

MONOPOLOS MAGNÉTICOS E A QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

MAGNETICS MONOPOLES AND CHARGE ELECTRICAL QUANTIZATION

Yuri do Nascimento Lima¹
Gabriel de Lima e Silva²

Resumo: Este trabalho trata sobre os monopolos magnéticos e a quantização da carga elétrica. Será apresentado uma forma de justificar a quantização da carga elétrica fazendo uso da previsão teórica do físico britânico Paul Audrien Maurice Dirac da existência da carga magnética. Para tanto, será abordado sobre a existência de uma assimetria nas equações de Maxwell, assim como a forma de detecção de um monopolo magnético, e também sobre a interação dos monopolos magnéticos com a matéria. A última seção traz uma análise do resultado obtido dos cálculos realizados no apêndice A, que por sua vez trata o cálculo do momento angular total do sistema conhecido como dipolo de Thonson.

Palavras-Chave: Quantização, carga elétrica, monopolo magnético.

Abstract: This work deals with the magnetic monopoles and the quantization of the electric charge. We will present a way to justify the quantization of the electric charge by making use of the theoretical prediction of the British physicist Paul Audrien Maurice Dirac of the existence of the magnetic charge. In order to do so, we will discuss the existence of an asymmetry in Maxwell's equations, as well as the way of detecting a magnetic monopole, as well as the interaction of magnetic monopoles with matter. The last section brings an analysis of the result obtained from the calculations reported in Appendix A, which in turn treats the calculation of the total angular momentum of the system known as the Thonson dipole.

Keywords: Quantization, electric charge, magnetic monopole.

Introdução

A ideia deste artigo surgiu de um problema proposto no livro Eletrodinâmica (GRIFFITHS, 2011, p. 251), a questão pede que se encontre o momento angular total armazenado nos campos de uma carga elétrica e uma suposta carga magnética, separadas por uma distância qualquer. Partindo desta questão começou-se a estudar a carga magnética suposta por P.A.M. Dirac. A resolução da questão proposta pelo livro leva a um resultado interessante, cuja a análise está descrita no decorrer deste artigo. Embora, experimentos tenham sido realizados e até o momento não foram detectados os monopolos magnéticos, certamente isso não deve ser um impeditivo para se realizar conjecturas e suposições de quais resultados podemos obter se acaso os tais monopolos magnéticos venham a ser detectados.

A primeira seção deste artigo discorre brevemente sobre as equações de Maxwell e faz uma análise sobre a implementação da densidade de carga e densidade de corrente magnéticas nessas equações, além disso, esse tópico aponta que ao se considerar tais modificações nas equações de Maxwell surgem desdobramentos interessantes no

¹ Graduando em Licenciatura em Física, Universidade do Estado do Amazonas – UEA, Brasil, limayuri.91@hotmail.com.

² Mestre em Física, Universidade do Estado do Amazonas – UEA, Brasil, galima@uea.edu.br.

eletromagnetismo. Na segunda seção é abordado sobre a detecção dos monopolos magnéticos, as formas que seriam possíveis de se detectar e um trabalho realizado na tentativa de detectá-los. E para se entender um pouco mais sobre essa detecção é abordada na terceira seção a interação do monopolo magnético com a matéria. A quarta e última é dedicada a uma análise do resultado calculado no apêndice A, que por sua vez é dedicado aos cálculos realizados para se encontrar a quantização da carga elétrica partindo da inserção dos monopolos magnéticos no eletromagnetismo, aqui os cálculos estão trabalhados detalhadamente. Por fim, consta na conclusão uma síntese de todo o trabalho. O trabalho que se segue, em seus cálculos, faz uso do sistema MKS. Além disso, vale observar, que há cálculos similares em outras literaturas.

Antes de iniciar o estudo da relação dos monopolos magnéticos com a quantização da carga elétrica é interessante conhecer um pouco dos pontos históricos que contribuíram para o conhecimento atual sobre o magnetismo.

O estudioso francês Petrus Peregrinus de Maharncuria, em experimentos com agulhas magnéticas, foi quem primeiro indicou a inseparabilidade dos polos magnéticos de um ímã. Em 1269 em uma carta escrita para um amigo, além da observação de que um ímã sempre que dividido mantém os dois polos, Petrus descreve sobre a atração e repulsão desses polos e também sobre o experimento com limalhas de ferro sobre o papel, que ao se aproximar o ímã pelo outro lado do papel as limalhas formavam linhas que se orientavam de um polo ao outro. Embora o Físico dinamarquês Hans Christian Ørsted, desde 1807, já viesse buscando uma relação entre eletricidade e magnetismo, ele só observou em 1820 durante um curso sobre Eletricidade, Galvanismo e Magnetismo que ministrou na Universidade de Copenhague. Ørsted observou que ao colocar o fio condutor paralelamente à uma agulha magnética, a agulha defletia sensivelmente. O próximo passo foi dado por André-Marie Ampère, em 1822, mostrou que quando circuitos espiralados são percorridos por uma corrente elétrica, estes passam a interagir como se fossem polos de um ímã. Assim, Ampère afirmou que o magnetismo de um material era motivado por este ser um material com substância magnética composta por pequenas espiras, além disso, trouxe a ideia que materiais não magnéticos possuem suas espiras orientadas ao acaso o que resultaria em um efeito nulo. Atualmente sabe-se que as propriedades magnéticas dos materiais têm origem atômica, a somatória de dipolos magnéticos resulta ou não em magnetização, ou seja, o alinhamento dos domínios magnéticos (cada domínio encerra bilhões de dipolos alinhados) resulta na magnetização do material, enquanto que domínios organizados aleatoriamente resultam na não magnetização. James Clerk Maxwell em 1954 traz em seu livro "A Treatise on Electricity & Magnetism" a demonstração da inseparabilidade dos polos magnéticos, assim como resume todo o Eletromagnetismo nas quatro equações, hoje conhecidas como equações de Maxwell [1,2,3,4,5].

1. Assimetria das equações Maxwell e Monopolos Magnéticos

Embora Charles de Coulomb e outros físicos acreditassem que o magnetismo pudesse ser produzido por cargas magnéticas, foi somente em 1931 que o físico teórico P.A.M. Dirac propôs a existência de partículas elementares do magnetismo, os monopolos magnéticos. Para isso, trabalhou em cima da aparente assimetria existente nas equações do Eletromagnetismo formuladas por James Clerk Maxwell em 1862.

