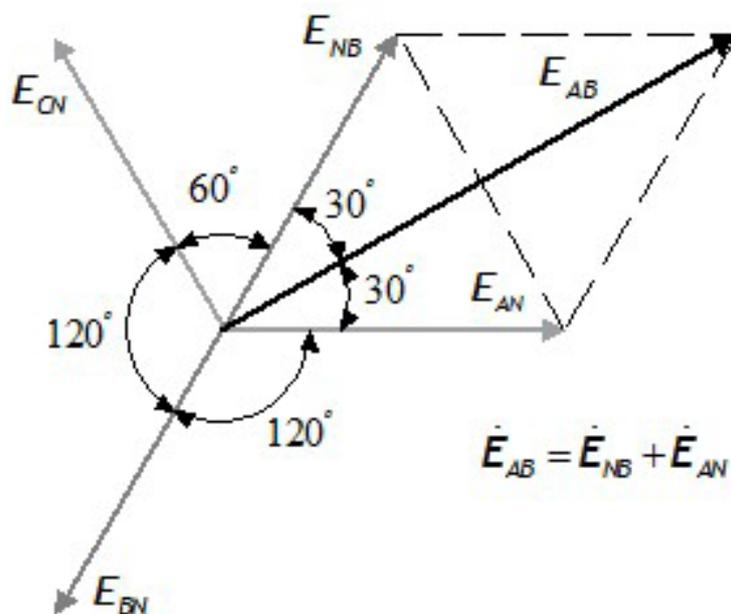


Figura 2.4 - Formação das tensões de linha

Calculando o módulo das tensões de linha, teremos:

$$E_{AB} = 2 E_{AN} \cos(30^\circ)$$

$$E_{AB} = 2 E_{AN} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$E_{AB} = \sqrt{3} E_{AN}$$

Na sequência de fase ABC, as tensões de linha serão:

$$\dot{E}_{AB} = \sqrt{3} E_{AN} e^{-j30^\circ}$$

$$\dot{E}_{BC} = \sqrt{3} E_{BN} e^{-j150^\circ}$$

$$\dot{E}_{CA} = \sqrt{3} E_{CN} e^{j90^\circ}$$

Expressão matemática

As expressões matemáticas dos fasores de tensão e corrente são representadas na forma polar. Portanto, para um sistema trifásico equilibrado com sequência ABC, temos:

Tensões de fase

$$\begin{aligned} E_{AN} &= 0,707 E_{max} ; & \dot{E}_{AN} &= E_{AN} e^{j0^\circ} \\ E_{BN} &= 0,707 E_{max} ; & \dot{E}_{BN} &= E_{BN} e^{-j120^\circ} \\ E_{CN} &= 0,707 E_{max} ; & \dot{E}_{CN} &= E_{CN} e^{j120^\circ} \end{aligned}$$

$$\dot{E}_{AN} + \dot{E}_{BN} + \dot{E}_{CN} = 0$$

Tensões de linha

$$\begin{aligned} \dot{E}_{AB} &= \sqrt{3} E_{AN} e^{j30^\circ} \\ \dot{E}_{BC} &= \sqrt{3} E_{BN} e^{-j90^\circ} \\ \dot{E}_{CA} &= \sqrt{3} E_{CN} e^{j150^\circ} \end{aligned}$$

Diagrama fasorial

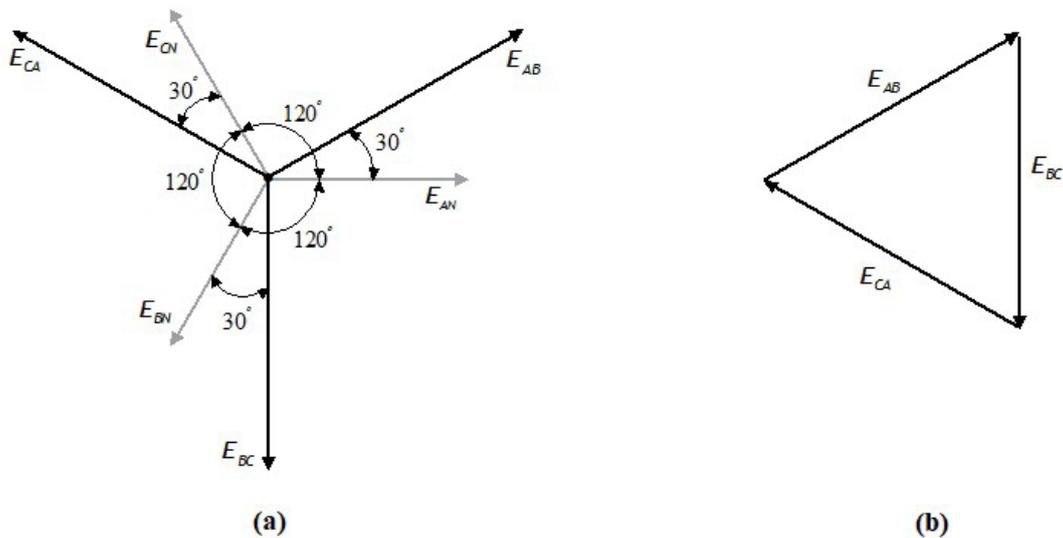


Figura 2.6 - a)-Tensões de linha e fase; b)-Soma das tensões de linha

Da mesma forma, concluímos que a soma fasorial das tensões de linha e de fase é, portanto, nula, onde:

$$\dot{E}_{AB} + \dot{E}_{BC} + \dot{E}_{CA} = 0$$

2.4.2 – Representação instantânea

Expressão matemática

Para um sistema trifásico de sequência *abc*, as formas de onda da tensão instantânea nas fases *a*, *b* e *c* são expressas por:

$$\begin{aligned} e_{AN}(t) &= E_{max} \text{sen}(\omega t) \\ e_{BN}(t) &= E_{max} \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \\ e_{CN}(t) &= E_{max} \text{sen}(\omega t + 120^\circ) \end{aligned}$$

Elas são ilustradas na *Figura 2.5*, onde as amplitudes das tensões são normalizadas. Assim, podemos notar em $t=0$, que as amplitudes de e_{BN} e e_{CN} assumem um valor de 86,6% de seus respectivos valores máximos, e, que, a cada passo de 60° , uma tensão passa pelo zero, conforme demonstrado. Tal propriedade é usada em sistemas de potência na geração de tensão PWM em fontes chaveadas.

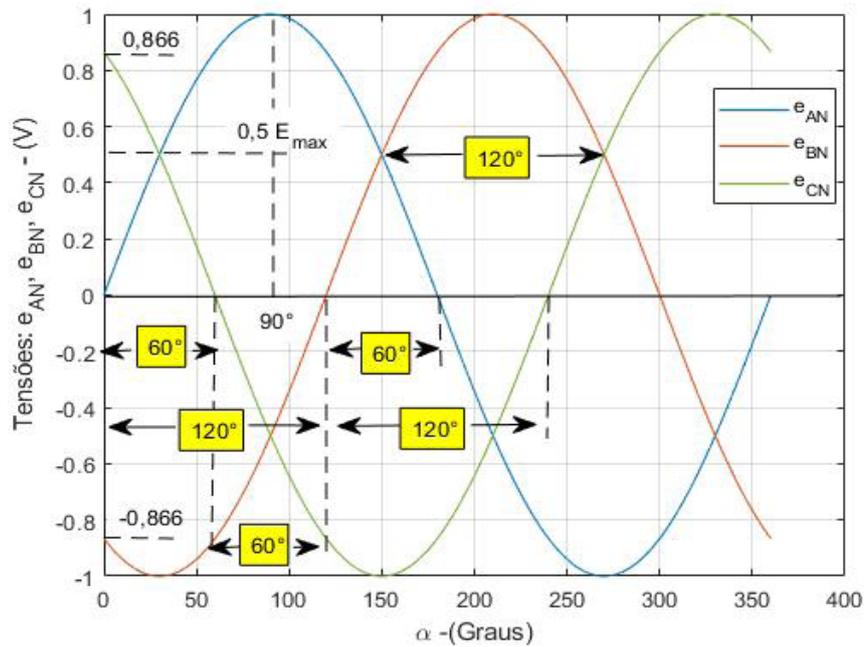


Figura 2.5 - Representação das tensões trifásicas instantâneas

2.5 - Conexão Y-Y entre gerador e carga

Quando a carga é equilibrada, a conexão do neutro pode ser removida sem que o circuito seja afetado, ou seja, se:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z$$

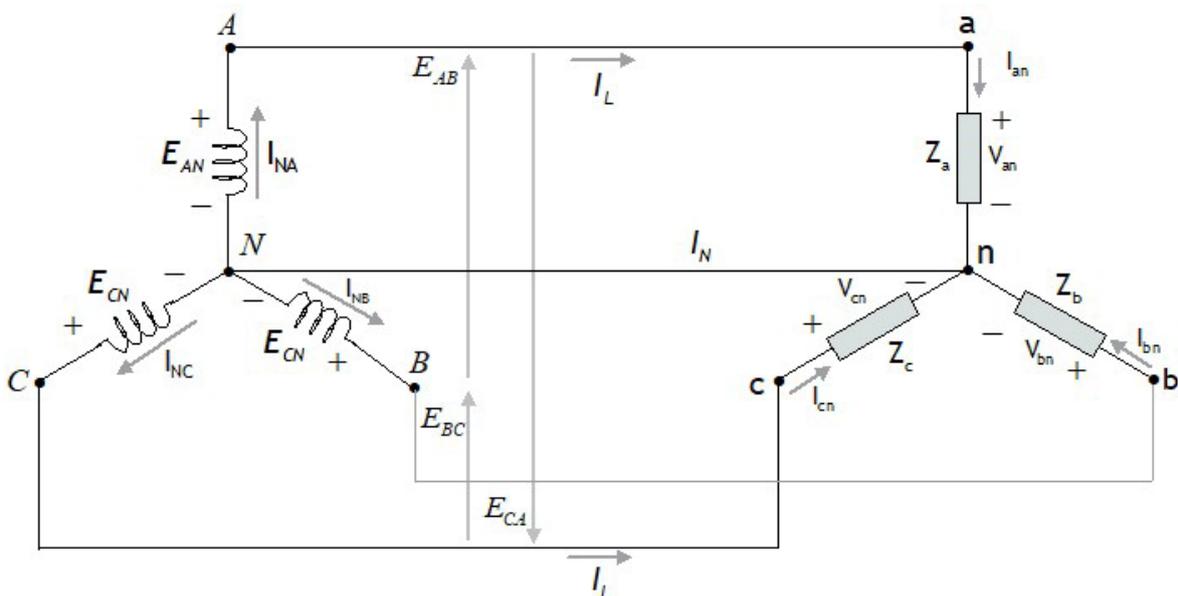


Figura 2.7 - Conexão Y-Y entre gerador e carga

As três correntes de fase do gerador são iguais às três correntes de linha, que, por sua vez, são iguais às três correntes de fase da carga conectada em Y, onde:

$$I_L = I_{NA} = I_{an} = \frac{V_{an}}{Z}$$

Propagação das tensões e correntes

A rigor, como as fases das tensões no gerador são formadas nas bobinas, a tensão em uma fase está adiantada de 90° em relação à corrente que a produziu. Tomando as correntes do gerador na referência e propagando seus efeitos até a carga, teremos numa sequência *abc*:

Gerador

$$\text{Correntes: } I_{NA}e^{j0^\circ}, \quad I_{NB}e^{-j120^\circ}, \quad I_{NC}e^{j120^\circ}$$

$$\text{Tensões: } E_{AN}e^{j90^\circ}, \quad E_{BN}e^{-j30^\circ}, \quad E_{CN}e^{-j150^\circ}$$

Linha

$$\text{Correntes: } I_{Aa}e^{j0^\circ}, \quad I_{Bb}e^{-j120^\circ}, \quad I_{Cc}e^{j120^\circ}$$

$$\text{Tensões: } \dot{E}_{AB} = \sqrt{3}E_{AN}e^{j120^\circ}; \quad \dot{E}_{BC} = \sqrt{3}E_{BN}e^{j0^\circ};$$

$$\dot{E}_{CA} = \sqrt{3}E_{CN}e^{-j120^\circ}$$

Carga

$$\text{Correntes: } I_{an}e^{j0^\circ}, \quad I_{bn}e^{-j120^\circ}, \quad I_{cn}e^{j120^\circ}$$

$$\text{Tensões: } \dot{V}_{an} = Z_1 I_{an} e^{j\theta_{z1}}; \quad \dot{V}_{bn} = Z_2 I_{bn} e^{j(\theta_{z2}-120^\circ)};$$

$$\dot{V}_{cn} = Z_3 I_{cn} e^{j(\theta_{z3}+120^\circ)}$$

Onde podemos notar que as correntes permanecem as mesmas no gerador, na linha e na carga. Na linha, a referência das tensões é deslocada para a fase **b** e, na carga e, as quedas de tensão são adiantadas do ângulo da impedância, mantendo a referência na fase **a** tal como a sequência das correntes no gerador.

2.6 - O gerador conectado em Δ

O gerador trifásico conectado em Δ também é conhecido como gerador trifásico a três fios. Neste sistema, a tensão de linha tem o mesmo valor que as tensões de fase induzidas nos enrolamentos do gerador. A falta do ponto neutro permite flutuação nas tensões, tornando-o indesejável em algumas aplicações. Por outro lado, sua topologia garante estabilidade das tensões na falta de uma fase. Sua representação esquemática é mostrada na *Figura 2.8* alimentando uma carga trifásica.

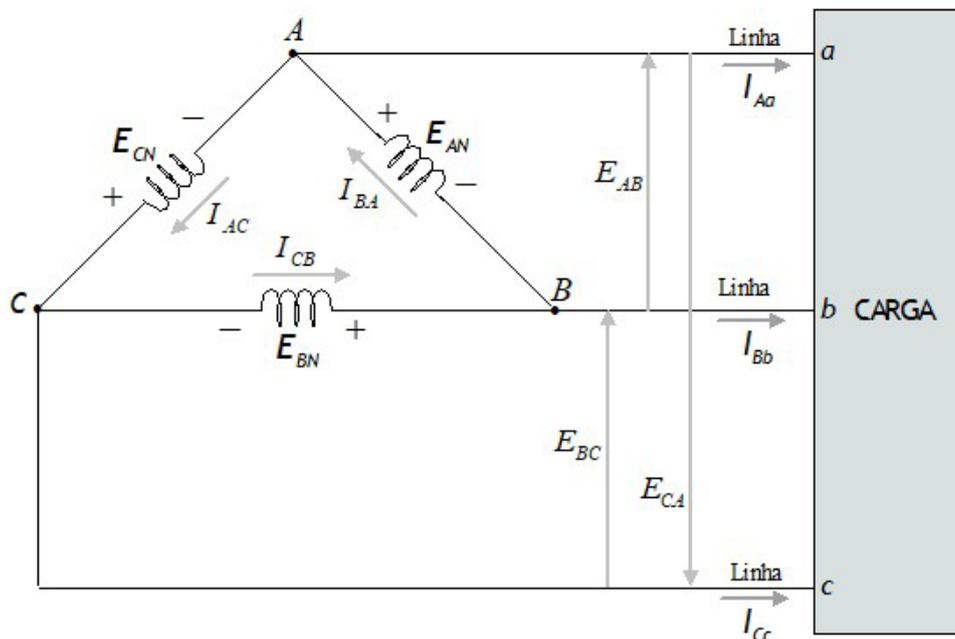


Figura 2.8 - Gerador trifásico conectado em Δ

2.6.1 – Representação Fasorial

Para um gerador trifásico equilibrado com sequência de fase ABC, temos:

$$E_L = E_{AN} = E_{BN} = E_{CN} = E_{AB} = E_{BC} = E_{CA}$$

A sequência para as correntes de fase será, portanto:

$$I_{BA}e^{j0^\circ}, I_{CB}e^{-j120^\circ}, I_{AC}e^{j120^\circ}$$

A relação entre as duas correntes pode ser determinada aplicando a 2ª Lei de Kirchhoff a um dos nós do circuito, calculando as correntes de linha em função das correntes de fase. Para o nó A (*Figura 2.8*) teremos:

$$\dot{i}_{BA} = \dot{i}_{Aa} + \dot{i}_{Ac}$$

onde:

$$\dot{i}_{Aa} = \dot{i}_{BA} - \dot{i}_{Ac} = \dot{i}_{BA} + \dot{i}_{CA}$$

conforme a representação fasorial mostrada na *Figura 2.9*.

