UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMATICA

VALTIM NASCIMENTO RUAS

Análise Fractal da Fragmentação Florestal Situada na Cidade Universitária da Universidade do Estado do Amazonas

Manaus, 2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMATICA

Análise Fractal da Fragmentação Florestal Situada na Cidade Universitária da Universidade do Estado do Amazonas

VALTIM NASCIMENTO RUAS

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas TCC I e TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. M.e. Marcos M. Salvatierra

Manaus, 2018

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **VALTIM NASCIMENTO RUAS**. **Aos 23 dias do mês de novembro de 2018**, às 6:20 horas, em sessão pública na Sala Dalva Santiago da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisângela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. MARCOS M. SALVATIERRA, Me. LEONARDO DA SILVA BRITO e Me. CLAUDEILSIO DO NASCIMENTO CARVALHO** o aluno **VALTIM NASCIMENTO RUAS** apresentou o Trabalho: **"ANÁLISE FRACTAL DA FRAGMENTAÇÃO FLORESTAL SITUADA NA CIDADE UNIVERSITÁRIA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,8 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisangela Ramos da Costa

Presidente da Banca Examinadora

Orientador (a)

Leonardo da Silva Brito

Avaliador 1

Claudeilsio do Nascimento Carvalho

Avaliador 2

Valtim Nascimento Ruas

Aluno

(Fazer em duas vias, uma deve ser digitalizada para ser anexada ao TCC entregue em CD e outra deve ser entregue na Sec. Coordenação do Curso)

AGRADECIMENTOS

Agradeço minha família pelo apoio durante minha jornada acadêmica, e meus amigos por me aturarem!

RESUMO

Este trabalho tem como enfoque o cálculo dimensional-fractal de regiões desmatadas na Cidade Universitária do Estado do Amazonas, logo, possui uma atenção particular para a Biologia, na fragmentação florestal. Visando analisar o aspecto do desmatamento por meio de uma nova abordagem, possui como objetivo geral encontrar a relação dos fractais na fragmentação da floresta, presente na área estudada. Os objetivos específicos são: examinar a fragmentação da floresta; estudar a matemática dos fractais; relacionar a fragmentação da floresta com a forma matemática dos fractais. O método utilizado foi a pesquisa quantitativa. Para esse fim, imagens via satélites foram coletadas, por intermédio de um site online, Maps & Directions, que utiliza o banco de dados do Google Maps, para o cálculo da área e perímetro das regiões escolhidas. Em seguida, fora utilizado o modelo matemático perímetro-área para calcular a dimensão fractal. Após o cálculo dimensional, os resultados da pesquisa foram colocados em tabelas e gráficos seguidos de análises qualitativa, quantitativa e comparativa, tendo como produto final a conclusão de que a Geometria Fractal, com o devido suporte e condições para a sua aplicação, é uma ferramenta viável para o estudo e compreensão de fenômenos relacionados à ecologia de paisagem.

Palavras-Chaves: Geometria Fractal, fragmentação.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta uma pesquisa sobre Geometria Fractal, e sua aplicação na Biologia, particularmente, na fragmentação da floresta de uma região delimitada no Estado do Amazonas. Tendo as seguintes perguntas norteadoras: tem-se na natureza padrões que ramificam sua estrutura? Tais padrões, se existirem, são realmente verificáveis nos chamados fragmentos de florestas na Cidade Universidade da Universidade do Estado do Amazonas? Esses padrões, podem ser resumidos em fractais?

A matemática está presente em todas as áreas possíveis, das mais simples, supondo que existam, a mais complexa; ela é a essência do mundo, e dela conseguimos grandes feitos ao pôr a exatidão e a retilineidade como horizonte. Para melhor analisar a fragmentação da floresta, necessitamos de ferramentas muito caprichosas, e esse é o diferencial do presente trabalho: não se trata de uma simples modelagem, mas sim da compreensão estrutural da natureza.