Equações de Maxwell na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_E \quad (1.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}_E \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1d)$$

O interesse de Dirac residia em compreender o motivo pelo qual as cargas elétricas das partículas elementares sempre se apresentam em valores discretos, ou seja, as cargas elétricas dessas partículas sempre se mostram como múltiplos inteiros da carga elementar ($e = 1,602176 \cdot 10^{-19} \text{C}$).

Analisando as equações de Maxwell:

1. A lei de Gauss, equação (1.1a), expõe a relação entre o campo elétrico \mathbf{E} e a densidade de carga ρ_E que dá origem ao próprio campo elétrico;
2. A aparentemente não existência dos monopolos magnéticos é evidenciada na equação (1.1b). Enquanto que pela equação (1.1a) o divergente de um campo elétrico está diretamente relacionado a uma densidade de carga elétrica, a equação (1.1b) mostra que o divergente de um campo magnético é nulo, ou seja, aparentemente não está relacionado a uma densidade de carga magnética. Basicamente esta equação dita a inexistência de monopolos magnéticos e que as linhas de campo magnético sempre são fechadas;
3. A lei de Ampère, equação (1.1c), mostra a relação entre um campo elétrico variável e o campo magnético associado a este na presença da densidade de corrente elétrica \mathbf{J}_E . Portanto, essa equação diz que um campo magnético surge devido ao movimento de cargas elétricas;
4. A lei de indução de Faraday, equação (1.1d), evidencia a inexistência de correntes magnéticas, assim, fechando a ideia de que o magnetismo surge como um produto do movimento das cargas elétricas, dada nas equações anteriores.

É válido observar que resultados experimentais mostram que os campos elétricos possuem linhas de campos que se originam em cargas positivas e terminam em cargas negativas, enquanto que as linhas dos campos magnéticos não possuem um começo ou um fim. Tal afirmação juntamente com a breve análise enumerada acima, são os motivos que levam a conclusão da não existência da carga pontual para o campo magnético, e aponta para uma inseparabilidade dos polos magnéticos.

No entanto, se observado criteriosamente, nota-se uma falta de simetria nas equações de Maxwell, nos campos elétricos e magnéticos. Este é o ponto explorado por Dirac na sua proposta da existência dos monopolos magnéticos, e traz consigo uma completa simetria para essas equações. Considerando essa proposta, pode-se reescrever as equações de Maxwell tomando as densidades de carga e de corrente magnéticas, ρ_M e \mathbf{J}_M :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_E \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_M \quad (1.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}_E \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{J}_M \quad (1.2d)$$

Embora exista uma simetria est\u00e9tica nas equa\u00e7\u00f5es descritas acima, as equa\u00e7\u00f5es (1.2b) e (1.2d) entram em conflito com a observa\u00e7\u00e3o experimental de que as linhas de for\u00e7a magn\u00e9tica s\u00e3o fechadas – isto pode ser melhor observado na integral $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, que \u00e9 a equa\u00e7\u00e3o equivalente a equa\u00e7\u00e3o (1.2b) – e pelo fato de que cargas e correntes magn\u00e9ticas n\u00e3o s\u00e3o observadas, no entanto, Dirac traz o argumento de que n\u00e3o h\u00e1 necessariamente uma inconsist\u00eancia [6]. E ao implementar os monopolos nas equa\u00e7\u00f5es de Maxwell, considerando a intera\u00e7\u00e3o entre uma carga el\u00e9trica q_E e um monopolo magn\u00e9tico q_M , pode-se chegar ao seguinte resultado³:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 q_e q_m}{2\pi} &= n\hbar \\ q_m &= n \frac{2\pi\hbar}{\mu_0 q_e} = n q_e \left(\frac{2\pi\hbar}{\mu_0 q_e^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Onde \hbar \u00e9 a constante reduzida de Planck, ou constante de Dirac ($1,054571 \cdot 10^{-34}$ J s), μ_0 \u00e9 a permeabilidade do v\u00e1cuo ($4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$) e q_e a carga el\u00e9trica ($-1,602176 \cdot 10^{-19}$ C). Logo:

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{n}{2} q_e \left(\frac{1,054571 \cdot 10^{-34} \text{Js}}{2,566967 \cdot 10^{-45} \frac{NC^2}{A^2}} \right) \\ q_m &= \frac{n}{2} q_e 0,410828 \cdot 10^{11} \text{m/s} \\ q_m &\approx \frac{n}{2} q_e 410,82 \cdot 10^{14} \text{m/s} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Portanto, a intensidade do monopolo magn\u00e9tico seria de aproximadamente $410,82 \cdot 10^{14}$ vez maior que o valor da intensidade da carga el\u00e9trica, logo, um par de monopolos (norte e sul) possuiria uma for\u00e7a de intera\u00e7\u00e3o de aproximadamente $205,41 \cdot 10^{14}$ vezes maior que a for\u00e7a entre duas cargas opostas, separadas por uma dist\u00e2ncia qualquer. Ou seja, um par de monopolos magn\u00e9ticos formaria um sistema fortemente ligado, com uma for\u00e7a de acoplamento extremamente intensa. Em teoria, essa grande for\u00e7a que liga os monopolos seria um dos motivos para a dificuldade de se encontrar um monopolo magn\u00e9tico sem estar ligado ao sistema (norte e sul).

Sobre os valores da intensidade da intera\u00e7\u00e3o da carga magn\u00e9tica calculados acima, vale observar que em muitas outras literaturas esses valores diferem dos calculados aqui, tal diferen\u00e7a ocorre devido as demais literaturas estarem descritas no sistema CGS.

2. Detec\u00e7\u00e3o dos Monopolos Magn\u00e9ticos

Considerando a possibilidade de exist\u00eancia dos monopolos magn\u00e9ticos, pode-se estudar uma maneira de detect\u00e1-los. Pelo princ\u00edpio da conserva\u00e7\u00e3o de carga, assim como a carga el\u00e9trica, a carga magn\u00e9tica deve ser conservada.

³ O c\u00e1lculo deste resultado est\u00e1 desenvolvido na se\u00e7\u00e3o 4.