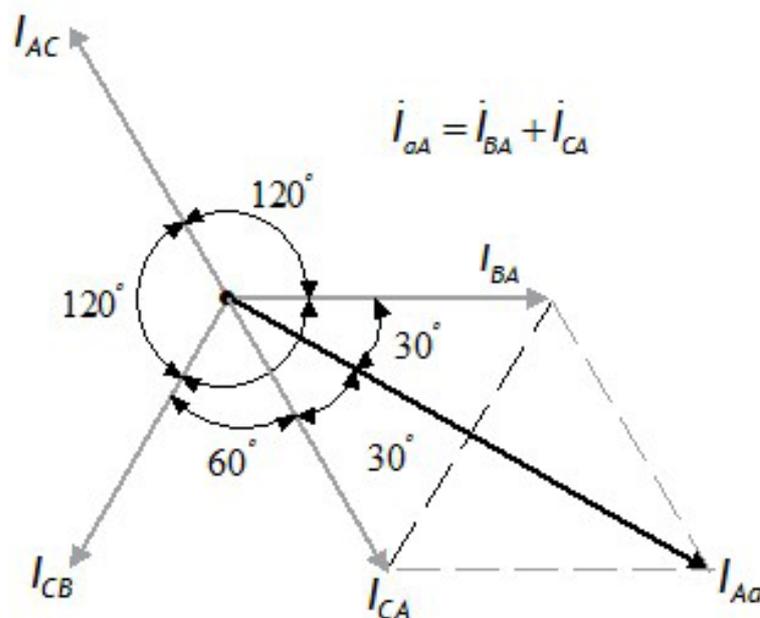


Figura 2.9 - Determinação da corrente de linha para a conexão Δ .

Calculando as correntes na linha, teremos:

$$I_{Aa} = 2 I_{BA} \cos(30^\circ)$$

$$I_{Aa} = 2 I_{BA} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_{Aa} = \sqrt{3} I_{BA}$$

Na sequência de fases *abc*, obtemos:

$$\dot{I}_{Aa} = \sqrt{3} I_{BA} e^{-j30^\circ}$$

$$\dot{I}_{Bb} = \sqrt{3} I_{CB} e^{-j150^\circ}$$

$$\dot{I}_{Cc} = \sqrt{3} I_{AC} e^{j90^\circ}$$

Da mesma forma, concluímos que as somas fasoriais das correntes de linha e de fase são, portanto, nulas, onde:

$$\dot{I}_{Aa} + \dot{I}_{Bb} + \dot{I}_{Cc} = 0$$

O diagrama fasorial completo das correntes é mostrado na *Figura 2.10*.

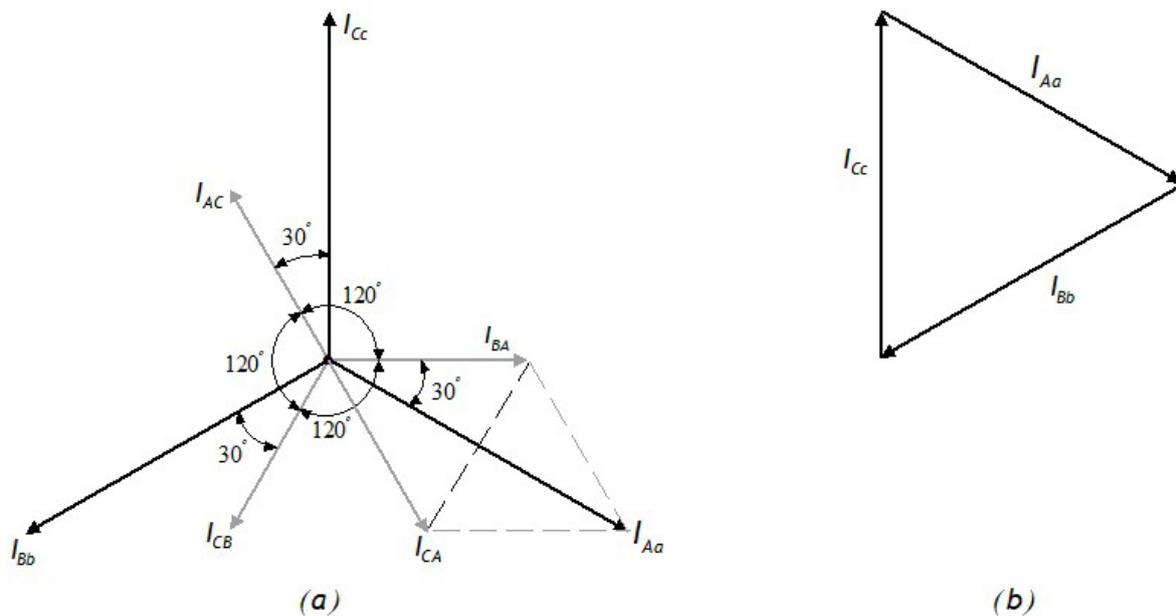


Figura 2.10 - Diagrama fasorial. a) Correntes de linha e fase. b) Demonstração de soma nula das correntes

Representação instantânea

Os valores instantâneos das correntes de fase na sequência *ABC* são:

$$\begin{aligned}i_{BA}(t) &= \sqrt{2} I_{BA} \text{sen}(\omega t) \\i_{CB}(t) &= \sqrt{2} I_{CB} \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \\i_{AC}(t) &= \sqrt{2} I_{AC} \text{sen}(\omega t + 120^\circ)\end{aligned}$$

Sendo $I_L = \sqrt{3}$ vezes a corrente de fase, e o ângulo atrasado de 30° , teremos:

$$\begin{aligned}i_{Aa}(t) &= \sqrt{6} I_{BA} \text{sen}(\omega t - 30^\circ) \\i_{Bb}(t) &= \sqrt{6} I_{CB} \text{sen}(\omega t - 150^\circ) \\i_{Cc}(t) &= \sqrt{6} I_{AC} \text{sen}(\omega t - 90^\circ)\end{aligned}$$

2.7 - Associação Gerador-Carga

No estudo de um sistema ideal de transmissão de energia, a impedância da linha assim como o efeito da indutância mútua existente entre elas são desprezados para efeito didático.

Em um sistema trifásico ideal envolvendo gerador e carga, tanto as bobinas do gerador quanto das cargas podem ser conectadas em triângulo (Δ) ou estrela (Y). Portanto, tal sistema proporciona 2² possibilidades de associação, ou seja:

Y-Y

Y- Δ

Δ -Y

Δ - Δ

onde o sistema Y-Y foi anteriormente abordado.

a) Sistema Y- Δ

No sistema Y- Δ , o lado do triângulo impõe o uso de três fios em suas conexões, excluindo o uso do neutro. A *Figura 2.11* ilustra esta configuração.

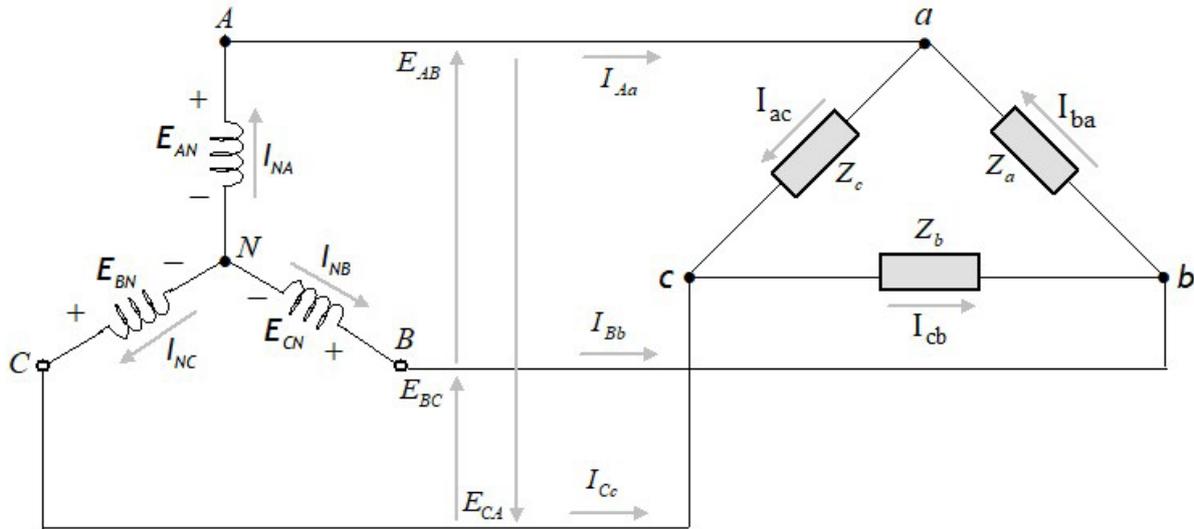


Figura 2.11 - Sistema trifásico gerador-carga - (Y-Δ)

Em um sistema trifásico equilibrado, sendo:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_L$$

As tensões de fase da carga são iguais às tensões de linha E_L no gerador, mesmo que a carga não esteja equilibrada, assim, de forma genérica:

$$\{E_{AB}, E_{BC}, E_{CA}\} = E_L, \text{ onde } V_{\phi L} = \{V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}\} = E_L$$

A relação entre as correntes de fase e de linha podem ser obtidas usando a abordagem anterior, onde a corrente de linha é dada por:

$$I_L = \sqrt{3} I_{\phi L} \text{ onde } I_{\phi L} = \{I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}\}$$

Em um sistema equilibrado os módulos das tensões na carga serão, portanto,

$$V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = E_L$$

Propagação das tensões e correntes

Como as tensões de fase nas bobinas do gerador são induzidas do fluxo gerado por suas correntes, fixamos tais correntes na referência, de forma que:

Gerador

Correntes:

$$I_{NA}e^{j0^\circ}, I_{NB}e^{-j120^\circ}, I_{NC}e^{j120^\circ}$$

Tensões:

$$E_{AN}e^{j90^\circ}, E_{BN}e^{-j30^\circ}, E_{CN}e^{-j150^\circ}$$

onde:

$$E_{AN} = E_{BN} = E_{CN} = E_\phi \text{ em um sistema equilibrado.}$$

Linha

Correntes:

$$I_{NA}e^{j0^\circ}, I_{NB}e^{-j120^\circ}, I_{NC}e^{j120^\circ}$$

Tensões:

$$\sqrt{3}E_{AN}e^{j120^\circ}, \sqrt{3}E_{BN}e^{j0^\circ}, \sqrt{3}E_{CN}e^{-j120^\circ}$$

$$E_{AB}e^{j120^\circ}, E_{BC}e^{j0^\circ}, E_{CA}e^{-j120^\circ}$$

Carga

As correntes na carga dependem da tensão de linha do gerador, onde:

$$\dot{I}_{\phi L} = \frac{\dot{E}_L}{\dot{Z}_L}$$

Os fasores de corrente são dados por:

$$\dot{I}_{ba} = \frac{\dot{V}_{ab}}{\dot{Z}_a} ; \dot{I}_{cb} = \frac{\dot{V}_{bc}}{\dot{Z}_b} ; \dot{I}_{ac} = \frac{\dot{V}_{ca}}{\dot{Z}_c}$$

Para um sistema desequilibrado, teremos a expressão na forma geral, onde:

$$\frac{V_{ab}}{Z_a} e^{j(120^\circ - \theta_{za})} ; \frac{V_{bc}}{Z_b} e^{-j\theta_{zb}} ; \frac{V_{ca}}{Z_c} e^{-j(120^\circ + \theta_{zc})}$$

Portanto, as correntes em um sistema equilibrado resultam:

$$I_{\phi L} e^{j(120^\circ - \theta_{zL})} ; I_{\phi L} e^{-j\theta_{zL}} ; I_{\phi L} e^{-j(120^\circ + \theta_{zL})}$$

onde:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_L ; I_{ba} = I_{cb} = I_{ac} = I_{\phi L} \text{ e} \\ \theta_{za} = \theta_{zb} = \theta_{zc} = \theta_{zL}$$

Portanto, para uma sequência *abc* imposta pelo gerador onde a fase *a* se situa na referência, teremos na carga, um deslocamento de $-\theta_{zL}$ desta referência, na fase *b* do ponto de vista da corrente.

b) Sistema Δ -Y

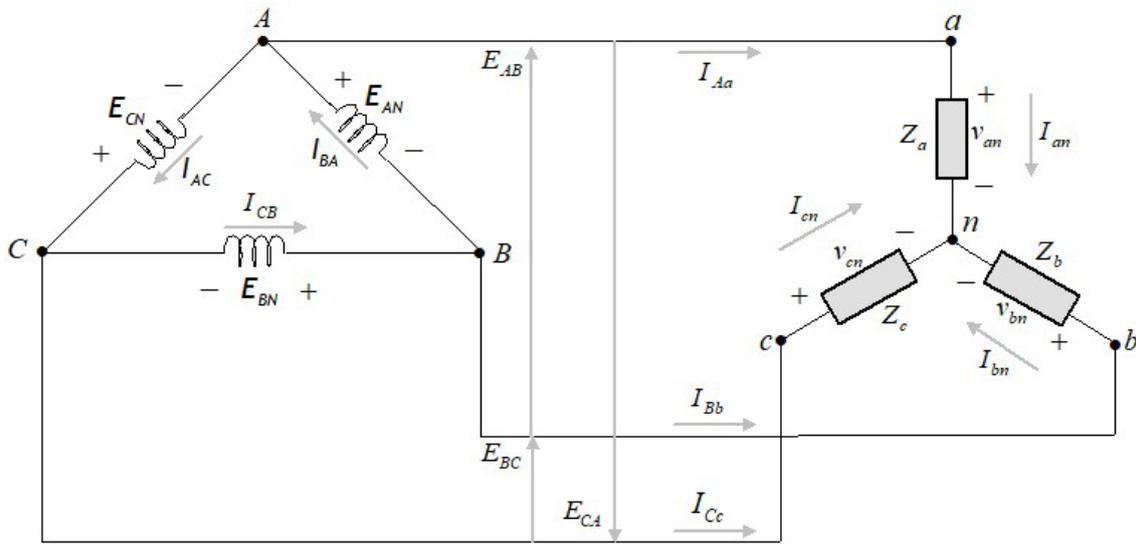


Figura 2.12 - Sistema trifásico gerador-carga (Δ -Y)

No sistema Δ -Y, a corrente na carga é igual à corrente na linha. Também é destituído do terminal de neutro entre gerador e carga, e tem a corrente como referência.

É usado na geração de altas correntes, uma vez que multiplica a corrente I_ϕ por $\sqrt{3}$.

Em um sistema equilibrado, temos:

$$I_{\phi L} = I_L$$

A sequência de fase é imposta pela sequência das correntes de linha do gerador.