Segundo Mandelbrot e Russ (1983; 1995 apud Ribeiro, 2007, et al.):

> [...] um fractal ou uma estrutura fractal é por definição uma estrutura na qual partes da mesma se assemelham ao todo, ou seja, existem partes auto-similares, estatisticamente, dentro da estrutura global. Isto indica a presença do fenômeno de escala e de um nível de tendência, preponderante em um fractal, e aleatoriedade, os quais podem ser medidos através da dimensão fractal, que é uma medida de complexidade. (p.5831)

Partir-se-á da própria irregularidade da natureza, e não somente de elementos perfeitos que em grande maioria, só possuem existência no mundo abstrato e ideal, portanto, a ferramenta dispendida para tal pesquisa são: fractais. Faz-se necessário a compreensão da fragmentação da floresta por meio dessa abordagem, pois, em sua estrutura, a fragmentação apresenta-nos como uma forma caótica, e portanto, para fins de maior precisão, necessitamos de uma ferramenta que aproxima-se da realidade, este passo, pode ser alcançado, humildemente falando, ao utilizar a matemática dos fractais.

Através da análise da dimensão fractal por meio de imagens extraídas via satélite (Google Maps, intermediado pelo site Maps & Directions), tem-se como objetivo geral: encontrar a relação dos fractais na fragmentação da floresta, presente na área da Cidade Universitária do Estado do Amazonas. E os específicos: examinar a fragmentação da floresta; estudar a matemática dos fractais; relacionar a fragmentação da floresta com a forma matemática dos fractais.

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está dividido em seis partes: a primeira parte é a introdução, onde é apresentado um breve relato do que esperar do TCC. Em sequência, virá um tópico descrevendo uma pequena nota histórica dos principais matemáticos que ajudaram a construir a geometria fractal, bem como alguns conceitos que o autor considerou importante para salientar, antes de iniciar a apresentação da pesquisa e outros trabalhos semelhantes que fora produzidos.

Na terceira parte, temos a metodologia, onde serão expostos todos os passos que sucederam esta pesquisa, assim como as funções a serem utilizadas. Na sequência, trataremos a análise dos resultados obtidos, apresentando tabelas e gráficos acerca dos dados, e uma comparação detalhada na interpretação qualitativa e quantitativa dos resultados colhidos. Ainda, ver-se-ão as considerações finais do autor do TCC e as futuras aplicações da Geometria Fractal e pesquisas relevantes, finalizando com o referencial bibliográfico, onde teremos todos os artigos e outras fontes usadas durante o desenvolvimento do TCC.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos Fractais[1]

1.1.1 Waclaw Sierpinski (1882 - 1969)

Deu inúmeras contribuições na área da Matemática, como por exemplo, na Teoria dos Números e Topologia de Conjuntos. Foi criador dos "monstros" matemáticos, uma das primeiras representações das figuras de fractais. É atribuído como sua criação a Curva de Sierpinski, curva fechada iniciada por um quadrado.

1.1.2 Giuseppe Peano (1858 - 1932)

Famoso mais pelos seus axiomas, que definem os números naturais. Peano deu várias contribuições nas áreas de Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Cálculo Vetorial e em aplicações geométrica, além do Cálculo Infinitesimal entre outras contribuições. Assim como Waclaw Sierpinski**,** também possui um "monstro" matemático, chamado de a Curva de Peano, proposto com o intuito de cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular.

1.1.3 David Hilbert (1862 - 1943)

Solidificou a Teoria dos Invariantes, por um caminho axiomático da geometria euclidiana, teoria dos números algébricos, criação dos espaços de Hilbert que trata de equações integrais e formas quadráticas. Sua contribuição para o fractal fora a Curva de Hilbert, para cobertura de uma superfície quadrada, sem interseção de pontos.

1.1.4 George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918)

Responsável por criar a moderna teoria dos conjuntos. Provou que os conjuntos infinitos não têm todos a mesma potência, diferenciando os conjuntos enumeráveis dos contínuos, também demonstrou que o conjunto dos números racionais Q é enumerável, enquanto o conjunto dos números reais R é contínuo através do conhecido método diagonal.