Aplicando o divergente na equação (1.2d):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \mathbf{J}_M - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_M - \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_M - \frac{\partial (\mu_0 \rho_M)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}_M - \mu_0 \frac{\partial \rho_M}{\partial t} \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \left(\nabla \cdot \mathbf{J}_M + \frac{\partial \rho_M}{\partial t} \right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Usando a propriedade $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$, a conservação da carga magnética será:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_M + \frac{\partial \rho_M}{\partial t} = 0\tag{2.2}$$

Sobre a conservação de carga é interessante fazer uma breve análise:

É importante observar que a equação da conservação de carga que também é conhecida como equação de continuidade não surge simplesmente como um pressuposto, mas sim a partir de uma dedução das equações de Maxwell. A ideia da conservação de cargas, de uma forma global, pode ser entendida como: desde que o sistema esteja em isolamento, o total de cargas desse sistema deve ser estacionário. Mas, além disso, de um ponto de vista local, pode-se chegar ao seguinte entendimento: em determinado volume, se a carga total vem a ser alterada, a quantidade de carga que passou para dentro ou para fora do volume, passou através de sua superfície.

As duas ideias apresentadas no parágrafo imediatamente acima, são afirmações gerais sobre a equação de continuidade, essas duas ideias podem levar a um entendimento mais significativo do objetivo deste estudo. Partindo dessas premissas, é seguro inferir que a carga total sempre deve ser conservada, ou seja, não se pode criar ou destruir cargas. Uma forma que isso pode ser observado é na produção de pares⁴. Desta forma, cada partícula possui uma antipartícula e essa última recebe o nome de antimatéria. Em resumo, para qualquer sistema, seu estado antes e após qualquer reação deverá ter carga total conservada.

Para atender à exigência acima, se existem cargas magnéticas, essas não podem desaparecer sozinhas, devem ser criadas e/ou aniquiladas em pares (partícula/ antipartícula) [7]. Em tese, os monopolos magnéticos podem ser criados aos pares nas colisões de partículas de altas energias.

Um exemplo é a interação de um fóton de altíssima energia com um próton, representado na figura 2.1. Neste caso, sendo M a massa do monopolo magnético e E_γ a energia do fóton, pelo princípio da conservação de energia, o fóton deverá ter uma energia de no mínimo duas vezes a energia da carga magnética em repouso: $E_\gamma = 2Mc^2$.

⁴ A produção de pares é a criação de uma partícula elementar e sua antipartícula, geralmente a partir de um fóton (ou outro bóson neutro). Isto é permitido, desde que haja energia suficiente para criar o par (no caso do par elétron-pósitron, por exemplo, essa energia deve ser acima de 1,02 Mev).

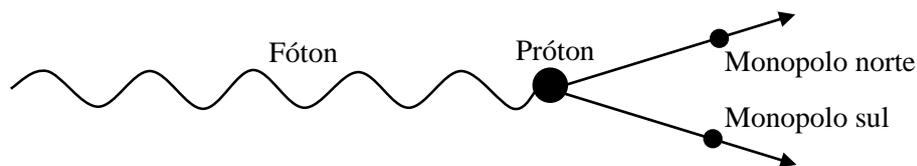


Figura 2.1: Esquemática da interação de um fóton de altíssima energia com um próton.

No entanto – em trabalhos independentes realizados pelo físico holandês Gerardus 't Hooft (PNF 1999) e pelo físico russo Alexander Polyakov, acerca da unificação entre as forças eletromagnética, fraca e forte, hoje conhecida como Teoria da Grande Unificação (TGU)⁵, em 1974 – foi calculado que a massa de um monopolo magnético seria muito alta ($M \approx 10^{14}m_p$, onde m_p é a massa do próton), desta forma, sua detecção envolve altas energias que teoricamente só são conseguidas em experiências com os raios cósmicos remanescentes da formação de nosso Universo, por ocasião do Big Bang [6,7].

Dada a dificuldade de se obter tamanha energia, pode-se partir para uma outra possibilidade, um tanto mais viável que a primeira. Esta consiste em procurar na atmosfera terrestre as cargas magnéticas, como componente dos raios cósmicos. Partindo desta ideia, uma primeira experiência realizada em 1975 pelos físicos norte-americanos P.B Price, W. Z. Osborne e L.S. Pinsky – onde examinaram o traçado deixado por uma partícula cósmica em um arranjo experimental constituído de um detector de Cherenkov⁶ e de placas com emulsões nucleares, colocadas em um balão a uma grande altitude – levou os físicos envolvidos a observação de um indício da existência de um monopolo magnético, extremamente pesado [7].

3. Interação dos Monopolos com a Matéria

Para melhor compreensão da questão da detecção dos monopolos magnéticos é válido realizar um breve estudo acerca da interação do monopolo com a matéria.

Uma carga elétrica estacionária produz um campo elétrico radial, e quando se encontra em movimento produz um campo magnético circular proporcional a velocidade da partícula elétrica [5,6,7]. Portanto, tratando-se das equações (1.2), pode-se considerar que devido a simetria que essas equações apresentam nos campos elétricos e magnéticos, uma carga magnética em repouso produziria um campo magnético radial, e quando em movimento produziria um campo elétrico circular, proporcional à sua velocidade (figura 3.1).

⁵ A Teoria da Grande Unificação (TGU) foi proposta em 1974 por Steven Weinberg e Abdus Salam, e propõe unir a Mecânica Quântica e a Relatividade geral, portanto, interligar e justificar os todos fenômenos.

⁶ Um detector Cherenkov trabalha baseado na detecção da radiação Cherenkov, essa é produzida quando uma partícula carregada energeticamente passa por um meio com velocidade maior que a da luz nesse meio

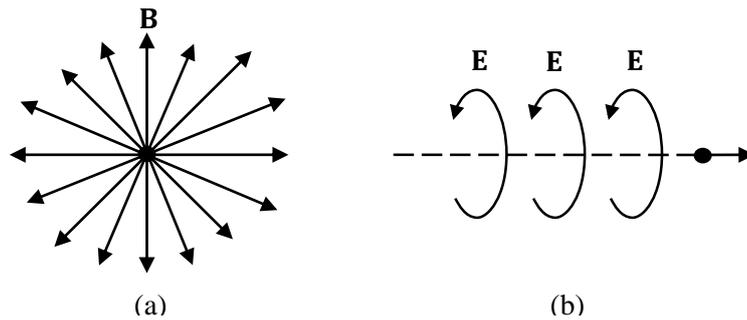


Figura 3.1: Esquemática das linhas de campo (a) magnético e (b) elétrico, geradas por um monopolo magnético em (a) repouso e em (b) movimento.