Em um sistema equilibrado, as cargas serão:

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_L$$

Propagação das tensões e correntes

Gerador

Correntes:

$$I_{BA} e^{j0^\circ} ; I_{Cb} e^{-j120^\circ} ; I_{AC} e^{j120^\circ}$$

Tensões:

$$E_{AB} e^{j90^\circ} ; E_{BC} e^{-j30^\circ} ; E_{CA} e^{-j150^\circ}$$

Linha

Tensões:

$$E_{AB} e^{j90^\circ} ; E_{BC} e^{-j30^\circ} ; E_{CA} e^{-j150^\circ}$$

Carga

Tensões:

$$\frac{E_{AB}}{\sqrt{3}} e^{j60^\circ} ; \frac{E_{BC}}{\sqrt{3}} e^{-j60^\circ} ; \frac{E_{CA}}{\sqrt{3}} e^{-j180^\circ}$$

Sistema equilibrado:

$$\frac{E_{AB}}{\sqrt{3}} = \frac{E_{BC}}{\sqrt{3}} = \frac{E_{CA}}{\sqrt{3}} = V_{an} = V_{bn} = V_{cn} = V_{\phi L}$$

que resulta em:

$$V_{\phi L} e^{j60^\circ} ; V_{\phi L} e^{-j60^\circ} ; V_{\phi L} e^{-j180^\circ}$$

Correntes:

$$\frac{V_{an}}{Z_a} e^{j(60^\circ - \theta_{Za})}; \frac{V_{bn}}{Z_b} e^{-j(60^\circ + \theta_{Zb})}; \frac{V_{cn}}{Z_c} e^{-j(180^\circ + \theta_{Zc})}$$

onde:

$$I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} = I_L = I_{an} = I_{bn} = I_{cn} = I_{\phi L}$$

e:

$$I_{\phi L} = \frac{V_L}{Z_L} \text{ em um sistema equilibrado}$$

c) O sistema Δ - Δ

O sistema Δ - Δ tem como referência a corrente de fase fornecida pelo gerador e é destituído de terminal neutro. Caracteriza-se pelo fato de que a tensão de fase na carga é a mesma propagada na linha e no gerador, ou seja:

$$\dot{V}_{\phi L} = \dot{V}_L = \dot{E}_\phi$$

Traz como vantagem o fato de que um dano provocado em uma das cargas não interfere nas demais, mantendo estáveis suas tensões. A relação entre o módulo da corrente de fase e o da corrente de linha é dada por:

$$I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

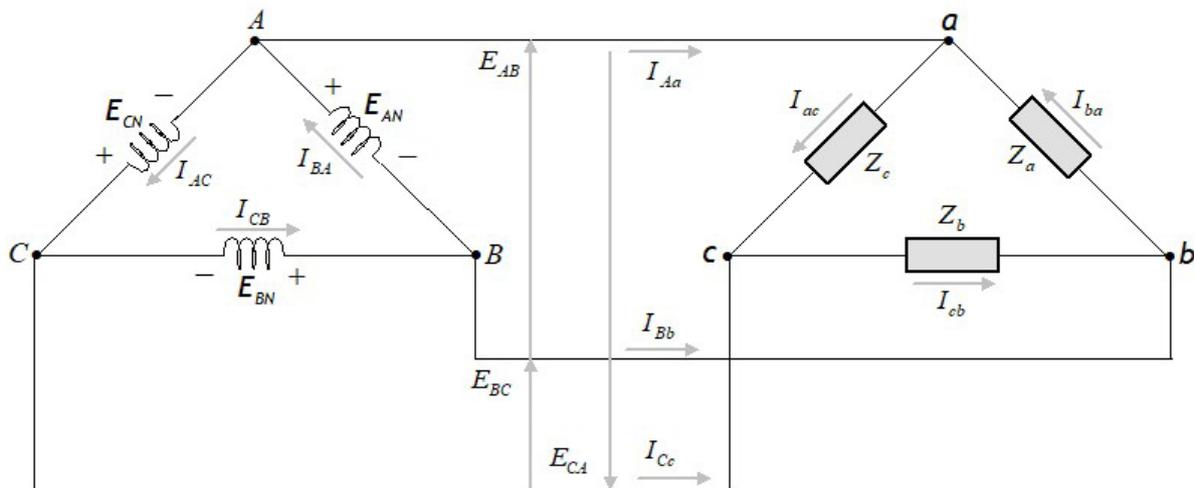


Figura 2.13 - Sistema trifásico gerador-carga (Δ - Δ)

Uma seqüência *abc* nas *correntes de fase* do gerador impõe uma seqüência *abc* nas correntes de linha e de carga. Os módulos das correntes na carga são obtidos em função da tensão de fase propagada do gerador. Assim teremos:

Gerador

Correntes:

$$\dot{I}_{BA} e^{j0^\circ} ; \dot{I}_{CB} e^{-j120^\circ} ; \dot{I}_{AC} e^{j120^\circ}$$

Tensões:

$$\dot{E}_{AB} e^{j90^\circ} ; \dot{E}_{BC} e^{-j30^\circ} ; \dot{E}_{CA} e^{j210^\circ}$$

Linha

Tensões:

$$\dot{E}_{AB} e^{j90^\circ} ; \dot{E}_{BC} e^{-j30^\circ} ; \dot{E}_{CA} e^{j210^\circ}$$

Carga

Tensões:

$$\dot{E}_{AB} e^{j90^\circ}; E_{BC} e^{-j30^\circ}; \dot{E}_{CA} e^{j210^\circ}$$

Correntes:

$$\dot{i}_{ba} = \frac{V_{ab}}{Z_a} e^{j(90^\circ - \theta_{za})}; \dot{i}_{cb} = \frac{V_{bc}}{Z_b} e^{-j(30^\circ + \theta_{zb})}; \dot{i}_{ac} = \frac{V_{ca}}{Z_c} e^{j(210^\circ - \theta_{zc})}$$

que, em um sistema equilibrado, resulta em:

$$V_{ab} = V_{bc} = V_{ca} = E_{AB} = E_{BC} = E_{CA} = V_{\phi L}$$

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_L$$

Tensões:

$$V_{\phi L} e^{j90^\circ}; V_{\phi L} e^{-j30^\circ}; V_{\phi L} e^{j210^\circ}$$

Correntes:

$$I_{\phi L} e^{j(90^\circ - \theta_{zL})}; I_{\phi L} e^{-j(30^\circ + \theta_{zL})}; I_{\phi L} e^{j(210^\circ - \theta_{zL})}$$

É fácil perceber que seus ângulos retornam ao valor inicial da corrente no gerador se a carga trifásica for formada por bobinas, e, também, que seus módulos permanecem os mesmos para os mesmos valores de reatância dessas bobinas.

Portanto, podemos concluir que, em todas as configurações apresentadas, o ângulo das impedâncias provoca um atraso nas correntes para cargas predominantemente indutivas.

2.8 Exercício

Dado o sistema trifásico Y-Y na *Figura 2.14*, onde o sistema de tensões está na referência, sendo: $\dot{E}_{AN} = 120 e^{j0^\circ}$ (V); $\dot{E}_{BN} = 120 e^{j\theta_2}$ (V); $\dot{E}_{CN} = 120 e^{j\theta_3}$ (V), $R = 3(\Omega)$; $X_L = 4(\Omega)$, onde a sequência de fase do gerador nessa figura é ABC:

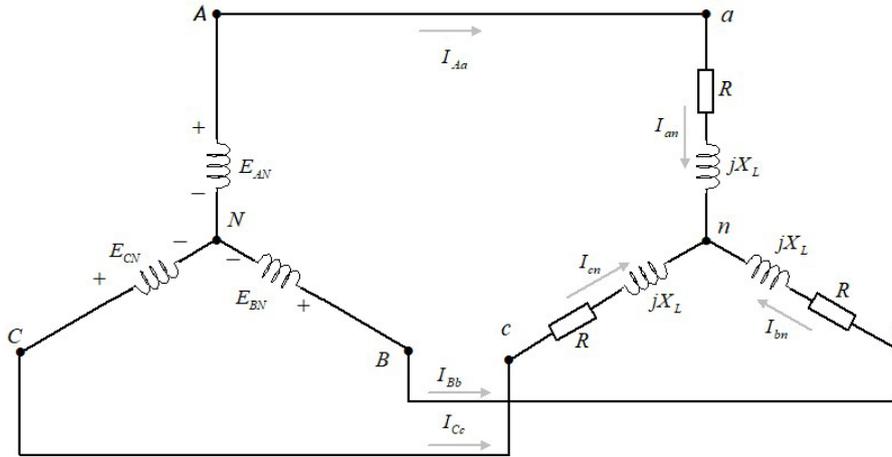


Figura 2.14 – Exercício 2.8

- Calcule os ângulos θ_2 e θ_3 .
- Esboce o diagrama fasorial das tensões de linha do gerador.
- Determine os fasores das tensões de fase na carga.
- Esboce o diagrama fasorial das tensões na carga.
- Determine os fasores das correntes de linha.
- Esboce o diagrama fasorial das correntes.
- Verifique que, como a carga é balanceada, $I_N = 0$.

Respostas:

a) $\theta_2 = 0^\circ; \theta_3 = -120^\circ$

c) $\dot{E}_{AB} = 208e^{j30^\circ} \text{ (V)}; \dot{E}_{BC} = 208 e^{-j90^\circ} \text{ (V)}; \dot{E}_{CA} = 208 e^{j150^\circ} \text{ (V)}.$

d) $\dot{V}_{ab} = 120 e^{j0^\circ} \text{ (V)}; \dot{V}_{bc} = 120e^{-j120^\circ} \text{ (V)}; \dot{V}_{ca} = 120 e^{j120^\circ} \text{ (V)}.$

e) $\dot{I}_{Aa} = 24 e^{-j53,13} \text{ (A)}; \dot{I}_{Bb} = 24 e^{-j173,13^\circ} \text{ (A)}; \dot{I}_{Cc} = 24 e^{j66,87} \text{ (A)}.$

POTÊNCIA EM SISTEMAS TRIFÁSICOS

3

3.1 – Considerações iniciais

Em sistemas trifásicos de transmissão de energia, transformadores, motores e geradores têm seus terminais de saída ligados à linha de transmissão e transportam, portanto, tensões e correntes de linha. A identificação da tensão de fase interna no gerador ou no transformador depende do conhecimento da configuração interna de suas bobinas. Nesses dispositivos, uma vez conhecidas as configurações, tensões e correntes de linha, podemos calcular a potência entregue à linha de transmissão. Em um gerador com as bobinas do estator configuradas em Y, 4 fios fornecem energia à linha, onde três correspondem aos pontos de fase, e um ao neutro das bobinas. Em configurações Δ , somente três fios fornecem energia à linha. A prática de medidas das potências monofásica e trifásica elucidada a interpretação física da potência CA, tornando mais claro o sentido do fluxo de energia nesses sistemas.

3.2 Carga equilibrada conectada em Y

Em um sistema equilibrado para uma carga conectada em Y, temos:

$$I_L = I_\phi = I_a = I_b = I_c$$

$$E_L = \sqrt{3}E_\phi = E_{ab} = E_{bc} = E_{ca}$$

$$Z_a = Z_b = Z_c = R_\phi \pm jX_\phi$$

a) Potência média ou ativa

A potência média fornecida a cada fase pode ser determinada por meio de qualquer uma das seguintes equações:

$$P_\phi = E_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = R_\phi I_\phi^2 = \frac{V_R^2}{R_\phi}$$

Onde $\theta_{I_\phi}^{E_\phi}$ indica que θ é o ângulo de fase entre E_ϕ e I_ϕ . A potência total em watts (W) fornecida à carga equilibrada é:

$$P_T = 3P_\phi$$

Como:

$$E_\phi = \frac{E_L}{\sqrt{3}} \quad e \quad I_\phi = I_L$$

então:

$$P_T = 3 \frac{E_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi}$$

racionalizando, obtemos:

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = 3R_\phi I_L^2 = 3 \frac{V_R^2}{R_\phi}$$

b) Potência Reativa

A potência reativa em VAR associada a cada fase da carga \pm é:

$$Q_\phi = E_\phi I_\phi \sin \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = \pm X_\phi I_\phi^2 = \pm \frac{V_X^2}{X_\phi}$$

A potência reativa total na carga é:

$$Q_T = 3 Q_\phi$$

da mesma forma, obtemos:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \sin \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = \pm 3X_\phi I_L^2 = \pm 3 \frac{V_X^2}{X_\phi}$$

c) Potência Aparente

A potência aparente em VA associada a cada fase é:

$$S_{\phi} = \pm E_{\phi} I_{\phi} = \pm Z_{\phi} I_{\phi}^2 = \pm \frac{E_{\phi}^2}{Z_{\phi}}$$

A potência aparente total na carga é:

$$S_T = \pm 3 S_{\phi}$$

ou seja:

$$S_T = \pm \sqrt{3} E_L I_L$$

d) Fator de potência

O fator de potência do sistema é dado por:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \cos \theta_{I_{\phi}}^{E_{\phi}}$$

3.3 - Carga equilibrada conectada em Δ

Em um sistema equilibrado para uma carga conectada em Δ , resulta:

$$\begin{aligned}E_L &= E_\phi = E_a = E_b = E_c \\I_L &= \sqrt{3}I_\phi = I_{Aa} = I_{Bb} = I_{Cc} \\Z_a &= Z_b = Z_c = R_\phi \pm jX_\phi\end{aligned}$$

a) Potência média ou ativa

$$P_\phi = E_\phi I_\phi \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = R_\phi I_\phi^2 = \frac{V_R^2}{R_\phi}$$

A potência total fornecida à carga equilibrada é:

$$P_T = 3P_\phi$$

que é dado em W (watts).

como:

$$I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad e \quad E_\phi = E_L$$

então:

$$P_T = 3 E_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi}$$

que, racionalizando, resulta:

$$P_T = \sqrt{3} E_L I_L \cos \theta_{I_\phi}^{E_\phi} = 3R_\phi I_L^2 = 3 \frac{V_R^2}{R_\phi}$$

b) Potência Reativa

No gerador, a potência reativa em VAR associada a cada fase no triângulo é:

$$Q_{\phi} = E_{\phi} I_{\phi} \text{sen}(\theta_{I_{\phi}}^{E_{\phi}}) = \pm X_{\phi} I_{\phi}^2 = \pm \frac{V_X^2}{X_{\phi}}$$

A potência reativa total na carga é:

$$Q_T = \pm 3 Q_{\phi}$$

Da mesma forma, obtemos:

$$Q_T = \sqrt{3} E_L I_L \text{sen} \theta_{I_{\phi}}^{E_{\phi}} = \pm 3 X_{\phi} I_L^2$$

c) Potência Aparente

A potência aparente em VA associada a cada fase no triângulo é:

$$S_{\phi} = \pm E_{\phi} I_{\phi} = \pm Z_{\phi} I_{\phi}^2 = \pm \frac{E_{\phi}^2}{Z_{\phi}}$$

Da mesma forma, a potência aparente total na carga resulta em:

$$S_T = \pm \sqrt{3} E_L I_L$$

d) Fator de potência

O fator de potência do sistema é, portanto:

$$F_p = \frac{P_T}{S_T} = \cos \theta_{I_{\phi}}^{E_{\phi}}$$

3.4 - Medida de potência em circuitos trifásicos

Cargas desequilibradas

a) Método dos dois wattímetros

A potência fornecida a um wattímetro trifásico de 3 fios, conectados em Y ou em Δ , equilibrado ou não, pode ser medida com apenas dois wattímetros, se eles forem adequadamente conectados ao circuito e suas leituras interpretadas de maneira correta. A *Figura 3.1* ilustra o esquema de ligação.