1.1.5 Benoit Mandelbrot (1924 - 2010)

Foi o grande responsável pelo desenvolvimento da Geometria Fractal, fazendo confecções dessa geometria com as diversas áreas do conhecimento,

1 - Contribuicão de matemáticos encontrados em: BALDOVINOTTI (p.38 – 57).

relacionando-os a objetos e fenômenos naturais, fatos aparentemente caóticos, tendo como um grande aliado o computador.

Além desse importante trabalho, deu o nome de Geometria Fractal, aos objetos que apresentavam as características de auto-similaridade e que podiam ter dimensão conforme definição de Hausdorff reconhecendo padrões na Economia, em ruídos de linhas de transmissão e objetos da natureza.

1.2 Conceitos básicos sobre fractais

Fractal é uma ferramenta que visa os corpos irregulares, tem-se, talvez, um dos métodos que mais se assemelha à natureza propriamente dita.

Dentro da matemática, “fractais” era dito como figuras bisonhas, até mesmo, aqueles que a defendiam eram ridicularizados, logicamente, isso mais tarde fora dando lugar a uma euforia, principalmente quando ela passou a ser muito útil no ramo da tecnologia e no estudo das ciências em gerais.

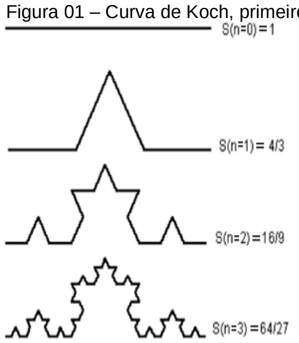
Existem fractais que são “clássicos”, como por exemplo, aquele apresentado por Mandelbrot para uma dada região costeira, este fractal possuía a dimensão entre um e dois, onde observam-se que a estrutura se repetiam.

Segundo Baier (2005, p.125-126 apud Eliana Krinoges, 2012, p.34):

> Se forem consideradas as várias reentrâncias e saliências realmente existentes em uma costa litorânea, uma medida pode ser efetuada com sucessivos segmentos de reta. Sendo diminuídos os comprimentos desses segmentos, o comprimento do litoral tende para o infinito. [..]

Mandelbrot recomendou que a curva, dita anteriormente e proposta por Helge von Koch, fosse uma maneira matemática de modelar a costa litorânea, ainda que de forma grosseira. Podemos representam a Curva de Koch, a partir da linha (segmento) dividida em três partes iguais, substituindo-se o segmento médio por dois lados de um triângulo equilátero (Figura 01).

Figura 01 – Curva de Koch, primeiros níveis.

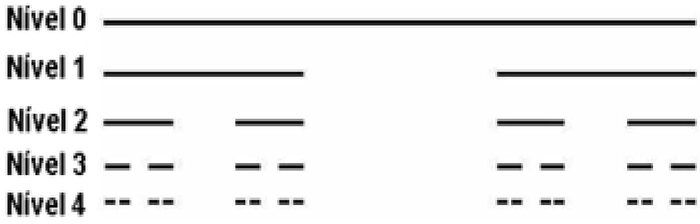


Fonte: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005>. Extraído em: 16/03/2018

Outro *fractal* abordado por Mandelbrot é o que hoje conhecemos por Conjunto de Cantor.

Esse conjunto tem início quando dividimos um segmento de reta em três partes, retiramos a parte do centro, e com os outros segmentos, fazemos o mesmo até a n-ésima iteração figura 2.

Figura 02 – Cinco primeiros níveis de construção do Conjunto de Cantor.



Fonte:<http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005>. Extraído em: 16/03/2018

Tal conjunto é construído por segmentos retirados do segmento original, tem-se como produto das divisões sucessivas, uma dimensão maior que a de um ponto, cuja dimensão é zero, e menor que a dimensão do segmento que fora particionado, que é um.