Ocorre que, durante a passagem da carga magnética na matéria, devido a sua interação com os átomos, a carga magnética perderá energia, conseqüentemente sua velocidade decresce. Como o monopolo exerce uma força elétrica proporcional a sua velocidade:

$$F_E \propto q_M v \quad (3.1)$$

E o tempo efetivo de interação será inversamente proporcional à velocidade:

$$\Delta t \propto \frac{1}{v} \quad (3.2)$$

O impulso transferido à matéria pelo monopolo durante a trajetória será:

$$I_M \propto F_E \Delta t \propto q_M \quad (3.3)$$

Desta forma, a ionização⁷ resultante no material, devido à ação do campo elétrico do monopolo, será proporcional à energia transferida pela partícula em movimento na matéria aos elétrons do meio, ou seja, será proporcional ao impulso transferido à matéria. É importante salientar que a ionização produzida pela carga magnética será independente da velocidade. Conseqüentemente o traço do monopolo na matéria será uniforme. Enquanto que o traço produzido por uma carga elétrica se alarga a medida que a partícula for desacelerando na sua trajetória. Para a carga elétrica, a força elétrica é proporcional à própria carga:

$$F_E \propto q_E \quad (3.4)$$

O tempo efetivo para a interação da carga elétrica com a matéria, assim como no caso do monopolo magnético, será inversamente proporcional à velocidade, equação (3.2). Desta forma o impulso transferido será:

$$I_E \propto F_E \Delta t \propto \frac{q_E}{v} \quad (3.5)$$

Portanto, para a carga elétrica, quanto menor a velocidade maior será a ionização, desta forma, o traço se alarga a medida que a velocidade da partícula for desacelerada na sua passagem pela matéria.

Basicamente, o dispositivo usado por P.B. Price, W.Z. Osborne e L.S. Pinsky no experimento citado na seção 2 é consistido por um detector de Cherenkov e um

⁷ Ionização é o processo em que ocorre o carregamento elétrico de átomos ou um grupo de átomos neutros, ou seja, esses adquirem carga elétrica.

grande número (da ordem de 30) de placas que medem a ionização. Nesta experiência foi observado um traço de uma partícula muito energética, que atravessou todo o dispositivo experimental, e conforme citado no tópico 2, assim, apontando para uma possibilidade de se tratar de um monopolo magnético.

4. Quantização da Carga Elétrica e os Monopolos Magnéticos

A carga elétrica, devido a quantização, em sua forma livre, só se apresenta em múltiplos inteiros da carga elétrica de um elétron. Mas por qual motivo isso acontece? O motivo da quantização da carga elétrica é uma das grandes questões da Física, em específico do Eletromagnetismo, e como visto nos tópicos anteriores, buscando simetrizar as equações de Maxwell e justificar a questão apresentada acima, o físico P.A.M. Dirac motivou-se a considerar monopolos magnéticos em seus cálculos. Conforme exposto, a existência de um monopolo magnético justificaria a quantização da carga elétrica.

O Dipolo de Thonson

Uma forma interessante de se chegar a uma compreensão da relação da quantização da carga elétrica e dos monopolos magnéticos é trabalhando com o dipolo de Thonson. Esse sistema é formado por uma carga elétrica q_E e uma carga magnética q_M separados por uma distância d , ambas estáticas. O resultado encontrado ao realizar o cálculo do momento angular total desse sistema fornece uma ideia mais clara acerca dessa relação⁸.

Observa-se que, pela equação (A.60), o momento angular se orienta na direção e no sentido do vetor \mathbf{r}_M , ou seja, esse vetor aponta da carga elétrica para a carga magnética. Também fica notório que a distância que separa as cargas não influencia o momento angular entre elas.

O cálculo do momento angular entre duas cargas, uma elétrica e uma suposta magnética, indica um resultado importante. Pela Mecânica Quântica temos que o momento angular é dado em unidades semi-inteiras de \hbar .

$$L_{EM} = n \frac{\hbar}{2} \quad (4.1)$$

Com $n = 1, 2, 3, \dots$

Fazendo uso da equação (A.61) e da (4.1):

$$\frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} = n \frac{\hbar}{2} \quad (4.2)$$

$$q_E = n \left(\frac{4\pi \hbar}{\mu_0 q_M} \frac{1}{2} \right)$$

$$q_E = ne \quad (4.3)$$

Nesse trabalho consideramos quantização da carga o fato dela se apresentar na natureza como um múltiplo de uma unidade fundamental, a saber "e". A relação acima expõe uma ligação direta entre a carga elétrica e a carga magnética de um

⁸ Os cálculos do momento angular total do dipolo de Thonson podem ser encontrados no apêndice A.

dipolo de Thonson. Assim, basta que seja detectado um único monopolo magnético, q_M , para que se possa explicar a razão pela qual a carga elétrica é quantizada.

Conclusão

O fato de que a detecção de um único monopolo magnético justificaria a quantização da carga elétrica, é surpreendente. A confirmação da existência da carga magnética implica em dizer que uma parte do eletromagnetismo seria revisto, agora considerando o magnetismo como resultado de cargas magnéticas e não mais como um produto do movimento de cargas elétricas.

Longe de confirmar a existência dos monopolos magnéticos, este artigo se propôs a mostrar uma consequência da existência do mesmo, uma justificativa para a quantização da carga elétrica. Aqui foi estudada a forma de detecção e como seria a interação de uma carga magnética com a matéria. Além disso, o texto aponta que existe uma assimetria nas equações de Maxwell, tal assimetria seria o motivo que levou Dirac a propor a existência dos monopolos magnéticos. Certamente, vários argumentos se contrapõe a teoria dos monopolos magnéticos de Dirac – um deles é que sabe-se experimentalmente que o fluxo de campo magnético é conservativo, contradizendo a ideia de uma carga magnética isolada. O Físico buscou contornar essa dificuldade propondo a existência de uma linha formada de dipolos magnéticos, essa ideia da linha de Dirac foi mais tarde, em 1975, complementada (e assim melhor elucidada) pelos Físicos chineses Tai Tsun Wu e Chen Ning Yang. Esses verificaram que um fator de fase (fator de gauge) seria o responsável pelos fenômenos magnéticos, e comprovaram que a linha de Dirac é uma projeção de um monopolo magnético – além disso, trabalhos independentes relativos a Teoria da Grande Unificação (TGU) levam à existência das cargas magnéticas [8,9]. De qualquer forma, os monopolos magnéticos, pelo fato de ainda não terem sido observados/confirmados, pertencem ao campo teórico da Física. No entanto, os indícios são fortes, e por não terem sido detectados não implica necessariamente que não existam.