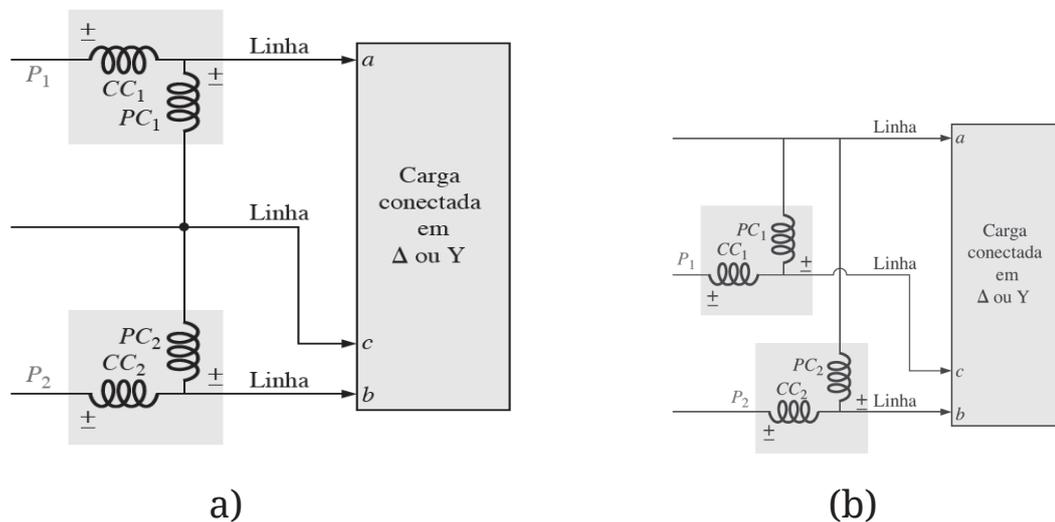


Figura 3.1 - a)- método dos dois wattímetros; b) esquema alternativo

Um dos terminais de cada bobina de tensão é conectado na mesma linha. As bobinas de corrente são conectadas nas outras duas linhas.

Este método exige o conhecimento do fator de potência na carga (não importando se é adiantado ou atrasado) para qualquer uma das fases conectadas à carga. Uma vez obtida essa informação, ela pode ser aplicada diretamente à curva da *Figura 3.2*.

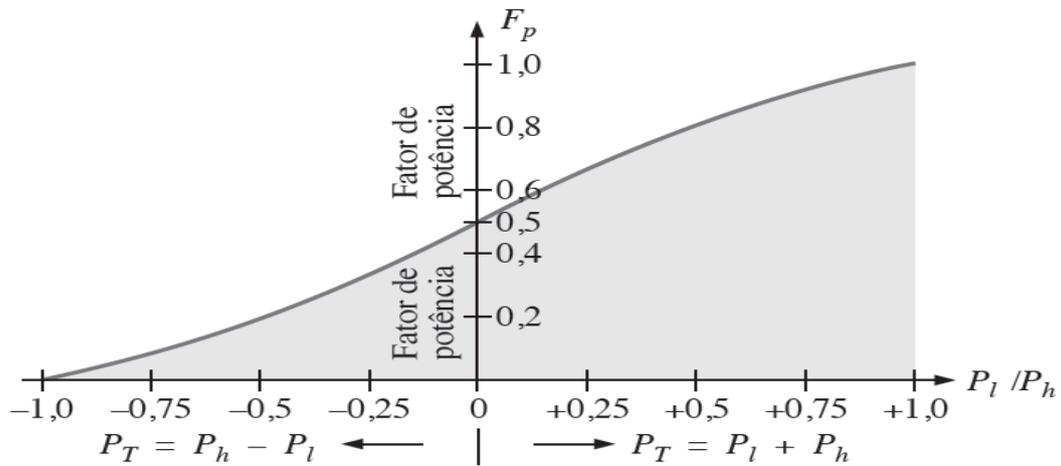


Figura 3.2 - Comportamento da leitura dos dois wattímetros

onde:

P_l → Menor potência medida nos wattímetros

P_h → Maior potência medida nos wattímetros

Para um fator de potência (adiantado ou atrasado) maior que 0,5, a razão é positiva. Isto indica que as leituras dos dois wattímetros são positivas e a potência total é a soma das leituras dos dois wattímetros. Ou seja,

$$F_p > 0,5 \rightarrow P_T = P_l + P_h$$

$$F_p = 1 \rightarrow P_l = P_h \rightarrow \text{carga resistiva}$$

$$F_p = 0 \rightarrow P_l = -P_h \rightarrow \frac{P_l}{P_h} = -1 \rightarrow \text{carga puramente reativa}$$

Como podemos observar na *Figura 3.2*, em $F_p = 0,5$ ocorre uma transição de uma razão negativa para uma positiva onde:

$$F_p = 0,5 \rightarrow \phi = \arccos(0,5) = 60^\circ$$

para:

$$\frac{P_l}{P_h} = 0 \text{ onde } P_l = 0$$

Sistema equilibrado

Para um sistema equilibrado a potência total medida será, portanto,

$$P_T = P_l \pm P_h = \sqrt{3}E_L I_L \cos \theta_{I\phi}^{V\phi}$$

onde:

$$F_p = \frac{P_l \pm P_h}{\sqrt{3}E_L I_L}$$

3.5 Medida de potência em sistemas monofásicos

Panorama das técnicas atuais

As técnicas de medida e conceito de potência em sistemas elétricos sob excitação senoidal têm suas bases muito bem estabelecidas. O interesse pelas características de sistemas elétricos com formas de ondas distorcidas sofreu um incremento no início desse século quando começaram a surgir os primeiros trabalhos voltados à análise e à definição de grandezas como potência ativa, reativa e aparente para sistemas deste tipo. Estes trabalhos iniciais tiveram um caráter mais científico do que o aplicado, pois fontes de sinais distorcidos não eram muito difundidas na época. Com o surgimento de cargas não-lineares (geradores de harmônicas) no sistema elétrico, houve um incentivo extra aos estudos no sentido de conceituar e estabelecer técnicas de medidas adequadas, tanto aos sistemas elétricos senoidais como aos distorcidos. Uma das principais alavancas deste processo de pesquisa e desenvolvimento foi o surgimento e emprego em larga escala dos *dispositivos de chaveamento de potência em estado sólido*; com isso, a transmissão e geração de sinais de potência distorcidos subiram drasticamente. A partir desse momento, questões como a definição de potência, propriedades e técnicas para medir grandezas elétricas desses sistemas começaram a ter importância, tanto no nível teórico como aplicado.

1. Para acompanhar este desenvolvimento, as técnicas e instrumentos de medida de potência elétrica vêm sofrendo um constante aperfeiçoamento, visando, principalmente, a ampliação do espectro de frequência de operação e ao aumento de precisão dos equipamentos. A busca por um espectro mais amplo é oriunda, em grande parte, da evolução das técnicas de acionamento elétrico, as quais vêm difundindo cada vez mais a utilização de equipamentos que empregam alguma forma de retificador, inversor, ou compensador estático. Esses equipamentos apresentam uma característica de carga não linear que pode ser observada através do surgimento de raias no espectro da corrente por eles absorvida, componentes essas não presentes na tensão de excitação. A necessidade de melhor caracterizar a eficiência e o fator de potência desses sistemas também vem influenciando o surgimento de novas arquiteturas ou aperfeiçoamento das já existentes para a medida da potência elétrica.

Além dos fatores mencionados acima, a evolução constante dos equipamentos comerciais, e mesmo a necessidade de instrumentos que operem com grande precisão em fatores de potência próximos de zero, leva à adequação dos padrões de transferência capazes de calibrar estes instrumentos. Existem hoje instrumentos, em nível de laboratório de aferição, que operam na faixa de frequência de 0 a 200(KHz), com precisão chegando 10 ppm.

a) Wattímetro digital

Um exemplo de aplicação prática de medida é demonstrado a seguir com a aplicação do wattímetro digital de potência – DW-6060 da Reedinstruments para um sistema monofásico mostrado na *Figura 3.3*.

Instruction Manual



Figura 3.3 - Multímetro digital

Características do wattímetro DW-6060:

Medidor de potência e multímetro compactado em um único aparelho.

Mede tensão e corrente AC, DC e potência ativa.

Mede potência até 6000(W).

Ajuste manual de zero no modo: medidor de watt; ajuste automático de zero no modo multímetro.

Tempo de amostragem menor que um segundo.

Destinado para operação manual.

Especificações:

Temperatura de operação: 0 a 50°C

Umidade de operação: Menor que 80% RH

Fonte de alimentação: Bateria de 9V

Wattímetro AC:

Faixa: 2000(W) e 6000(W)

Resolução: 2000(W): 1(W); 6000(W): 10(W)

Proteção de sobrecarga: 600ACV / 10ACA

Precisão: $\pm(1\% + 1d)$

Tensão de entrada: 0 a 600 ACV
Corrente de entrada: 0 a 10 ACA
Faixa de frequência: 45(Hz) a 65(Hz)

Descrição do instrumento:

1. Display
2. Chave de liga/desliga
3. Chaves de função
4. Terminais de entrada
5. Terminais de carga
6. Potenciômetro de ajuste de zero
7. Tampa da bateria / Compartimento

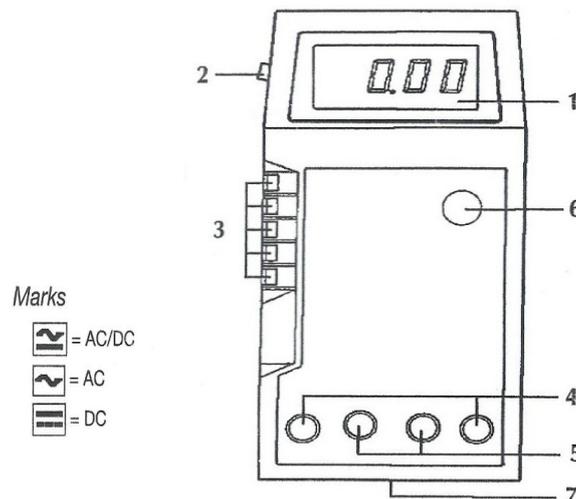


Figura 3.4 - Representação esquemática do wattímetro digital DW-6060

Medida de potência CA

1. Enquanto a carga estiver desligada, ligue o medidor.
2. Determine antecipadamente a potência mais alta (2000W ou 6000W) na escala de função e pressione o botão correspondente.
3. Conecte os terminais de teste em seus terminais apropriados.
4. Conecte a carga nos terminais de carga.
5. Ajuste o potenciômetro de ajuste de zero até que o display mostre "0".
6. Ligue a carga e então o medidor irá mostrar o valor medido em watt.
7. Pressione as chaves de função ACV para medir tensão CA e ACA para corrente CA.

3.6 – Exercício

De acordo com o sistema gerador-carga equilibrado dado na *Figura 2.13*, onde são dados: $E_{AN} = 57,735(V)$, $f = 60(Hz)$, $Z_b = 3+j4 (\Omega)$, calcule:

- a) O módulo da corrente em cada fase na carga.
- b) A potência reativa trifásica na carga.

Respostas:

a) $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 2(A)$

b) $Q_{3L} = 4,8 (kVAR)$

TRANSFORMADORES

4

4.1 - Introdução

O transformador foi inventado nos anos 1880 quando existia uma batalha das correntes entre CC e CA, em que a CA prevaleceu devido aos fabulosos inventos de Nicola Tesla, da capacidade em elevar e abaixar tensões alternadas, e do gênio George Westinghouse, com sua invenção de disjuntores a ar para trens ferroviários. O transformador foi patenteado por Lucien Gaulard e John D. Gibbs e sua patente foi comprada por George Westinghouse, que contratou Tesla e decidiu a vitória da corrente CA, fundando a companhia Westinghouse de disjuntores a ar e desenvolvendo um sistema seguro para transportar gás natural em tubulações até as residências e também inventando o medidor de gás.

4.2 - O transformador

Um transformador é um dispositivo de conversão de energia, comumente usado para abaixar ou elevar tensões. É formado basicamente por dois conjuntos de bobinas, uma localizada na entrada ou primário e outra na saída, ou secundário. Estão disponíveis em uma grande variedade de tamanhos e formatos, que são projetados para numerosas aplicações. Dispositivos tão pequenos como comprimidos de aspirina, por exemplo, são comuns em rádios, aparelhos de TV e amplificadores de áudio, para conectar os vários estágios deste sistema. Por outro lado, os transformadores são projetados para o uso em sistemas de potência em 60Hz, com tamanhos que variam de uma bola de pingue-pongue a maiores que um automóvel. Vamos restringir seu estudo a transformadores lineares (aqueles cujas bobinas são lineares) e iniciar com o estudo das indutâncias própria e mútua. O armazenamento de energia e as propriedades das impedâncias serão analisados nos próximos itens.

Um caso importante de transformador linear, o transformador ideal, será apresentado. A análise de circuitos vai incluir um caso no domínio da frequência, porque as aplicações mais importantes ocorrem em regime permanente CA.

4.3 - A bobina

Para se compreender o efeito de indução devido ao acoplamento magnético entre duas bobinas do transformador é necessário, antes de tudo, entender o comportamento da bobina na presença de uma corrente alternada. A técnica mais utilizada é a de concatenamento de fluxo nas espiras onde a tensão induzida depende das condições de enlace magnético. O estudo da bobina pode ser realizado considerando o efeito causado por uma corrente alternada, que, ao atravessá-la, gera um fluxo magnético resultante que enlaça suas espiras (*Figura 4.1*). Como exemplo básico vamos tomar um solenoide conforme ilustrado na *Figura 4.2* para compreender o efeito da *autoindutância* na bobina.

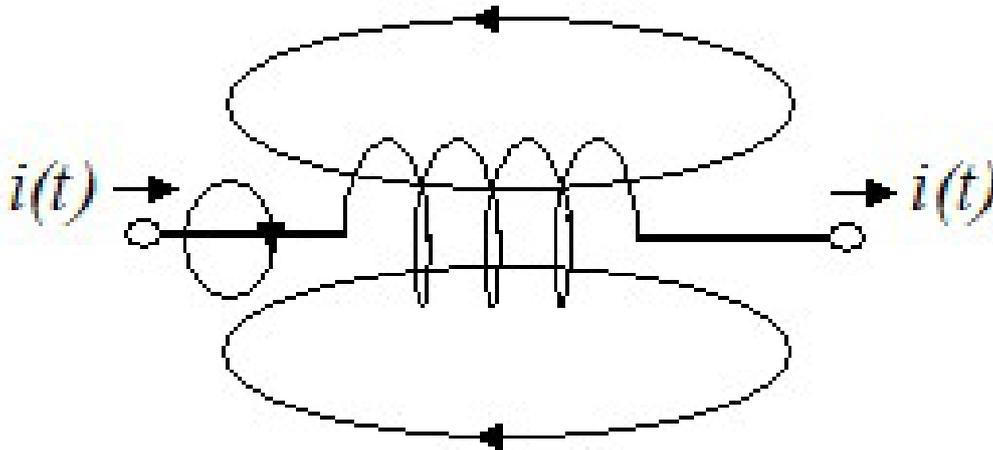


Figura 4.1 - Solenoide

4.3.1 Autoindutância

O conceito de autoindutância foi desenvolvido por Michael Faraday no início do século XIX. Segundo ele, um campo magnético consiste em linhas de força que cercam um condutor que conduz corrente. Podemos visualizar essas linhas de força como tiras de elástico que armazenam energia e se fecham em laços de acordo com a ilustração da *Figura 4.2*.