1.3 Fractais na Natureza

Referimo-los a natureza como algo imprevisível, essa imprevisibilidade está exposta quando tentamos estudar o clima, por exemplo, onde cada variável é tão oculta que é humanamente impossível estudar sem o auxílio de supercomputadores e cálculos que se tornam cada vez mais gigantescos e difíceis de serem resolvidos.

Na visão de Baptista (2013, p.44):

> [...] Um grande número de sistemas físicos tendem, a apresentar comportamentos semelhantes em diferentes escalas de observação. A principal atração da geometria fractal deriva da sua capacidade de descrever a forma irregular ou fragmentada de recursos naturais bem como de outros objetos complexos que a geometria euclidiana tradicional não consegue analisar. Este fenómeno é muitas vezes expresso por leis e dimensionamento estatísticos no domínio do tempo e caraterizado principalmente pelo comportamento de lei de potência de sistemas físicos do mundo real. [...].

Estudar sistemas físicos reais, resulta numa rede complexa, processos e fenômenos que muitas das vezes não são tratadas no Ensino Superior, particularmente na graduação, trabalha-se de forma maciça em torno de situações ideais.

Nem sempre é fácil observarmos a geometria fractal dentro da natureza, em todo caso, ela existe e segundo Baptista (2013, p.45):

> Na última década, percebeu-se que alguns sistemas biológicos não têm comprimento característico ou escala de tempo, ou seja, têm propriedades de um fractal. No entanto, as propriedades fractais em diferentes sistemas biológicos têm natureza muito diferente, origem e aparência. Em alguns casos, é a forma geométrica do objeto biológico que exibe caraterísticas óbvias de um fractal, enquanto noutros casos, estas propriedades encontram-se mais subentendidas e têm de ser estudadas em função do tempo ou mapeado num gráfico. Depois de um mapeamento adequado, como um gráfico pode se assemelhar a uma paisagem montanhosa, com dentado de cumes de todas as escalas de comprimento desde muito pequenas saliências para enormes picos[...].

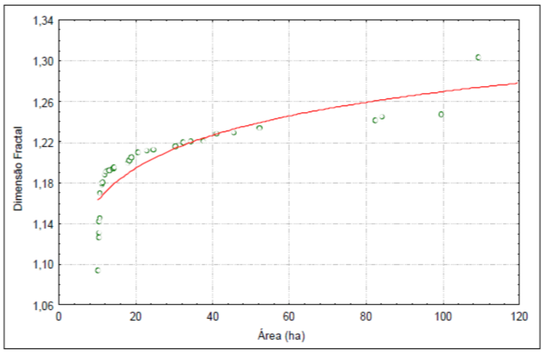
1.4 Alguns trabalhos sobre fractais na fragmentação florestal

Neste pequeno tópico será apresentado dois trabalhos que abordam a dimensão fractal sobre fragmentação na natureza, o primeiro, intitulado, *Análise Espaço Temporal da Dimensão Fractal de Matas Ciliares na Alta Bacia do Rio Passa Cinco – Centro Leste do Estado de São Paulo*, cujo autor é Azevedo, trabalha com a dimensão fractal exercendo papel semelhante ao que é colocado aqui. Busca-se por meio do dimensional-fractal, a discursão das aplicações da matemática na identificação de impactos ambientais em paisagens.

Apresentando-nos um estudo de caso avaliando a influência da resolução espacial e do tamanho da área mapeada na estimativa da dimensão fractal (D) de paisagens ripárias. Faz-se o cálculo da dimensão por mais de um método (afim de conhecimento, consultar bibliografia) além de um cálculo estatístico comparativo. Com dados coletados por via satélites e presença em campo também. Soma-se programas de computador que os auxiliaram durante a pesquisa.

O resultado da pesquisa poderá ser vista na Figura 3:

Figura 3 – Gráfico comparativo de: dimensão fractal e área.



Fonte: Azevedo, 2003, p. 130.