Referências

- [1] BASSALO, J. **Eletrodinâmica Clássica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008;
- [2] GRIFFITHS, D. **Eletrodinâmica**. 3ª ed. São Paulo: Pearson, 2011;
- [3] MACHADO, K. **Eletromagnetismo**: volume 1. Ponta Grossa: Toda Palavra, 2012;
- [4] MACHADO, K. **Eletromagnetismo**: volume 2. Ponta Grossa: Toda Palavra, 2013;
- [5] MACHADO, K. **Eletromagnetismo**: volume 3. Ponta Grossa: Toda Palavra, 2013;
- [6] FRENKEL, J. **Princípios de Eletrodinâmica Clássica**. 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2006;
- [7] FRENKEL, J; FRENKEL, M. **Monopolos Magnéticos**. **Sbfísica**, vol. 03, n 2, 1981. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pesquisa.php>>. Acesso em: 05 jan. 2018;
- [8] WU, T; YANG, C. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields. In: **Selected Papers (1945-1980), With Commentary**. World Scientific, 2005. Pág. 460-472;
- [9] RAJANTIE, A. **Introduction to Magnetic Monopoles**. **The Royal Society**, 2012. Disponível em: <<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/370/1981/5705>>. Acesso em: 12 jun 2018.

Apêndice A

Fins de demonstrar a relação da quantização da carga elétrica e dos monopolos magnéticos será calculado o momento angular total do sistema chamado “dipolo de Thonson”. Este é um sistema formado por uma carga elétrica q_E e uma carga magnética q_M separados por uma distância d , ambas estáticas.

Fazendo as devidas correlações, os campos devido as cargas q_E e q_M são:

$$\mathbf{E} = \frac{q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_M}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^3} \quad (\text{A.2})$$

Colocando q_E na origem, de modo que o vetor localização em relação a origem seja nulo ($\mathbf{r}_E = 0$). A equação (A.1) fica:

$$\mathbf{E} = \frac{q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - 0}{|\mathbf{r} - 0|^3} = \frac{q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

Colocando o monopolo magnético em \mathbf{r}_M , e fazendo:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_M = \mathbf{R} \quad (\text{A.4})$$

Portanto, obtém-se para a equação (A.2):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q_M}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 q_M}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (\text{A.5})$$

Precisa-se da densidade volumétrica de momento angular, que é dada por:

$$\mathbf{l}_{EM} = \mathbf{r} \times \wp_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times \mathbf{S} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{l}_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\mathbf{l}_{EM} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times \left(\frac{q_E}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \times \mathbf{H} \right)$$

$$\mathbf{l}_{EM} = \frac{\mu_0 q_E}{4\pi r} \hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}) \quad (\text{A.7})$$

Fazendo uso da propriedade do duplo produto vetorial:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{A.8})$$

Na parte $\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H})$ da equação (4.7):

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}) = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H})\hat{\mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{H} = (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{H} \quad (\text{A.9})$$

Também, faz-se necessário uso da seguinte relação:

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)f(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{f(r)}{r} [\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \frac{\partial f}{\partial r} (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10})$$

Fazendo: $f(r) = 1$ e $\mathbf{a} = \mathbf{H}$, obtemos:

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}] + \frac{\partial f}{\partial r} (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$$

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r} [\mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}]$$

$$(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{H} - (\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.11})$$

Relacionando a equação (A.11) com a equação (A.9):

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}) = -(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (\text{A.12})$$

Relacionando a equação (A.12) com a equação (A.7):

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{EM} &= \frac{\mu_0 q_E}{4\pi r} [-(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{r}] \\ \mathbf{l}_{EM} &= -\frac{\mu_0 q_E}{4\pi r} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Como $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (para $\mathbf{M} = 0$):

$$\mathbf{l}_{EM} = -\frac{q_E}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.14})$$

Calculando o momento angular total:

$$\mathbf{L}_{EM} = \int_V \mathbf{l}_{EM} dV \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{EM} &= \int_V -\frac{q_E}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV \\ \mathbf{L}_{EM} &= -\frac{q_E}{4\pi} \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Pode-se fazer uso da seguinte identidade:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \nabla) Y dV = \oint_S Y (\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) dA \quad (\text{A.17})$$

Fazendo: $\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{X} = \mathbf{B}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV &= \oint_S \hat{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) dA \\ \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) \hat{\mathbf{r}} dV + \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV &= \oint_S \hat{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) dA \\ \int_V (\mathbf{B} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{r}} dV &= \oint_S \hat{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) dA - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) \hat{\mathbf{r}} dV \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Aplicando a equação (A.18) em (A.16):

$$\mathbf{L}_{EM} = -\frac{q_E}{4\pi} \oint_S \hat{\mathbf{r}} (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s) dA + \frac{q_E}{4\pi} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) \hat{\mathbf{r}} dV \quad (\text{A.19})$$

Utilizando a equação (A.5), e a equação:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 4\pi \delta(\mathbf{R}) \quad (\text{A.20})$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi \delta(\mathbf{R}) \frac{R^3}{R} \cdot \frac{\mu_0 q_M}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mu_0 q_M \delta(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Considerando $\hat{n}_s = \hat{r}_s$ e substituindo os valores encontrados na equação (A.19):

$$\mathbf{L}_{EM} = -\frac{q_E}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\mu_0 q_M \mathbf{R}}{R^3} \cdot \hat{r}_s \right) \hat{r} dA + \frac{q_E}{4\pi} \int_V \mu_0 q_M \delta(\mathbf{R}) \hat{r} dV \quad (\text{A.22})$$

A função $\delta(\mathbf{R})$ faz com que \mathbf{R} deva ser avaliado em $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_M = 0 \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_M$, logo a parte $\frac{q_E}{4\pi} \int_V \mu_0 q_M \delta(\mathbf{R}) \hat{r} dV$ da equação (A.22) fica:

$$\frac{q_E}{4\pi} \int_V \mu_0 q_M \delta(\mathbf{R}) \hat{r} dV = \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M \quad (\text{A.23})$$

Portanto, a equação (A.22) fica:

$$\mathbf{L}_{EM} = \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M - \frac{\mu_0 q_M q_E}{(4\pi)^2} \oint_S \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \hat{r}_s}{R^3} \right) \hat{r} dA \quad (\text{A.24})$$

Aplicando a equação (A.4) no termo $\mathbf{R} \cdot \hat{r}_s$ da equação acima:

$$\mathbf{R} \cdot \hat{r}_s = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot \hat{r}_s$$

$$\mathbf{R} \cdot \hat{r}_s = (r\hat{r} - r_M \hat{r}_M) \cdot \hat{r}_s \quad (\text{A.25})$$

A Figura (A.1) ilustra a relação dada em (A.25).