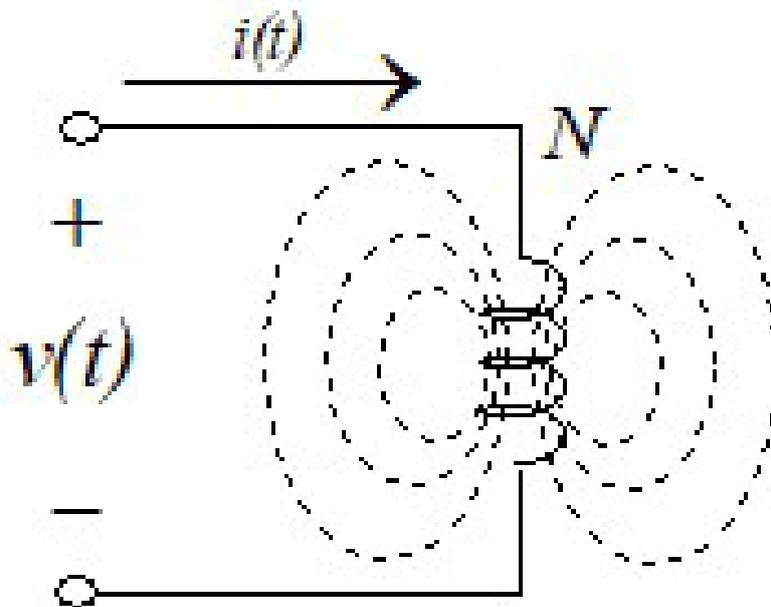


Figura 4.2 - Manifestação do fluxo em um solenoide

À medida que a corrente aumenta e diminui, as tiras elásticas (linhas de força) se expandem e se contraem em torno do condutor se propagando para todos os lados numa direção perpendicular à corrente. A variação resultante dessas linhas de força provocada pela corrente em um lado da bobina induz uma tensão no lado oposto ao cruzar os condutores respectivos a este lado. Se considerarmos cada segmento diferencial do condutor induzindo tensão no respectivo lado oposto, podemos constatar tensões induzidas em toda a circunferência da espira, e, portanto, em toda a bobina.

Esta tensão resultante é a tensão induzida nos terminais da própria bobina, e a capacidade de indução magnética é chamada de *autoindutância* ou *indutância própria*.

O fluxo gerado pela corrente é proporcional ao número de linhas que se contraem para dentro do núcleo ou que o atravessam.

O fluxo total concatenado é o efeito resultante da soma das contribuições individuais dos campos magnéticos gerados em cada espira, onde o enlace do fluxo magnético de cada espira se junta aos demais formando um laço que as envolve ao longo de seu comprimento, se espalhando simetricamente ao redor do solenoide, conforme ilustrado na *Figura 4.2*.

A intensidade do fluxo gerado depende da intensidade da corrente e a orientação espacial do campo depende do sentido desta corrente. A regra da mão direita é utilizada para relacionar a orientação do campo com o sentido da corrente.

A tensão induzida nos terminais do solenoide ou na bobina é expressa pela Lei Faraday, como:

$$e = - \frac{d\lambda}{dt}$$

Sendo λ o fluxo total concatenado no solenoide, o sinal negativo indica o efeito de oposição da bobina a uma variação de corrente segundo a lei de Lenz, onde esta tensão se manifesta de forma a se opor à causa que a criou, tendo como referência a polaridade da corrente. A tensão induzida do ponto de vista do solenoide, entretanto, é positiva.

4.3.2 Indutância

A indutância é definida como a relação entre o fluxo magnético e a corrente.

A indutância produzida em uma única espira de uma bobina é dada por:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{\phi}{i}$$

onde o fluxo total λ que enlaça a espira é igual a ϕ . O fluxo total concatenado a uma bobina de N espiras iguais é, portanto,

$$\lambda = N\phi$$

Assim, para uma bobina de N espiras iguais, teremos:

$$L = \frac{N\phi}{i}$$

Em uma bobina onde a relação entre fluxo ϕ e corrente i é linear, a indutância L é uma constante se caracterizando como um indutor linear.

Uma taxa de variação na corrente corresponderá a uma taxa de variação de fluxo numa proporção direta. A indutância, portanto, é

uma constante resultante da relação entre estas taxas, tornando-se, assim, independente da corrente e caracterizando a bobina para um específico valor de indutância.

4.3.3 Condições de enlace

Na equação anterior podemos relacionar a indutância L de um indutor linear às *condições de enlace* ou *concatenamento de fluxo* pela expressão:

$$N\phi = Li$$

relacionando diretamente o circuito elétrico ao circuito magnético da bobina.

4.3.4 Tensão induzida

Considerando o meio magnético, a magnitude do fluxo ϕ está relacionada à da corrente do enrolamento através da relação:

$$\phi = \mathcal{P}Ni$$

onde \mathcal{P} é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo. A permeância é uma grandeza que quantifica a facilidade à passagem de fluxo em um meio magnético. Sua descrição detalhada está fora do escopo deste curso. Neste caso, podemos observar que quando o espaço percorrido pelo fluxo é composto de materiais magnéticos como ferro, níquel e cobalto, a permeância varia com o fluxo numa relação não-linear entre ϕ e i . No entanto, quando o espaço é composto por materiais não magnéticos, a permeância é constante dando origem a uma relação linear entre ϕ e i . Podemos observar na equação de ϕ , que o fluxo também é proporcional ao número de espiras do enrolamento. Considerando o material do núcleo não-magnético, podemos substituir ϕ e λ na equação da tensão induzida. Do ponto de vista da bobina, a tensão induzida é:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt}$$

Substituindo ϕ teremos:

$$N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{d}{dt} (\mathcal{P}Ni)$$

Aplicando as condições de enlace, obtemos:

$$N^2 \mathcal{P} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

indicando que a indutância é proporcional ao quadrado do enrolamento e à permeância. A polaridade da tensão induzida na bobina reflete a reação do campo corrente que o criou. Quando i está crescendo, di/dt e e são positivas, caso contrário, di/dt e e serão negativas.

É importante considerar que além da corrente, o concatenamento do fluxo, as dimensões geométricas e o material empregado no núcleo magnético contribuem significativamente para a magnitude da tensão induzida nos terminais da bobina.

4.4 - Indutância mútua

O estudo da indutância mútua é feito considerando o efeito de duas bobinas próximas uma da outra. Assim, teremos duas bobinas compartilhando um fluxo em comum formando um acoplamento magnético entre elas de acordo com a direção ilustrada na *Figura 4.3*. Tais sistemas com duas ou mais bobinas magneticamente acopladas entre si são chamados de transformadores.

4.4.1 Disposição dos enrolamentos e tensões

O fluxo magnético que enlaça as bobinas de um transformador tem um sentido determinado pela polaridade da corrente e pelo sentido do enrolamento das bobinas. Com duas possibilidades de enrolamento para cada bobina, teremos na saída quatro possíveis combinações para uma tensão positiva no primário e mais quatro para uma tensão negativa neste mesmo lado.

4.4.2 Transformador com o secundário em aberto

Uma relação entre o sentido da corrente no primário e do fluxo magnético gerado em função dos enrolamentos das bobinas pode ser obtida com auxílio da *Figura 4.3*. Vamos considerar inicialmente um transformador com núcleo a ar e secundário em aberto com uma corrente aplicada ao enrolamento primário, onde os fluxos produzidos são direcionados conforme ilustrado na *Figura 4.3*.

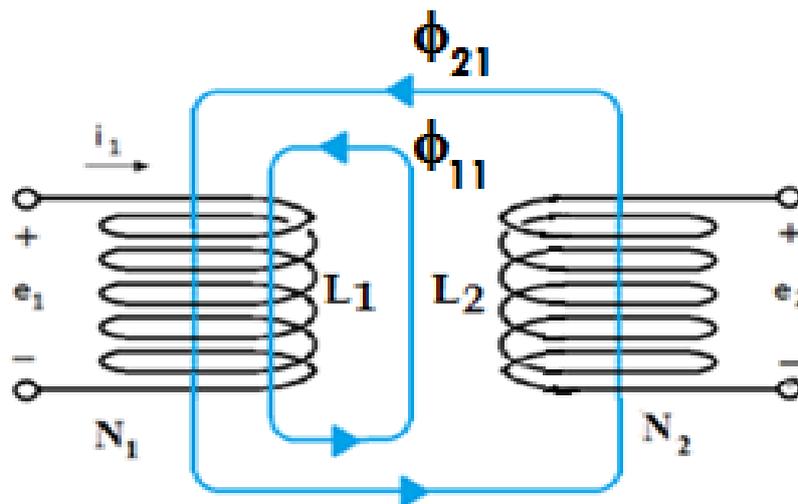


Figura 4.3 - Relação entre corrente, fluxo e enrolamento em um transformador

Sentido dos enrolamentos e fluxos

Observando de cima o transformador visto na *Figura 4.3* e tomando como referência os terminais superiores dos enrolamentos das bobinas, veremos a bobina 1 enrolada no sentido **horário** e a bobina no sentido **anti-horário**.

O número de espiras em cada enrolamento é N_1 e N_2 , respectivamente. O enrolamento 1 é energizado com uma corrente i_1 variável no tempo, que se estabelece na espira N_1 . O enrolamento 2 não é energizado e está em aberto. Ambos os enrolamentos estão dispostos em um núcleo não-magnético. O fluxo ϕ_1 produzido pela corrente i_1 pode ser dividido em duas componentes denominadas ϕ_{11} e ϕ_{21} . O sentido destes fluxos é determinado pela regra da mão direita. Assim, conforme ilustrado na *Figura 4.3*, uma corrente i_1 percorrendo o enrolamento 1 no sentido *horário* gera um fluxo com duas componentes no sentido *anti-horário* no plano desta figura.

A ϕ_{11} componente atravessando o enrolamento 1 no sentido horário induz uma tensão positiva no primário.

A componente ϕ_{21} , atravessando o enrolamento 2 feito no sentido anti-horário, induz uma tensão positiva no secundário.

A componente ϕ_{11} atravessa somente a espira N_1 . A componente ϕ_{21} atravessa as espiras N_1 e N_2 . O primeiro dígito do índice do fluxo se refere ao enrolamento atravessado pelo *fluxo*. O segundo dígito se refere ao enrolamento atravessado pela *corrente* que o gerou. Assim teremos:

ϕ_{11} - Fluxo através do enrolamento 1 produzido pela corrente i_1

ϕ_{21} - Fluxo através dos enrolamentos 1 e 2 produzido pela corrente i_1

O módulo do fluxo total ϕ_1 na bobina 1 será, portanto:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} ,$$

onde:

ϕ_{11} - Fluxo de dispersão dado em Weber.

ϕ_{21} - Fluxo mútuo de acoplamento magnético dado em Weber.

Primário

No transformador mostrado na *Figura 4.3*, o fluxo ϕ_1 total concatenado na bobina L_1 do primário é, portanto, igual à soma algébrica dos fluxos.

Suas componentes ϕ_{11} e ϕ_{21} estão relacionadas à corrente i_1 na forma:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= -\mathcal{P}_1 N_1 i_1 \\ \phi_{11} &= -\mathcal{P}_{11} N_1 i_1 \\ \phi_{21} &= -\mathcal{P}_{21} N_1 i_1\end{aligned}$$

Onde \mathcal{P}_1 é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_1 . \mathcal{P}_{11} é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_{11} . \mathcal{P}_{21} é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_{21} .

Substituindo as equações anteriores na equação do fluxo total obteremos uma relação entre a permeância do espaço atravessado pelo fluxo total e de suas componentes:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}$$

Aplicando a lei de Faraday, obtemos a tensão induzida no primário:

$$e_1 = -\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{dN_1\phi_1}{dt}$$

$$e_1 = N_1 \mathcal{P}_1 N_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$e_1 = N_1^2 \mathcal{P}_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Associando os dois lados das equações, obtemos:

$$L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_1$$

$$L_{11} = N_1^2 \mathcal{P}_{11}$$

$$L_{21} = N_1^2 \mathcal{P}_{21}, \text{ onde}$$

L_1 - Indutância total da bobina 1

L_{11} - Indutância própria da bobina 1

L_{21} - Indutância mútua entre as bobinas 1 e 2

Secundário

A tensão no secundário do transformador da *Figura 4.3* é induzida pela corrente i_1 sendo dada pela aplicação da Lei de Faraday. Ao atravessar a bobina 2 o fluxo gerado por i_1 irá induzir uma tensão e_2 em oposição à causa que a criou (i_1), contrariando o fluxo ϕ_{21} , cujo valor e polaridade são dados por:

$$e_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

onde L_{21} é a indutância devido ao fluxo ϕ_{21} . O sinal positivo depende do sentido do enrolamento da bobina do secundário e do fluxo, dados na *Figura 4.3*.

Podemos observar ainda que, se aplicado uma fonte de tensão positiva no secundário como primário em aberto, o efeito é o mesmo, resultando numa subtração de indutâncias no lado do secundário e numa tensão positiva induzida no lado primário.

Inversão do enrolamento do secundário

Mantendo-se na *Figura 4.3*, o enrolamento da bobina 1 no sentido horário e fazendo o enrolamento da bobina 2 também no sentido horário, obteremos uma tensão negativa induzida no secundário conforme a lei de Faraday.

$$e_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Assim, para uma corrente **positiva** no primário, com seu enrolamento no sentido **horário**, obteremos um **fluxo** no sentido **anti-horário** no plano da figura, de acordo com a regra da mão direita. Nestas condições poderemos obter no secundário uma tensão positiva ou negativa dependendo do sentido do enrolamento da bobina do secundário.

Considerando o secundário em aberto, podemos obter oito possíveis arranjos envolvendo o sentido dos enrolamentos das duas bobinas e as duas polaridades da tensão de entrada e_1 no transformador, conforme ilustrado na *Tabela I*. Assim, relacionando as tensões de saída e_2 com suas respectivas entradas e_1 e com o sentido dos enrolamentos de seus respectivos fluxos mútuos, teremos:

Tabela I - Tensões induzidas em função da polaridade do primário e do sentido dos enrolamentos das bobinas do transformador

Config	e_1	Enrolam. 1	Fluxo ϕ_{21}	Enrolam 2	e_2
1	+	Horário	Anti-horário	Anti-horário	+
2	+	Horário	Anti-horário	Horário	-
3	+	Anti-horário	Horário	Anti-horário	-
4	+	Anti-horário	Horário	Horário	+
5	-	Horário	Horário	Anti-horário	-
6	-	Horário	Horário	Horário	+
7	-	Anti-horário	Anti-Horário	Anti-horário	+
8	-	Anti-horário	Anti-horário	Horário	-

Podemos constatar na *Tabela I* duas diferentes possibilidades de enrolamentos para mesmas tensões de entrada e saída no transformador. E, ainda, que enrolamentos de mesmo sentido invertem a polaridade da tensão de entrada na saída, caso contrário, a mantém.

4.4.3 Regra do ponto

Em circuitos magneticamente acoplados, como transformadores comerciais, normalmente são usados pontos como indicação da polaridade da tensão de seus terminais. O polo positivo é comumente referenciado na aplicação de uma corrente positiva que entra no terminal da bobina. Este ponto está associado ao sentido do enrolamento, também sendo referenciado como “ponto de polarização da bobina”. Para facilitar a aplicação de transformadores utiliza-se a “regra do ponto”.

A regra do ponto tem como enunciado:

“Uma corrente i que entra num terminal com ponto em um enrolamento induz uma tensão $M di/dt$ positiva no terminal com ponto do outro enrolamento”.