Ainda segundo Azevedo (2003, p. 130):

> Na relação entre a área dos fragmentos e a dimensão fractal (Figura 52), nota-se uma tendência positiva. Os fragmentos maiores tendem a possuir os maiores valores de D, os fragmentos menores, por sua vez tendem a apresentar valores menores de D.

Ou seja, fragmentos florestais com baixos valores de D, estão associados a áreas com pequenos fragmentos, com formas mais regulares, devido à forte influência do que o autor chama "antrópica". As áreas que apresentam altos valores de D, possuem fragmentos florestais com formas mais complexas, localizadas em áreas com grande diversidade topográfica.

Outro trabalho aqui citado é o *Análise fractal aplicada à fragmentação florestal no município de Viçosa – MG*, cujos autores são, Cicarini, Paulo, Álvares e Jackson. Pesquisa feita por meio de imagens de satélites e softwares que auxiliaram durante o trabalho. O método do cálculo dimensional feito nele, foi o mesmo que será apresentado ao longo deste TCC. Seus resultados foram obtidos pela separação em áreas de vegetação, e em seguida calculada a região fractal. Podemos, por fim, resumir na tabela 1:

Figura 4 - Imagem donde apresenta os dados de: perímetro, área e dimensão fractal (D_f).

Fragmento	Localização	Perímetro (lados)	1/4 do Perímetro (lados)	Área (células)	D_F
A	Área 1	722	180,5	2.062	1,362
B	Área 1	1.082	270,5	4.523	1,331
C	Área 2	134	33,5	378	1,183
D	Área 2	314	78,5	753	1,317
E	Área 3	118	29,5	263	1,215
F	Área 3	90	22,5	172	1,210
G	Área 4	236	59,0	539	1,297
H	Área 4	124	31,0	277	1,221
I	Área 5	72	18,0	117	1,214
J	Área 5	82	20,5	141	1,221

Fonte: Cicarini, Paulo, Álvares e Jackson, 2007, p.5836.

1.5 Dimensão fractal

Afinal, o que seria exatamente "dimensão"?

Podemos concebê-la como algo, a priori, intuitivo; de fato, podemos caracterizá-la matematicamente, porém, sua essência é algo simplesmente misterioso, quase que mítica. Analisámo-la pela geometria euclidiana.

Esta geometria (euclidiana) tem como ponto de partida uma concepção humana bastante curiosa, chamada de: ponto. Ponto é definido como algo sem dimensão, mas o que seria exatamente esse algo sem dimensão? É possível representar algo assim? Vemos que ao pôr estes questionamentos, deparamonos numa tarefa filosófica demasiadamente densa, o que não cabe neste presente trabalho.

Em todo caso, define-se um ponto com dimensão 0, uma reta com dimensão 1, um plano com dimensão 2, um cubo com dimensão 3. Os sentidos humanos apenas observam até a terceira dimensão, outrora, podemos estender o conceito de dimensão na matemática até a enésima mas fugiria completamente do nosso alcance intuitivo, ao menos por hora. Sendo assim, a matemática pode estender-se a múltiplas dimensões, ao contrário de nossos sentidos, que por sinal limitando-se as três dimensões que temos “contado” desde a mais tenra juventude.

Podemos assim interpretá-la como sendo: o valor da informação que precisamos, afim de determinar a posição de um dado ponto num certo sistema, esse “sistema” podendo ser obviamente dinâmico.

Umas das principais características das dimensões euclidianas é a de serem representadas como pertencentes ao conjunto dos inteiros, e sempre positivas.

A dimensão euclidiana possui raízes na geometria plana, esta última tratada em Os Elementos, de Euclides. Porém somente tal geometria mostrou-se “fraca” demais com o tempo, quando tratados alguns aspectos e segundo Nunes Rebelo (2006, p.36-37):

> Para Euclides, todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples como quadrados, circunferências, etc. No entanto, a geometria euclideana era insuficiente para explicar e descrever fenômenos ditos como monstros matemáticos, como e o caso, por exemplo, das curvas que preenchem o espaço. Como é que uma curva, de dimensão 1, podia preencher o espaço de um quadrado, de dimensão 2? Este dilema preocupou grandes matemáticos da época, como Poincaré, Lebesgue, Brouwer , Cantor, Peano, etc. que estavam envolvidos com o desenvolvimento da topologia.