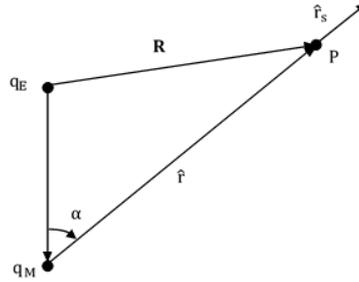


Figura A.1: Disposição cargas elétrica q_E e magnética q_M em relação ao ponto de medição P.

É interessante observar que até aqui não foi adotado nenhum sistema de coordenadas específico.

Observa-se que \hat{r}_s é o vetor normal a superfície em cada ponto. Assim:

$$\mathbf{R} \cdot \hat{r}_s = r - r_M \cos \alpha \quad (\text{A.26})$$

Aplicando a equação (A.26) na (A.24):

$$\mathbf{L}_{EM} = \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M - \frac{\mu_0 q_M q_E}{(4\pi)^2} \oint_S \frac{r - r_M \cos \alpha}{R^3} \hat{r} dA \quad (\text{A.27})$$

Orientando as cargas no sistema de coordenadas esféricas:

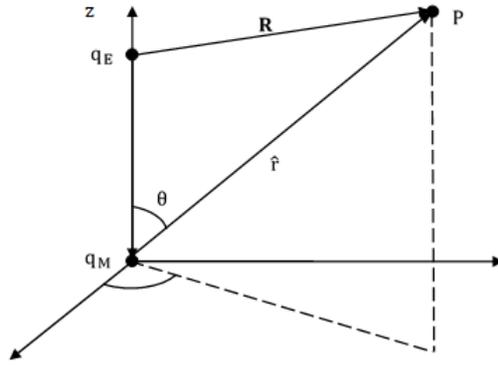


Figura A.2: Disposição das cargas elétrica e magnética no sistema de coordenadas esféricas.

Tomando α como sendo θ , que é o usual neste sistema de coordenadas.

O elemento de área (com r fixo) na superfície de uma esfera é dado por:

$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{A.28})$$

Portanto, a equação (A.27) fica:

$$\mathbf{L}_{EM} = \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{\mathbf{r}}_M - \frac{\mu_0 q_M q_E}{(4\pi)^2} \oint_S \hat{\mathbf{r}} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{A.29})$$

Para o termo R^3 da equação acima pode-se fazer uso da lei dos cossenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ac \cos \theta \quad (\text{A.30})$$

Assim:

$$R = \sqrt{r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta}$$

$$R^3 = (r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.31})$$

Além disso, pela figura (4.2):

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{A.32})$$

Substituindo a equação (A.31) e (A.32) na integral da equação (A.29):

$$\oint_S \hat{\mathbf{r}} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA = \oint_S (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}) \cdot \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\oint_S \hat{\mathbf{r}} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin^2 \theta \cos \phi \, d\theta \, d\phi \hat{\mathbf{i}}$$

$$+ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \, d\theta \, d\phi \hat{\mathbf{j}}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} r^2 \sin \theta \cos \phi \, d\theta d\phi \hat{k} \\
\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA &= r^2 \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin^2 \theta \cos \phi \, d\theta d\phi \\
& + r^2 \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin^2 \theta \sin \phi \, d\theta d\phi \\
& + r^2 \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Usando:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = [\sin \phi]_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 \tag{A.34}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = [-\cos \phi]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = 0 \tag{A.34}$$

Desta forma, a equação (4.33) fica:

$$\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA = r^2 \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta d\phi \tag{A.35}$$

Integrando em ϕ :

$$\frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} [\phi]_0^{2\pi} = \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \tag{A.36}$$

Retomando a equação (4.35):

$$\begin{aligned}
\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA &= 2\pi r^2 \hat{k} \int_0^\pi \frac{r - r_M \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\
\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA &= 2\pi r^2 \hat{k} \left\{ r \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \right. \\
&\quad \left. - r_M \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \right\}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Resolvendo as integrais por substituição de variáveis:

$$u = r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta \tag{A.38}$$

$$du = 2rr_M \sin \theta d\theta \quad (\text{A.39})$$

$$\sin \theta d\theta = \frac{du}{2rr_M} \quad (\text{A.40})$$

Os limites de integração:

$$0 = \theta_1$$

$$u_1 = r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos 0 = r^2 + r_M^2 - 2rr_M = (r - r_M)^2 \quad (\text{A.41})$$

$$\pi = \theta_2$$

$$u_2 = r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \pi = r^2 + r_M^2 + 2rr_M = (r + r_M)^2 \quad (\text{A.42})$$

Trabalhando com a integral $\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$ da equação (A.37):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{r^2 + r_M^2 - u}{2rr_M} \frac{du}{2rr_M}}{u^{\frac{3}{2}}} \\ \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \frac{1}{4r^2 r_M^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{r^2 + r_M^2 - u}{u^{\frac{3}{2}}} du \\ \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \frac{1}{4r^2 r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du - \int_{u_1}^{u_2} \frac{u}{u^{\frac{3}{2}}} du \right\} \\ \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \frac{1}{4r^2 r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \right]_{u_1}^{u_2} - [2\sqrt{u}]_{u_1}^{u_2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Trabalhando com a parte direita da igualdade (A.43), aplicando os limites de integração (A.41) e (A.42):

$$-\frac{1}{2r^2 r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \left[\frac{1}{\sqrt{(r + r_M)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r - r_M)^2}} \right] + \left[\sqrt{(r + r_M)^2} - \sqrt{(r - r_M)^2} \right] \right\} \quad (\text{A.44})$$