A mesma regra é válida para o terminal sem ponto, como mostrado na *Figura 4.4(b)*

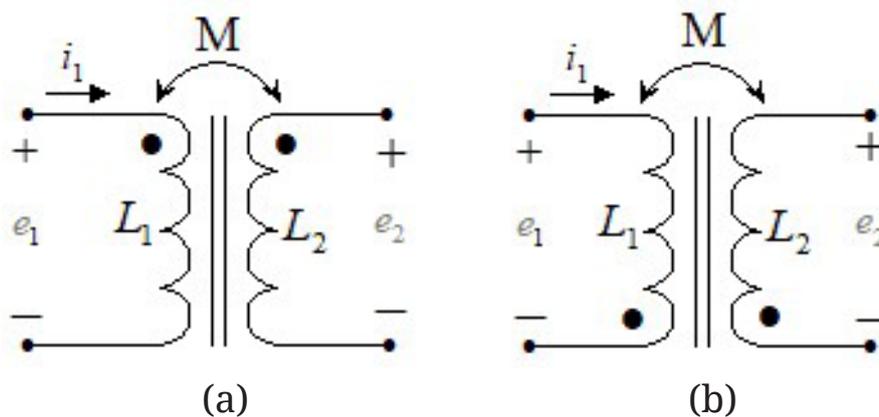


Figura 4.4 - Ilustração da regra do ponto

Portanto, o terminal sem ponto também pode ser utilizado com uma polaridade positiva sem qualquer dano para o transformador. Assim, uma corrente positiva aplicada a um terminal sem ponto no primário produz uma tensão positiva no terminal sem ponto no secundário.

A *Tabela II* relaciona as configurações do transformador utilizando a regra do ponto, identificando quatro configurações de circuitos, que produzem as oito possibilidades mostradas na *Tabela I* para associação de tensões e enrolamentos de transformadores a vazio. Também são mostradas suas equações de entrada e saída.

Assim teremos, para a tensão positiva na entrada, as configurações 1 e 4 produzindo tensões positivas na saída, assim como 2 e 3 produzindo tensões negativas. Da mesma forma, para entrada negativa, os circuitos de cada par de associações produzem as mesmas polaridades de tensão na saída.

Tabela II - Equivalência entre a configurações de transformadores a vazio e suas respectivas representações usando a regra do ponto

Config	Circuito	Equação
1,4		$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$ $e_2 = M \frac{di_1}{dt}$
2,3		$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$ $e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$
5,8		$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ $e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$
6,7		$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ $e_2 = M \frac{di_1}{dt}$

4.4.31 – Exercício

Obtenha uma tabela, baseada na *Tabela II*, relacionando as mesmas configurações de circuitos, com a fonte aplicada na saída do transformador, e escreva suas respectivas equações considerando a entrada anterior como saída.

4.4.4 - Transformador com corrente no secundário

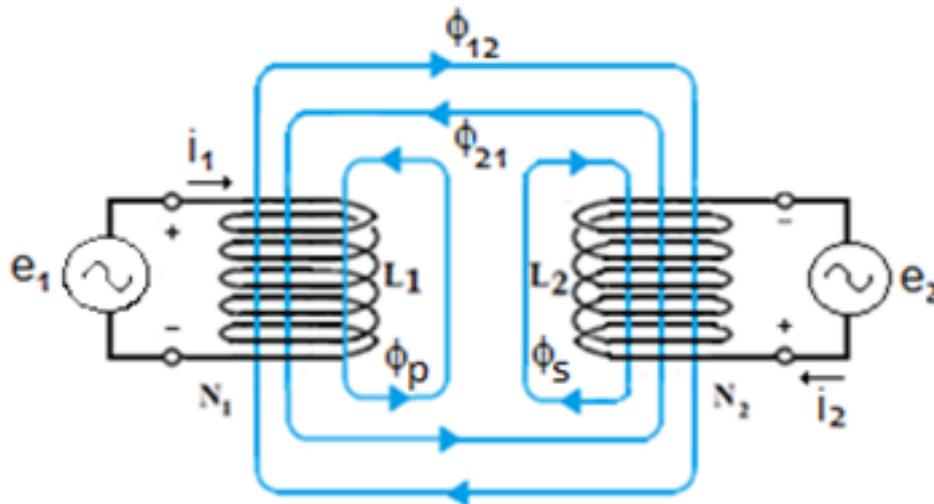


Figura 4.5 - Relação entre corrente, fluxo e enrolamento para um transformador alimentado no secundário

- ϕ_{11} - Fluxo que atravessa o enrolamento 1 produzido pela corrente i_1
- ϕ_{21} - Fluxo que atravessa os enrolamentos 1 e 2 produzido pela corrente i_1
- ϕ_{12} - Fluxo que atravessa os enrolamentos 1 e 2 produzido pela corrente i_2
- ϕ_{22} - Fluxo que atravessa o enrolamento 2 produzido pela corrente i_2

Primário

No enrolamento primário do transformador mostrado na *Figura 4.5*, estão concatenados os fluxos: ϕ_{11} , ϕ_{21} e ϕ_{12} .

O fluxo total na bobina 1 será, portanto,

$$\phi_1 = -\phi_{11} - \phi_{21} + \phi_{12}$$

Considerando a parcela de fluxo produzida somente pela bobina do primário:

$$\phi_1 = -\phi_p + \phi_{12}$$

O fluxo concatenado no primário resulta:

$$\lambda_1 = N_1\phi_1 = -N_1\phi_p + N_1\phi_{12}$$

De acordo com a lei de Faraday, teremos:

$$e_1 = N_1 \frac{d\phi_p}{dt} - N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

Aplicando a *técnica de enlace*, e representando os termos na forma matricial, considerando: $N_1 d\phi_p/dt = L_1 di_1/dt$, onde $L_1 = L_{11} + L_{21}$, obtemos:

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Considerando as indutâncias mútuas:

$$L_{12} = L_{21} = M$$

Podemos escrever:

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Secundário

No enrolamento secundário do transformador mostrado na *Figura 4.5*, temos:

ϕ_{22} - Fluxo que atravessa o enrolamento 2 produzido pela corrente i_2 .

ϕ_{12} - Fluxo que atravessa os enrolamentos 1 e 2 produzido pela corrente i_2 .

ϕ_{21} - Fluxo que atravessa os enrolamentos 1 e 2 produzido pela corrente i_1 .

O fluxo total ϕ_2 na bobina 2 será, portanto:

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} - \phi_{21}$$

Considerando a parcela produzida no secundário, temos:

$$\phi_2 = \phi_s - \phi_{21}$$

O fluxo concatenado no secundário é:

$$\lambda_2 = N_2\phi_s - N_2\phi_{21}$$

Aplicando a lei de Faraday, obtemos:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\phi_s}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

Aplicando a técnica de enlace, obtemos:

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Considerando a igualdade das indutâncias mútuas, podemos escrever:

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Arranjando as equações das tensões do primário e secundário na forma matricial, obtemos, finalmente:

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

De onde podemos concluir que com os enrolamentos do primário e secundário feitos em sentidos opostos, teremos um efeito de oposição da bobina do secundário manifestada no primário, sendo expresso na inversão da queda de tensão produzida pela indutância mútua L_{12} para qualquer tensão aplicada no primário. Este efeito de reação proporciona maior estabilidade nas tensões e correntes, devido a uma tendência de equilíbrio das forças magnetomotrizes estabelecidas em cada lado do transformador.

As tensões induzidas no secundário são mostradas na *Tabela III* para todas as possíveis combinações de tensões de entrada e enrolamentos onde a corrente no secundário é positiva.

Tabela III - Tensões induzidas em função da polaridade do primário e do sentido dos enrolamentos para $i_2 > 0$

Conf	e_1	Enrolam 1	Fluxo ϕ_{21}	Fluxo ϕ_{12}	Enrolam 2	e_2
1	+	Horário	Anti-horário	Horário	Anti-horário	-/+
2	+	Horário	Anti-horário	Anti-horário	Horário	+
3	+	Anti-horário	Horário	Horário	Anti-horário	-
4	+	Anti-horário	Horário	Anti-horário	Horário	-/+
5	-	Horário	Horário	Horário	Anti-horário	-
6	-	Horário	Horário	Anti-horário	Horário	+/-
7	-	Anti-horário	Anti-Horário	Horário	Anti-horário	+/-
8	-	Anti-horário	Anti-horário	Anti-horário	Horário	+

Considerando um transformador abaixador para o fasor \dot{E}_1 positivo: nas configurações 1 e 4 podemos obter duas possíveis polaridades no fasor \dot{E}_2 dependendo dos valores de I_1 e I_2 , respectivamente; nas configurações 2 e 3, temos em e_2 fasores de polaridades fixas. Para o fasor \dot{E}_1 negativo, em 5 e 8 temos polaridades fixas e independentes das correntes I_1 e I_2 ; e em 6 e 7, possibilidades para fasores de tensão positivos ou negativos em \dot{E}_2 independentes de I_1 e I_2 .

Aplicações

As configurações 1, 4, 5 e 8 dispõem de enrolamentos feitos em sentido contrário e que são utilizados em transformadores que desempenham a função de transformação de tensão ou de corrente. As configurações 2, 3, 6 e 7 são formadas por enrolamentos no mesmo sentido e são aplicadas em casamento de impedância para $L_1 = L_2$.

A Tabela IV ilustra as configurações de circuitos de transformadores ideais para pontos de polarização e suas respectivas equações calculadas para $\dot{E}_1 > 0$ e $\dot{I}_2 > 0$.

Tabela IV - Configurações de transformadores para $\dot{E}_1 > 0, \dot{I}_2 > 0$ e suas respectivas representações usando a regra do ponto

Config	Circuito - ($i_2 = 0$)	Config	Equação - ($e_1 > 0$ e $i_2 > 0$)
1		1	$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $e_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$
2		2	$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $e_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$
3		3	$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$
4		4	$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $e_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$

Polarização do secundário

O critério de polarização utilizando a regra do ponto, também neste caso, considera a saída do transformador a vazio, o que torna sua polarização a mesma da *Tabela II*.

Na *Tabela IV* as 4 configurações de polarização para $\dot{E}_1 > 0$ são mostradas, onde se constata que dois diferentes arranjos de bobinas produzem a mesma polarização. As equações de 2 configurações dessa tabela calculadas para $\dot{E}_1 > 0$ e $\dot{I}_2 > 0$ são associadas a 2 possíveis configurações de circuitos que produzem a mesma polarização segundo a regra do ponto. São elas as configurações 1 e 4, 2 e 3.

Análise das condições para $\dot{E}_1 > 0$ e $\dot{I}_1 > 0$

Para a *configuração 1* mostrada na *Tabela IV*, a equação de e_2 apresenta na parcela induzida do primário no secundário uma tensão positiva $M di_1/dt$. Para o transformador sem carga, a saída e_2 também apresenta polaridade positiva no seu fasor. Nas *configurações 1* e *4*, em suas equações, o termo da indutância mútua é positivo, o que torna o fasor \dot{E}_2 positivo para $i_2=0$, satisfazendo a condição da configuração de polaridade. A polaridade de \dot{E}_2 também é satisfeita na configuração 3. Somente a equação da configuração 2 não satisfaz a polaridade de \dot{E}_2 em $i_2=0$.

Portanto, podemos concluir que as configurações **1, 3 e 4** podem ser escolhidas para aplicações em projetos, na condição em que o fasor de entrada \dot{E}_1 é positivo.

Determinação da polarização para $\dot{E}_1 > 0$ e $\dot{I}_1 > 0$

Para se determinar a polarização do fasor de tensão na saída na *configuração 1* da *Tabela III*, devemos tomar como referência um *transformador elevador*, onde sua corrente no secundário é maior que no primário. Isto implica em uma indutância $L_2 < L_1$ que leva a uma reatância $X_{L2} < X_{L1}$. Observando a equação na *Tabela IV*, como a indutância mútua M é menor que a indutância das bobinas, podemos concluir na equação de e_2 que o fasor de tensão é sempre negativo nestas condições, resultando em uma inversão de e_1 para esta configuração.

Estudando os demais casos da *Tabela IV*, podemos constatar os resultados da *Tabela III* para um transformador elevador, onde as configurações 1 e 4 produzem fasores de tensão cujas polaridades dependem das correntes do primário e secundário do transformador e a 3 produz fasor de tensão negativo fixo.

Aplicações para $\dot{E}_1 > 0$ e $\dot{I}_1 > 0$

Quanto à aplicação do transformador, podemos notar na *Tabela III* que as configurações 1 e 4 apresentam enrolamentos em sentidos opostos, e, também, que, *pela Tabela IV*, somente as configurações 1, 3 e 4 satisfazem suas equações. Como a configuração 3 tem o mesmo sentido de enrolamento em suas bobinas, resta somente a **configuração 1** para uma aplicação segura em projetos de transformadores de tensão.

Exercício

Deixamos como exercício para o aluno a determinação da polaridade na saída para o transformador abaixador com entrada negativa de tensão, bem como a escolha de configurações adequadas para aplicação em projetos.

4.5 - Transformador linear

Considerando constante a relação entre fluxos e correntes que atuam nas bobinas de um transformador, teremos uma indutância caracterizada em cada bobina onde suas relações tensão-corrente são lineares podendo ser calculadas usando a Lei de Ohm, se consideramos uma frequência constante.

Dado o circuito do transformador com carga e fonte no secundário, temos:

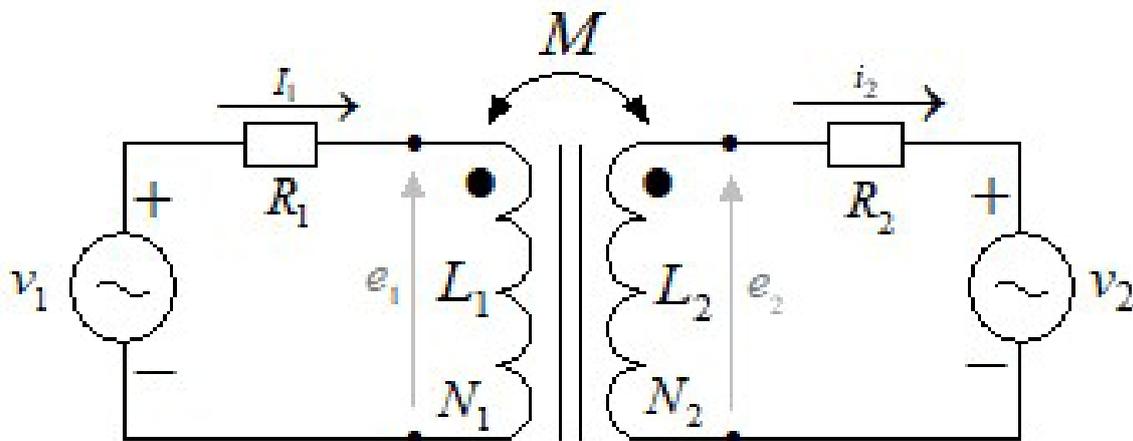


Figura 4.6 - Transformador com carga e fonte

No circuito da Figura 4.6, as tensões nos terminais do transformador são:

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Para uma corrente na referência, podemos escrever:

$$i = I_m \text{sen}(\omega t) \quad \text{onde,}$$

$$e_L = L \frac{di}{dt} = L \omega I_m \text{cos}(\omega t)$$

A tensão CA na bobina pode ser escrita como:

$$e_L = \omega L i = X_L i$$

Assim, na bobina do primário a corrente total pode ser calculada aplicando a Lei de Ohm:

$$i_1 = \frac{e_1}{X_{L1}} = \frac{v_1}{Z_1}$$

Assim, substituindo di/dt pelos seus respectivos valores nas equações de e_1 e e_2 , e considerando as impedâncias de entrada e saída, encontramos na forma geral:

$$v_1 = \pm Z_1 i_1 \pm Z_M i_2$$

$$v_2 = \pm Z_M i_1 \pm Z_2 i_2$$

Considerando um transformador com carga conforme a *Figura 4.7*, temos:

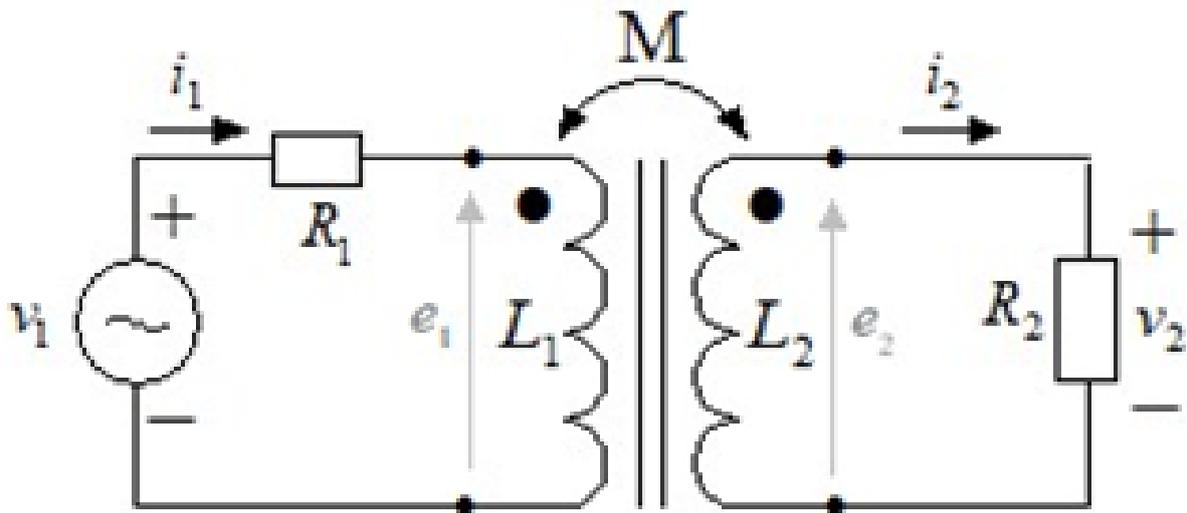


Figura 4.7 - Transformador com carga

Podemos constatar que só existe uma força motriz no primário que é a tensão v_1 .