A dimensão fractal é um dos diferencias da dimensão euclidiana, pois nesta, encontramos apenas número inteiros, como fora antes visto, e no fractal, observamos que pode vir a conter um número decimal, ou seja, dimensão não inteira, tendo por conhecimento, que umas das maneiras de calcular a dimensão fractal é:

$$D = \frac{logN}{logn}$$

onde N representa o número de peças em cada iteração e n a ampliação necessária para chegar ao objeto original.

Para Mandelbrot (1998, p.14 apud Eliana Krindes, 2012, p.29)

> [...] uma das características principais de todo objecto fractal é a sua dimensão fractal, que será representada por D. Esta é uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação. Um facto muito importante: ao contrário dos números dimensionais correntes, a dimensão fractal pode muito bem ser uma fracção simples, como ½ ou 5/3, ou mesmo um número irracional, como log 4/log 3 ~ 1,2618...ou π. Assim, é conveniente dizer, a respeito de certas curvas planas muito irregulares, que a sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, definir conjuntos de pontos sobre uma linha cuja dimensão fractal está entre 0 e 1.

Um dos exemplos mais famosos de Mandelbrot, quando tenta explicar a ideia de dimensão fracionária era:

Ainda segundo Mandelbrot (1998, p.21-22 apud Eliana Krinoges, 2012, p.29):

> Para confirmar, mostraremos que um novelo com 10 cm de diâmetro feito de um fio com 1 mm de diâmetro possui, de uma forma um pouco latente, diversas dimensões efectivas distintas. Se se usar um grau de resolução de 10 m, trata-se de um ponto e, portanto, de uma figura de dimensão zero. Para um grau de resolução de 10 cm trata-se de uma bola tridimensional. Para uma resolução de 10 mm é um conjunto de fios e, portanto uma figura unidimensional. Para um grau de resolução de 0,1 mm, cada fio transforma-se numa espécie de coluna e o todo volta a ser tridimensional. Para um grau de resolução de 0,01 mm, cada coluna resolve-se em diversas fibras filiformes e, de novo, o todo é unidimensional. Numa análise mais apurada, o novelo é representado por um número finito de átomos pontuais e o todo tem, mais uma vez, dimensão zero. E assim por diante: o valor da dimensão não pára de variar! [...]

O diferencial da dimensão fractal e a dimensão euclidiana é justamente a parte em que tomamos o inteiro e o não inteiro. Por conseguinte, há mais possibilidade de ajustar uma figura com a dimensão fractal, pois, tem-se, por exemplo, entre a dimensão 1 e 2, mais possibilidades (ante os números decimais contidos nesse intervalo), quando trabalhamos com fractais, do que na geometria clássica, euclidiana (com sua interpretação de inteiros).

1.6 Autossimilaridade

Segundo Baldovinotti (2011, p.32):

> O conceito de autossimilaridade (self-similarity) dos fractais significa dizer que pequenas partes da curva repetem a mesma forma da curva como um todo, ou seja, se fizer uma ampliação de uma região de um fractal, irá encontrar uma figura semelhante ao do fractal como um todo. Porém, nem todos os fractais apresentam essa característica em todas as escalas de ampliação da figura geométrica.

Pelo ponto de vista de Almeida (2006, p.48 apud Nilson Baldovinotti, 2011):

> A autossimilaridade é o resultado de empregar a mesma regra num processo recursivo. Quando uma pequena parte de um fractal é similar ao todo, denomina-se que ele é autossemelhante. Um objeto autossemelhante geralmente é um fractal, mas nem todos os fractais são autossemelhantes [...].