Analisando para o caso $r > r_M$, temos $|r - r_M| = r - r_M$:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2r^2 r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \left[\frac{(r - r_M) - (r + r_M)}{(r + r_M)(r - r_M)} \right] + r + r_M - r + r_M \right\} \\ &-\frac{1}{2r^2 r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \frac{-2r_M}{(r + r_M)(r - r_M)} + 2r_M \right\} \\ &-\frac{1}{r^2 r_M^2} \frac{-r^2 r_M - r_M^3 + r^2 r_M - r_M^3}{(r + r_M)(r - r_M)} \\ &-\frac{1}{r^2 r_M^2} \frac{-2r_M^3}{(r + r_M)(r - r_M)} \end{aligned}$$

$$\frac{2r_M}{r^2} \frac{1}{(r+r_M)(r-r_M)} \quad (\text{A.45})$$

Agora, analisando o caso onde $r < r_M$, temos $|r - r_M| = -(r - r_M)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2r^2r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \left[\frac{(r - r_M) + (r + r_M)}{(r + r_M)(r - r_M)} \right] + r + r_M + r - r_M \right\} \\ & -\frac{1}{2r^2r_M^2} \left\{ (r^2 + r_M^2) \frac{r - r_M + r + r_M}{(r + r_M)(r - r_M)} + 2r \right\} \\ & -\frac{1}{r^2r_M^2} \frac{r^3 + rr_M^2 + r^3 - rr_M^3}{(r + r_M)(r - r_M)} \\ & -\frac{2r}{r_M^2} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Identificando as equações (A.45) e (A.46) com $r_<$ e $r_>$ para indicar o menor e o maior entre r e r_M .

Para a equação (A.45) como $r > r_M$, temos $r = r_>$ e $r_M = r_<$, logo:

$$\frac{2r_<}{r_>^2} \frac{1}{(r + r_M)(r_> - r_<)}$$

Para a equação (4.46) como $r_M > r$, temos $r_M = r_>$ e $r = r_<$, logo:

$$\begin{aligned} & -\frac{2r_<}{r_>^2} \frac{1}{(r + r_M)(r_< - r_>)} \\ & \frac{2r_<}{r_>^2} \frac{1}{(r + r_M)(r_> - r_<)} \end{aligned}$$

Portanto para a primeira integral da equação (A.37), obtemos:

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{2r_<}{r_>^2} \frac{1}{(r + r_M)(r_> - r_<)} \quad (\text{A.47})$$

Agora, trabalhando com a integral $\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$ da equação (A.37):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left(\frac{r^2 + r_M^2 - u}{2rr_M} \right)^2 \frac{du}{2rr_M}}{u^{\frac{3}{2}}} \\ \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \frac{1}{8r^3r_M^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(r^2 + r_M^2 - u)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du \\ \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta &= \frac{1}{8r^3r_M^3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{[(r^2 + r_M^2)^2 - 2(r^2 + r_M^2)u + u^2]}{u^{\frac{3}{2}}} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\
&= \frac{1}{8r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} - 2(r^2 + r_M^2)^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{udu}{u^{\frac{3}{2}}} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{u^2 du}{u^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
& \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\
&= \frac{1}{8r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \right]_{u_1}^{u_2} - 2(r^2 + r_M^2)^2 [2\sqrt{u}]_{u_1}^{u_2} + \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_{u_1}^{u_2} \right\}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Trabalhando com a parte direita da igualdade (A.48), aplicando os limites de integração (A.41) e (A.42):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{(r+r_M)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r-r_M)^2}} \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + 2(r^2 + r_M^2) \left[\sqrt{(r+r_M)^2} - \sqrt{(r-r_M)^2} \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{3} \left\{ [(r+r_M)^2]^{\frac{3}{2}} - [(r-r_M)^2]^{\frac{3}{2}} \right\} \right\} \\
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[\frac{1}{r+r_M} - \frac{1}{|r-r_M|} \right] + 2(r^2 + r_M^2)(r+r_M - |r-r_M|) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{3} [(r+r_M)^3 - |r-r_M|^3] \right\}
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Novamente, verificando dois casos. Primeiramente quando $r > r_M$:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[\frac{1}{r+r_M} - \frac{1}{r-r_M} \right] + 2(r^2 + r_M^2)2r_M \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{3} [r^3 + 3r^2 r_M + 3rr_M^2 + r_M^3 - (r^3 - 3r^2 r_M + 3rr_M^2 - r_M^3)] \right\} \\
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[\frac{r-r_M-r-r_M}{(r+r_M)(r-r_M)} \right] + 4r^2 r_M + 4r_M^3 - \frac{1}{3} [6r^2 r_M + 2r_M^3] \right\} \\
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ \frac{-2r^4 r_M - 4r^2 r_M^3 - 2r_M^5}{(r+r_M)(r-r_M)} + 2r^2 r_M + \frac{10}{3} r_M^3 \right\} \\
& -\frac{1}{4r^3 r_M^3} \left\{ -2r_M \left[\frac{r^4 + 2r^2 r_M^2 + r_M^4}{(r+r_M)(r-r_M)} - r^2 - \frac{5}{3} r_M^2 \right] \right\} \\
& \frac{1}{2r^3 r_M^2} \left\{ \frac{r^4 + 2r^2 r_M^2 + r_M^4}{(r+r_M)(r-r_M)} - r^2 - \frac{5}{3} r_M^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2r^3r_M^2} \left\{ \frac{r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4 - r^2(r^2 - r_M^2) - \frac{5}{3}r_M^2(r^2 - r_M^2)}{(r + r_M)(r - r_M)} \right\} \\
& \frac{1}{2r^3r_M^2} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \left(r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4 - r^4 + r^2r_M^2 - \frac{5}{3}r_M^2r^2 + \frac{5}{3}r_M^4 \right) \\
& \frac{1}{2r^3r_M^2} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \left(\frac{4}{3}r_M^2r^2 + \frac{8}{3}r_M^4 \right) \\
& \frac{2(r^2 + 2r_M^2)}{3r^3} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \tag{A.50}
\end{aligned}$$