Considerando $i_1 > 0$, e representando a equação anterior na forma fasorial, teremos para as bobinas dispostas na configuração 1:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_M \dot{I}_2 \\ 0 &= \dot{Z}_M \dot{I}_1 - \dot{Z}_2 \dot{I}_2\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 \\ \dot{Z}_2 &= R_2 + j\omega L_2 \\ \dot{Z}_M &= j\omega L_M\end{aligned}$$

Utilizando a regra de *Cramer* no sistema de equações podemos calcular a corrente \dot{I}_2 na saída do transformador.

O determinante do sistema de equações é calculado considerando o sinal de igualdade do lado direito, e, portanto, teremos:

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{V}_1 \\ \dot{Z}_M & \dot{V}_2 \end{vmatrix}$$

A corrente \dot{I}_2 é dada por:

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta \dot{I}_2}{\Delta}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & \dot{V}_1 \\ \dot{Z}_M & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{Z}_1 & -\dot{Z}_M \\ \dot{Z}_M & -\dot{Z}_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\dot{Z}_M \dot{V}_1}{-\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_M^2}$$

O fasor de tensão \dot{V}_2 é calculado por:

$$\dot{V}_2 = R_2 \dot{I}_2 = \frac{-R_2 (\dot{Z}_M \dot{V}_1)}{-\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_M^2}$$

Considerando:

$$\dot{Z}_1 = Z_1 e^{j\theta_1}, \dot{Z}_2 = Z_2 e^{j\theta_2} \text{ e } \dot{Z}_M = Z_M e^{j90^\circ},$$

obtemos finalmente:

$$\dot{V}_2 = \frac{R_2 Z_M e^{j90^\circ}}{Z_1 Z_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} - Z_M^2} \dot{V}_1$$

onde uma inversão em V_2 dependerá dos ângulos das impedâncias θ_1 e θ_2 , do ponto de vista da representação linear do transformador.

Outra opção para o cálculo de V_2

Do sistema de equações utilizado, por outro lado, obtemos no secundário:

$$i_2 = \frac{\dot{Z}_M \dot{I}_1}{\dot{Z}_2}$$

e:

$$\dot{V}_2 = \dot{Z}_2 i_2 = \dot{Z}_2 \frac{\dot{Z}_M \dot{I}_1}{\dot{Z}_2} = \dot{Z}_M \dot{I}_1$$

$$\dot{V}_2 = Z_M I_1 e^{j(90^\circ + \theta_{I1})}$$

onde podemos concluir que a inversão de V_2 depende de $|\theta_{I1}| \geq 90^\circ$ para o transformador disposto na configuração 1.

Na equação desenvolvida, a relação de entrada e saída do transformador pode ser obtida calculando-se o módulo da expressão V_2/V_1 , onde obtemos uma opção que não depende da relação de espiras e sim dos valores dos componentes do circuito, que, por sua vez, podem ser obtidos através de medidas elétricas.

Indutância mútua para o transformador ideal

Em um transformador ideal, a indutância mútua pode ser calculada para o secundário em aberto e estimada para um valor adequado quando operando à plena carga em uma tensão V_2 no secundário. Uma vez conhecidas as tensões V_1 e V_2 (ou a relação de espiras), e a corrente I_1 no primário, podemos calcular a indutância mútua que produz a potência nominal no secundário a plena carga.

A reatância mútua a plena carga é tomada do ponto de vista da tensão na carga em relação à corrente de entrada, e, portanto, sofre efeito de transformação do primário no secundário. Assim, podemos defini-la como:

$$Z_M a = \frac{V_2}{I_1}$$
$$Z_M = \frac{V_2}{a I_1} = \frac{Z_M^*}{a}$$

onde Z_M^* é a reatância mútua sem transformação do ponto de vista da tensão V_2 . I_1 é obtido de S/V_1 (sendo S é a potência aparente do transformador) e a , é a relação direta de tensão V_1/V_2 , ou a relação inversa de correntes I_2/I_1 .

Tornando $Z_M = \omega L_M$ na última equação, obtemos:

$$L_M = \frac{V_2}{\omega a I_1}$$

A corrente I_2 ideal deve ser obtida em função da tensão induzida $Z_M^* I_1$ no lado da carga e em relação a ela, sem efeito, portanto, de transformação em Z_M , sendo,

$$I_2 = \frac{Z_M^* I_1}{Z_2}$$

4.5.1 - Circuitos com transformadores lineares

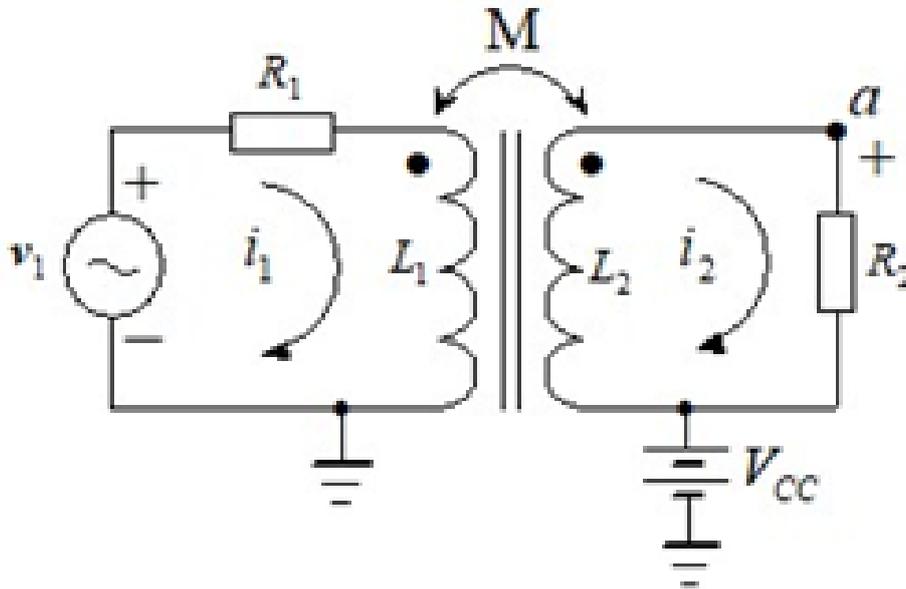
Exemplo

Figura 4.8 - Diferentes potenciais de referência

Como podemos notar na *Figura 4.8*, é ilustrada a aplicação prática de um transformador linear onde os potenciais elétricos possuem diferentes referências no primário e secundário.

Por essa razão, o secundário de transformador é considerado como um isolamento CC em relação ao primário.

O ponto a está num potencial absoluto: $V_{cc} + R_2 i_2$ em relação ao ponto terra.

Se fizermos $V_{cc} = 0$ vê-se que os terminais inferiores do transformador estão conectados e os circuitos primário e secundário têm um ponto comum de referência. Neste caso o transformador é um circuito de três terminais.

4.5.2 -Exercício

No circuito da *Figura 4.9* são dados:

$\dot{V}_1 = 2350 - j 87,857 (V)$; $\omega = 377(\text{rd/s})$; $\dot{Z}_1 = 0 + j20 (\Omega)$; $L_1 = 2(H)$; $L_2 = 0,2(H)$; $M = 0,6(H)$; $\dot{Z}_2 = 25 + j15 (\Omega)$; $Z_{in} = 145,41 + j 228,21 (\Omega)$, onde Z_{in} é a impedância de entrada do sistema gerador-carga.

Determine: o módulo da impedância de entrada \dot{Z}_{in} do gerador, \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , e \dot{V}_2 .

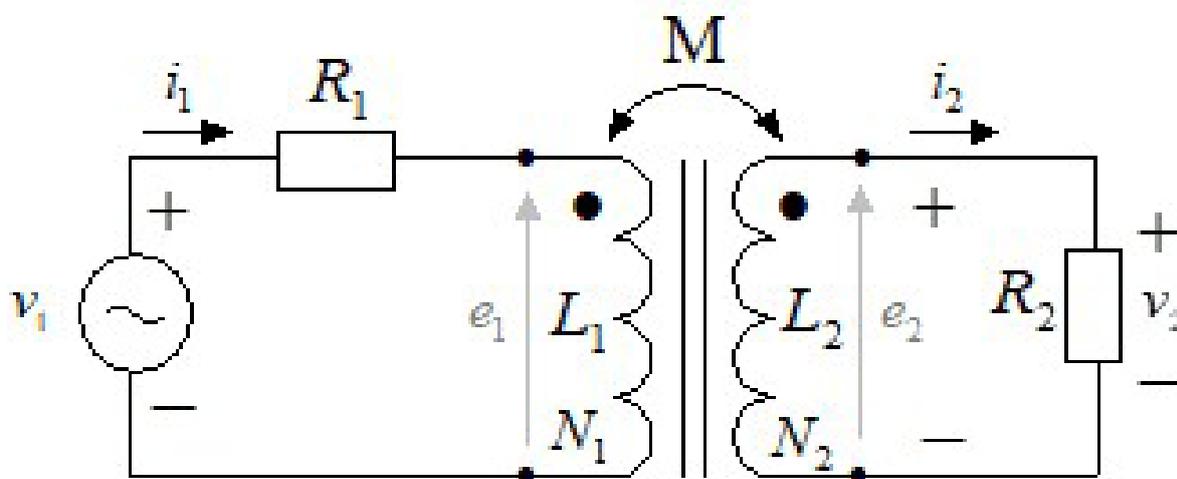


Figura 4.9 - Exercício

Respostas:

$$Z_{in} = 270,6(\Omega)$$

$$\dot{I}_1 = 4,393 - j 7,498 (A)$$

$$\dot{I}_2 = 67,42 - j 0,71 (A)$$

$$\dot{V}_2 = 1696,2 + j 993,67(V)$$

4.6 - Transformador de armazenamento de energia

A princípio, a energia elétrica CA que ingressa na bobina do primário do transformador tem como efeito a conversão em energia eletromagnética, devido ao percurso circular da corrente através de suas espiras. A energia resultante desta conversão é armazenada no núcleo de ambas as bobinas do primário e secundário, através do acoplamento eletromagnético mútuo dos fluxos gerados em ambos os lados, como visto anteriormente.

O concatenamento resultante deste fluxo sobre as espiras de ambas as bobinas define o aproveitamento da energia eletromagnética necessária para indução de tensão e fornecimento de corrente na saída, de acordo com os valores nominais desejados no secundário.

A existência de um material magnético de alta permissividade no núcleo das bobinas tem um papel fundamental na qualidade do acoplamento eletromagnético, proporcionando um aumento na densidade de linhas de fluxo que entram no núcleo, evitando dispersões e aumentando a densidade de energia armazenada.

4.6.1 - Armazenamento de energia

Como foi demonstrado no capítulo 2, a energia armazenada em um indutor durante um tempo t é dada por:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2$$

Para uma indutância L a energia é completamente especificada em termos de $i(t)$.

Vamos determinar a energia armazenada em um par de indutores mutuamente acoplados e mostrar que: $M_{21} = M_{12} = M$.

A energia armazenada é igual à soma das energias entregues aos terminais do primário e do secundário. As potências instantâneas entregues a estes terminais são:

$$p_1 = v_1 i_1 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} \right) i_1$$

$$p_2 = v_2 i_2 = \left(M_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2$$

Energia armazenada em um par de indutores acoplados

Agora vamos fazer uma experiência simples. Vamos supor que iniciamos no tempo t_0 com

$$i_1(t_0) = i_2(t_0) = 0$$

Visto que, no instante inicial t_0 o fluxo magnético é zero, nenhuma energia é armazenada no campo magnético, ou seja,

$$w(t_0) = 0$$

Agora vamos variar as correntes num intervalo de tempo de 0 a t_2 de acordo com o gráfico da *Figura 4.10*.

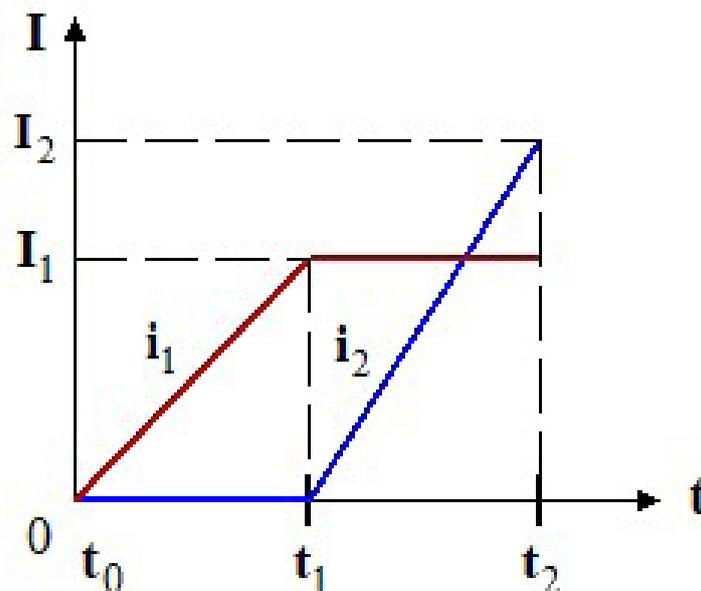


Figura 4.10 - Energia armazenada nas bobinas

Intervalo (t_0 a t_1)

No intervalo (t_0 a t_1), i_1 varia no tempo e i_2 é constante. A energia armazenada neste intervalo é dada por:

$$w_1 = \int_{t_0}^{t_1} (p_1 + p_2) dt$$

Como $i_2=0$, temos que:

$$\frac{di_2}{dt} = 0 \rightarrow P_2 = 0$$

onde w_1 se resume a:

$$w_1 = \int_{t_0}^{t_1} i_1 \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \right) dt$$

Eliminando dt e tornando os limites de integração em função da corrente,

$$w_1 = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1$$

onde a energia acumulada no intervalo de 0 a t_1 resulta em

$$w_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Intervalo (t_1 a t_2)

No intervalo (t_1 a t_2) temos i_1 constante e i_2 variando no tempo. Portanto,

$$i_1 = I_1$$

$$\frac{di_1}{dt} = 0$$

A potência total é a soma das potências no primário e no secundário. Como a derivada no tempo de i_1 é nula, resta no primário somente a parcela da potência induzida devido à variação de i_2 , e, portanto, a energia armazenada total no primário e secundário se resume em:

$$w_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(M_{21} I_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt$$

Cancelando dt e substituindo os limites de integração para i_2 , temos:

$$w_2 = \int_0^{I_2} (M_{21} I_1 di_2 + L_2 i_2 di_2)$$

onde a energia acumulada no intervalo t_1 a t_2 resulta em:

$$w_2 = M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

A energia total acumulada até t_2 é dada pela soma das energias nos dois intervalos:

$$w_{(t_2)} = w_{(t_0)} + w_1 + w_2$$

$$w_{(t_2)} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Invertendo os tempos para i_1 e i_2 , isto é, aumentando i_2 de 0 a I_2 a partir de t_0 e aumentando i_1 de 0 a I_1 a partir de t_1 , a energia acumulada até t_2 , neste caso, resulta em:

$$w_{(t_2)} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

As equações de $w_{(t_2)}$ expressam a energia total armazenada em um par de enrolamentos linearmente acoplados, em função: das correntes de enrolamento, das autoindutâncias e das indutâncias mútuas.