A autossimilatidade não é de domínio único da matemática, encontramo-la em toda a natureza, basta olharmos com certa cautela e atenção. Autossimilaridade de maneira grosseria pode ser entendida assim: pegamos uma figura, cortamo-la, e essa parte recortada, ainda assemelhar-se-á com o todo, essa “semelhança”, trata-se das informações ali contidas, ser a mesma que a totalidade, e isso é de fundamental importância na prática.

Quando analisamos um pedaço de fragmento florestal, intuitivamente, podemos encontrar a autossimilaridade, ou seja, cópias do fragmento dentro de si mesmo.

Com base na dimensão Fractal, temos a esperança de estudar da melhor forma possível os fragmentos de vegetação. O presente texto não dará grande importância aos tipos de espécimes ali contidos, tanto vegetal, quanto animal, o foco principal, é o estudo desses “pedaços de flora”, apresentando o fractal como uma segunda linha de estudo para tais “pedaços”.

1.7 Argumentação

Como fora exposto, fractal talvez seja a melhor ferramenta para trabalhar os fragmentos de florestas dentro de uma dada região, aqui delimitada na Cidade Universitária da Universidade do Estado do Amazonas (UEA).

Buscar-se-á o cálculo dimensional de fractal, por meio de imagens via satélite. O presente trabalho tem como importância, a aplicação de uma nova ferramenta (fractais) na natureza, estudando a fragmentação vegetal por meio desta nova geometria, pretende-se assim, maior semelhança com a verdadeira aparência da natureza, não só isso, trabalhos que utilizaram a mesma ferramenta, dá-nos uma visão do potencial que fractal pode nos oferecer, sendo esta, um dos motivos principais para a sua escolha.

O estudo da fragmentação florestal, é de fundamental importância, pois não trata-se de simples áreas de matas separadas, ou pequenos núcleos individualizados, há-se mais de uma importância para tal:

Segundo Castro (2004, apud Viana et al.,2013):

> A conservação da biodiversidade representa um dos maiores desafios deste final de século, em função do elevado nível de perturbações antrópicas dos ecossistemas naturais (tabela 1). Uma das principais consequências dessas perturbações é a fragmentação de ecossistemas naturais. Na Mata Atlântica, por exemplo, a maior parte dos remanescentes florestais, especialmente em paisagens intensamente cultivadas, encontra-se na forma de pequenos fragmentos, altamente perturbados, isolados, pouco conhecidos e pouco protegidos [...]. A maior parte dos remanescentes florestais se encontra na forma de fragmentos florestais.

Não somente isso, observa-se que ocorre um verdadeiro “efeito borboleta”, dentro da própria mata:

Ainda segundo Castro (2004, apud Viana et al.,2013):

> Com a conversão das florestas nativas no Brasil vários impactos podem ser observados, sobretudo porque a fragmentação, que corresponde a uma área de vegetação natural interrompida, quer seja por barreiras naturais ou antrópicas, ocasiona problemas para o clima especialmente nas bordas das matas onde um aquecimento maior é gerado por estarem mais expostas a incidência de luz. Além disso, a retirada das florestas possibilita o aumento da erosão, assoreamento dos cursos de água, perda da biodiversidade e variabilidade genética, entre outros fatores [...].

O “método fractal”, fora escolhido, como antes exposto, pois possui maior “flexibilidade” se comparado ao método tradicional. Essa “flexibilidade” corresponde a sua característica dimensional-fragmentada, o que nos devolve como resultado final, figuras que mais aproximam da forma realística observada. Quando analisamos um simples e pequeno pedaço de fractal, tem-se o que chamamos de autossimilaridade:

A tecnologia necessita, e muito, dessa nova ferramenta matemática, como por exemplo, em aparelhos celulares: até recentemente sinais de celulares como, microondas e ondas cujo comprimento era suficientemente grande, possuíam como receptoras antenas distintas, e quanto mais sinais, mais antenas; porém, descobriu-se que uma antena com o formato de um fractal, funcionava perfeitamente para mais sinais de frequências, do que uma antena considerada comum, e eis o triunfo da geometria fractal. Esse “bom funcionamento”, se deve a uma das principais características dessa geometria: a autossimilaridade.