Agora, analisando o caso onde $r < r_M$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4r^3r_M^3} \left\{ (r^2 + r_M^2)^2 \left[\frac{1}{r + r_M} - \frac{1}{r - r_M} \right] + 2(r^2 + r_M^2)2r_M \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{3}[(r + r_M)^3 + (r - r_M)^3] \right\} \\
& \frac{1}{4r^3r_M^3} \left\{ r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4 \frac{2r}{(r + r_M)(r - r_M)} + 4r(r^2 + r_M^2) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{3}[r^3 + 3r^2r_M + 3rr_M^2 + r_M^3 + r^3 - 3r^2r_M + 3rr_M^2 - r_M^3] \right\} \\
& \frac{1}{4r^3r_M^3} \left\{ \frac{2r^5 + 4r^3r_M^2 + 2rr_M^4}{(r + r_M)(r - r_M)} + 4r(r^2 + r_M^2) - \frac{1}{3}(2r^3 + 6rr_M^2) \right\} \\
& \frac{1}{2r^2r_M^3} \left\{ \frac{r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4}{(r + r_M)(r - r_M)} + 2(r^2 + r_M^2) - \frac{1}{3}(r^2 + 3r_M^2) \right\} \\
& \frac{1}{2r^2r_M^3} \left\{ \frac{r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4}{(r + r_M)(r - r_M)} + 2r^2 + 2r_M^2 - \frac{1}{3}r^2 - r_M^2 \right\} \\
& \frac{1}{2r^2r_M^3} \left\{ \frac{r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4}{(r + r_M)(r - r_M)} + \frac{5}{3}r^2 + r_M^2 \right\} \\
& \frac{1}{2r^2r_M^3} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \left(r^4 + 2r^2r_M^2 + r_M^4 + \frac{5}{3}r^2 + r^2r_M^2 - \frac{5}{3}r^2r_M^2 - r_M^2 \right) \\
& \frac{1}{2r^2r_M^3} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \left(\frac{8}{3}r^4 + \frac{4}{3}r^2r_M^2 \right) \\
& \frac{2(2r^2 + r_M^2)}{3r_M^3} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} \tag{A.51}
\end{aligned}$$

Assim, como feito no caso anterior, aqui pode-se combinar as equações (A.50) e (A.51).

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{2(r_>^2 + 2r_<^2)}{3r_>^3} \frac{1}{(r + r_M)(r_> - r_<)} \tag{A.52}$$

Portanto substituindo as equações (A.47) e (A.52) nas integrais da equação (A.37), obtemos:

$$\begin{aligned} r \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta - r_M \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(r^2 + r_M^2 - 2rr_M \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ = r \frac{2r_{<}}{r_{>}^2} \frac{1}{(r + r_M)(r_{>} - r_{<})} - r_M \frac{2(2r_{>}^2 + r_{<}^2)}{3r_{>}^3} \frac{1}{(r + r_M)(r_{>} - r_{<})} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Trabalhando apenas com a parte pós igualdade da equação imediatamente acima:

$$\begin{aligned} \frac{6rr_{<}r_{>}^3 - 2r_{>}^2(r_{>}^2 + 2r_{<}^2)r_M}{r_{>}^2 3r_{>}^3 (r + r_M)(r_{>} - r_{<})} \\ \frac{6rr_{<}r_{>} - 2r_{>}^2 r_M - 4r_{<}^2 r_M}{3r_{>}^3 (r + r_M)(r_{>} - r_{<})} \\ \frac{2}{3r_{>}^3} \frac{1}{(r + r_M)(r_{>} - r_{<})} (3rr_{<}r_{>} - r_{>}^2 r_M - 2r_{<}^2 r_M) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Com o resultado (A.54) pode-se estudar dois casos, que levam a valores diferentes:

Primeiro, considerando $r > r_M$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3r^3} \frac{1}{(r + r_M)(r - r_M)} (3rr_M r - r^2 r_M - 2r_M^2 r_M) \\ \frac{2}{3r^3} \frac{1}{r^2 - rr_M + r_M r - r_M^2} (3r^2 r_M - r^2 r_M - 2r_M^3) \\ \frac{4r_M}{3r^3} \frac{1}{r^2 - r_M^2} (r^2 - r_M^2) \\ \frac{4r_M}{3r^3} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

O segundo, considerando $r < r_M$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3r_M^3} \frac{1}{(r + r_M)(r_M - r)} (3rrr_M - r_M^2 r_M - 2r^2 r_M) \\ \frac{2}{3r_M^3} \frac{1}{-r + r_M^2} (r^2 r_M - r_M^3) \\ - \frac{2}{3r_M^2} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Agora, fazendo uso de (A.37), para os dois casos.

Para o primeiro caso (onde $r > r_M$) temos:

$$\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA = 2\pi r^2 \hat{k} \frac{4r_M}{3r^3}$$

$$\oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA = \frac{8\pi r_M}{3r} \hat{k} \quad (\text{A.57})$$

E para o segundo caso (onde $r < r_M$) temos:

$$\begin{aligned} \oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA &= 2\pi r^2 \hat{k} \left(-\frac{2}{3r_M^2} \right) \\ \oint_S \hat{r} \frac{r - r_M \cos \theta}{R^3} dA &= -\frac{4\pi r^2}{3r_M^2} \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Assim, encontramos um valor para $r > r_M$ e outro para $r < r_M$. No entanto, como o objetivo é calcular o momento angular devido ao campo eletromagnético do sistema, deve-se considerar que integral de superfície da equação (A.29) precisa que $r > r_M$.

Desta forma, usando a equação (A.57) na equação (A.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{EM} &= \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M - \frac{\mu_0 q_M q_E}{(4\pi)^2} \frac{8\pi r_M}{3r} \hat{k} \\ \mathbf{L}_{EM} &= \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M - \frac{\mu_0 q_M q_E r_M}{6\pi^2 r} \hat{k} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

A integral ocorre sobre a totalidade do espaço, portanto, deve-se levar em conta que $r \rightarrow \infty$, logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{EM} &= \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M - 0 \\ \mathbf{L}_{EM} &= \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \hat{r}_M \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Em módulo:

$$L_{EM} = \frac{\mu_0 q_E q_M}{4\pi} \quad (\text{A.61})$$

Portanto, o resultado obtido na equação imediatamente acima descreve momento angular total do sistema estudado, o dipolo de Thonson.