Podemos observar que a única diferença entre essas equações é o coeficiente do produto $I_1 I_2$.

Quando o meio acoplador é linear, a energia armazenada é a mesma, independentemente da ordem utilizada para estabelecer I_1 e I_2 . A razão é que, em um acoplamento linear, o fluxo magnético resultante depende somente dos valores finais de I_1 e I_2 e não de como as correntes chegaram a seus valores finais. Se o fluxo resultante for o mesmo, a energia armazenada será a mesma. Portanto, como:

$$i_1(t_2) = I_1$$

$$i_2(t_2) = I_2$$

$w_{(t_2)}$ é a mesma nos dois casos, de onde podemos concluir que:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

Dependendo da polaridade das bobinas, o sinal da tensão mútua pode ser negativo, e, desta forma, uma expressão geral para a energia total armazenada nos enrolamentos a qualquer instante de tempo é dada por:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \pm M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

4.7 - Fator de acoplamento

O fator de acoplamento entre dois indutores é definido como a relação entre a indutância mútua e a média geométrica entre as duas indutâncias, ou seja,

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Para $K=0$ não existe acoplamento entre as bobinas, uma vez que $M=0$.

O limite superior de K pode ser determinado, calculando a relação entre os fluxos do primário e do secundário.

Uma vez que:

$$M = M_{21} = M_{12}$$

$$M^2 = MM = M_{21}M_{12}$$

o que permite:

$$M = \sqrt{M_{21}M_{12}}$$

Substituindo na equação de K , teremos:

$$K = \frac{\sqrt{M_{21}M_{12}}}{\sqrt{L_1L_2}} = \sqrt{\frac{M_{21}M_{12}}{L_1L_2}}$$

O fluxo mútuo ϕ_{12} concatenado na bobina 2 produz nesta bobina uma indutância M_{12} devido a uma corrente i_2 . Usando a técnica de enlace, obtemos:

$$N_2\phi_{12} = M_{12}i_2$$

$$\phi_{12} = \frac{M_{12}i_2}{N_2}$$

Analogamente,

$$N_1\phi_{21} = M_{21}i_1$$

$$\phi_{21} = \frac{M_{21}i_1}{N_1}$$

Aplicando o enlace nos fluxos concatenados nas próprias bobinas, encontramos:

$$N_1\phi_{11} = L_1i_1$$

$$\phi_{11} = \frac{L_1i_1}{N_1}$$

$$N_2\phi_{22} = L_2i_2$$

$$\phi_{22} = \frac{L_2i_2}{N_2}$$

Relacionando o fluxo mútuo entre as bobinas 1 e 2 com o fluxo concatenado na própria bobina 2, obtemos:

$$\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = \frac{\frac{M_{12}i_2}{N_2}}{\frac{L_2i_2}{N_2}} = \frac{M_{12}}{L_2}$$

Relacionando o fluxo mútuo ϕ_{21} com o fluxo concatenado na própria bobina 1, ϕ_{11} , obtemos:

$$\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \frac{\frac{M_{21}i_1}{N_1}}{\frac{L_1i_1}{N_1}} = \frac{M_{21}}{L_1}$$

Substituindo em K, encontramos:

$$K = \sqrt{\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} \cdot \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}}$$

Considerando que:

$$\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} \leq 1 \quad e \quad \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} \leq 1$$

conclui-se que:

$$0 \leq K \leq 1$$

Como:

$$M = K\sqrt{L_1L_2}$$

Então:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1L_2}$$

Evidentemente, se $K=0$, não existe acoplamento entre as bobinas, visto que $M=0$. Se $K=1$, todo o fluxo enlaça todas as espiras das duas bobinas, o que é um transformador com acoplamento unitário.

O valor de K (e, portanto, de M) depende:

- Das dimensões das bobinas
- Do número de espiras de cada bobina
- Da posição relativa entre as bobinas
- Das propriedades magnéticas do núcleo

O nível de acoplamento nas bobinas é ponderado como:

$K < 0,5$ → Fracamente acopladas

$K > 0,5$ → Fortemente acopladas

A maioria dos transformadores com núcleo de ar são fracamente acoplados, em contraste com os transformadores que usam materiais ferromagnéticos no núcleo, nos quais K pode se aproximar da unidade.

4.8 – Transformador de impedância refletida

Neste tópico, vamos estudar algumas relações importantes de impedâncias, para o caso em regime permanente senoidal, abordando em representação fasorial, o circuito de um transformador com uma fonte real e_g no primário, alimentando uma impedância Z_2 no secundário.

4.8.1 - O circuito

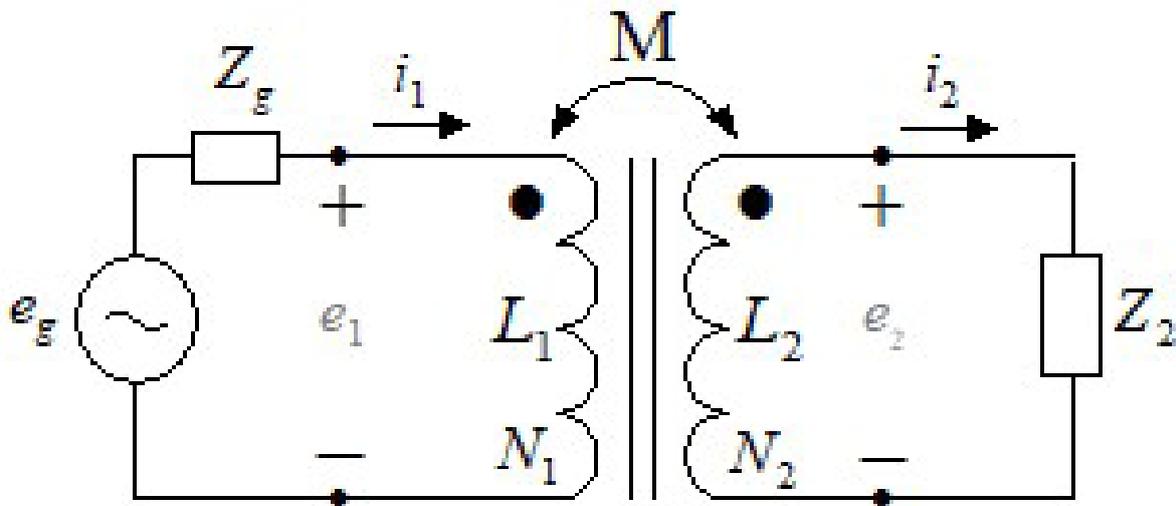


Figura 4.11 - Transformador linear com carga alimentado por uma fonte real

Aplicando a primeira 1ª Lei de Kirchhoff e tornando $E_g = E_1$, temos:

$$\dot{E}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \quad (\text{I})$$

$$0 = j\omega M \dot{I}_1 - (\dot{Z}_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 \quad (\text{II})$$

4.8.2 - Relação tensão-corrente

Calculando-se \dot{I}_2 na equação II e substituindo na equação I, acha-se a relação \dot{E}_1 / \dot{I}_1 .

$$j\omega M \dot{I}_1 = (Z_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2$$

onde:

$$\dot{i}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2 + j\omega L_2}$$

Substituindo \dot{i}_2 na equação I, encontramos:

$$\dot{E}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \left(\frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_2 + j\omega L_2} \right)$$

que resulta em:

$$\dot{E}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + j\omega L_2} \dot{I}_1$$

Dividindo por \dot{I}_1 , vem:

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1} = \dot{Z}_1 = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + j\omega L_2}$$

Analisando o lado direito da igualdade, podemos concluir que:

$$j\omega L_1 = \dot{Z}_{L1} \rightarrow \text{impedância da bobina do primário}$$

$$\frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + j\omega L_2} = \dot{Z}_R \rightarrow \text{impedância refletida do secundário no primário}$$

4.8.3 - Relação de corrente

A relação das correntes pode ser obtida da equação II, onde:

$$j\omega M \dot{I}_1 = (Z_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2$$

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega M}{Z_2 + j\omega L_2}$$

4.8.4 - Relação de tensão

A relação das tensões \dot{E}_2/\dot{E}_1 pode ser calculada a partir da relação \dot{E}_1/\dot{I}_1 , tornando:

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{I}_2}{\dot{E}_1} \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = \dot{Z}_2 \frac{\dot{I}_1}{\dot{E}_1} \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

racionalizando a expressão \dot{E}_1/\dot{I}_1 vem:

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega L_1(\dot{Z}_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{\dot{Z}_2 + j\omega L_2}$$

Invertendo a expressão \dot{E}_1/\dot{I}_1 , temos:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{E}_1} = \frac{\dot{Z}_2 + j\omega L_2}{j\omega L_1(\dot{Z}_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

Substituindo \dot{I}_1/\dot{E}_1 e \dot{I}_2/\dot{I}_1 em \dot{E}_2/\dot{E}_1 , obtemos:

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = \dot{Z}_2 \frac{\dot{Z}_2 + j\omega L_2}{j\omega L_1(\dot{Z}_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \cdot \frac{j\omega M}{\dot{Z}_2 + j\omega L_2}$$

que resulta em:

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = \frac{j\omega M \dot{Z}_2}{j\omega L_1(\dot{Z}_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

Propriedades

É interessante notar duas propriedades importantes:

- a) Z_R é independente dos pontos de polaridade do transformador. Se algum dos pontos for trocado para o terminal oposto, o sinal do termo mútuo para cada equação muda. Isto é equivalente

a substituir M por $-M$. Visto que Z_R não varia com M^2 , seu sinal não altera.

b) Uma segunda propriedade importante é ilustrada racionalizando Z_R .

Tornando: $\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2$, obtemos:

$$\dot{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + jX_2 + j\omega L_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j(X_2 + \omega L_2)}$$

Racionalizando:

$$\dot{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j(X_2 + \omega L_2)} \frac{[R_2 - j(X_2 + \omega L_2)]}{[R_2 - j(X_2 + \omega L_2)]}$$

$$\dot{Z}_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_2 + \omega L_2)^2} [R_2 - j(X_2 + \omega L_2)]$$

onde R_2 e X_2 são a resistência e a reatância no secundário, respectivamente.

Notamos que o sinal na parte imaginária é negativo, e, portanto, a reatância refletida ($X_2 + \omega L_2$) se opõe à reatância do primário.

Para uma reatância capacitiva $-jX_2$ na carga, onde seu módulo é menor que ωL_2 , ou para uma reatância indutiva jX_2 , teremos como resultado uma reatância capacitiva X_R refletida no primário.

Para uma reatância nula na carga, teremos uma condição de ressonância, em que:

$$X_2 = -\omega L_2 = -\frac{1}{\omega C_2}$$

onde:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}} \text{ e } \omega = \omega_R$$

e a impedância Z_R será:

$$\dot{Z}_R = \frac{\omega_r^2 M^2}{R_2^2 + (0)^2} [R_2 - j(0)]$$

que resulta em:

$$\dot{Z}_R = \frac{\omega_r^2 M^2}{R_2}$$

que é puramente real.

Inspecionando as equações de \dot{I}_2/\dot{I}_1 e \dot{E}_2/\dot{E}_1 , vemos que o ponto de polaridade em um dos enrolamentos ocorre no terminal oposto. Assim, as relações de tensão e corrente dependem de uma mudança de sinal, ao passo que as relações de impedância não se alteram.

4.8.5 - Exercícios

1) Na *Figura 4.11*, dado: $E_g = 100e^{j0^\circ}(\text{V})$; $Z_g = 40(\Omega)$; $L_1 = 0,5 (\text{H})$; $L_2 = 0,1 (\text{H})$; $M = 0,1 (\text{H})$ e $\omega = 100 (\text{rd/s})$. Se $Z_2 = 10 - j(1000/\omega) \Omega$, calcule:

a) Z_{in}

b) I_1

c) I_2

d) E_1

e) E_2

2) Repita o exercício 1 se o ponto de polaridade estiver no terminal inferior do secundário.

3) Calcule a frequência para a qual a impedância refletida no circuito é real, se $L_2 = 2(\text{H})$ e o secundário é formado por uma resistência de $6 (\Omega)$ em série com uma capacitância $1/32(\text{F})$.

Respostas:

1)

a) $50 + j50$ (Ω)

b) $1 - j1$ (A)

c) $1 + j1$ (A)

d) $60 + j40$ (V)

e) 20 (V)

2)

a) $50 + j50$ (Ω)

b) $1 - j1$ (A)

c) $-1 - j1$ (A)

d) $60 + j40$ (V)

e) -20 (V)

3)

4 (rd/s).

Referências

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. AMGH, 2018.

BOYLESTAD, R. L. *Introdução à Análise de Circuitos*. 13. ed. Pearson, 2019.

DORF, R. C.; SVOBODA, JAMES. A. *Introdução aos Circuitos Elétricos*. 9. ed. LTC, 2016.

FABRIS, Eric Ericson. *Instrumento para medida digital de potência e valor eficaz de corrente e tensão distorcidas*. 1994. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

JONHNSON, D. E. *Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos*. LTC, 2000.

NILSSON, James; RIEDEL, Susan. *Circuitos Elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

THOMAS, Roland E.; ROSA, Albert J.; TOUSSAINT, Gregory J. *Análise e Projetos de Circuitos Elétricos Lineares*. 6. ed. Bookman, 2011.

Sobre o autor

Possui graduação em Telecomunicações pela Fundação Instituto Nacional de Telecomunicações em Santa Rita do Sapucaí - MG, INATEL (1980), mestrado em Qualidade de Energia(2000) e doutorado em Máquinas Elétricas pela Universidade Federal de Uberlândia (2006). Atualmente é professor adjunto na Universidade do Estado do Amazonas (UEA). Tem experiência nas áreas de Máquinas Elétricas, Eletrônica de Potência, Eletrônica Analógica e Digital, atuando principalmente nos seguintes temas: Motor de Indução, PWM, Circuitos Elétricos, Linguagem Funcional Ocaml, Simulação Computacional de Máquinas Elétricas, Qualidade de Energia e Circuitos Elétricos.

Dezembro de dois mil e vinte e um, cento e setenta e seis anos da
formulação, por Gustav Robert Kirchhoff, da Lei dos Nós ou Lei das
Correntes e da Lei das Malhas ou Lei das Tensões.



para conhecer mais da *editora*UEA e de nossas publicações, acesse nosso site e
nos siga nas redes sociais

editora.uea.edu.br

ueaeditora