Fractais é um assunto relativamente novo, e, portanto, possui um empasse em relação a sua existência no que diz respeito a matemática. No início, era tratado como um monstro matemático, algo que não deveria existir, uma simples “brincadeira” de jovens alunos, ou uma singela ilusão de um sonhador, que levou suas asas além do alcance da própria imaginação humana. Porém, o tempo mostrou-nos que essa nossa geometria é algo mais útil do que se imaginava. A própria natureza apresentou-se de forma concisa e homogênea com sua existência, e essa homogeneidade perpetuará por tempos.

Essa maneira de analisar o mundo, deu-nos uma grande revelação, a da imperfeição. Não fora somente um choque matemático, fora também um choque verdadeiramente existencial, porém, este trabalho não trata da questão puramente filosófica, mas dar-se por inexistente tal questão, seria também desagradável perante a inteligência humana.

Por ser algo relativamente novo, não há assuntos que tratem de forma efetiva a aplicação de fractais, ainda que este seja de fundamental importância. Essa singela pesquisa, visa uma abordagem geométrica diferente do tradicional, busca-se como meta a realidade em si, e para alcançar precisão desejada, objetivou-se a escolha desse tema, ou melhor, tal geometria, pois, apresenta-se com muito potencial, e não somente matemático, mas sim tecnológico, científico, e sendo um pouco ousado, até filosófico.

Ao assumirmos que o tronco de uma árvore não é um cilindro, ao aceitarmos que um planeta não é uma simples esfera; quando conjecturarmos que a área costeira não é uma retângulo, veremos que existe outras ferramentas tão importantes quanto as já conhecidas. Entretanto, não se deve obscurecer que a nova geometria, aqui tratada, teve suas origens na antiga geometria, e Euclides não poderá ser menosprezado e nem esquecido por completo.

Calcular as dimensões de um determinado objeto por meio do fractal, supõem-se, ousadamente, ser a melhor escolha, é óbvio que nem tudo, infelizmente, poderá ser descrita por esta geometria, pois esta é um avanço da antiga, que por sua vez, tinha em si problemas quando tentávamos estudar sua aplicação; e possivelmente haverá outra que também a superará, entretanto, no que tange este, será o foco no desenrolar do projeto, até sua execução e conclusão.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA DA PESQUISA

Podemos definir pesquisa como sendo um procedimento racional e sistemático, cujo objetivo é proporcionar respostas aos problemas que são apresentados. A pesquisa dá-se por meio do processo constituído de várias etapas, desde a formulação inicial (problema) até a apresentação e discussão dos resultados.

A fim de iniciar a pesquisa é preciso, a priori, de perguntas norteadoras, aqui serão: tem-se na natureza padrões que ramificam sua estrutura? Esses padrões, se existirem, são realmente verificáveis nos chamados fragmentos de florestas na Cidade Universidade da Universidade do Estado do Amazonas? esses padrões, podem ser resumidos em fractais? Tais perguntas, fixadas, servirão como norteadoras aqui.

Escolhendo por fim, o melhor caminho a se alcançar possíveis respostas, este “caminho”, chamamos de metodologia:

> (...) a) como a discussão epistemológica sobre o “caminho do pensamento” que o tema ou o objeto de investigação requer; b) como a apresentação adequada e justificada dos métodos, técnicas e dos instrumentos operativos que devem ser utilizados para as buscas relativas às indagações da investigação; c) e como a “criatividade do pesquisador”, ou seja, a sua marca pessoal e específica na forma de articular teoria, métodos, achados experimentais, observacionais ou de qualquer outro tipo específico de resposta às indagações específicas. (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p.13).

O trabalho aqui apresentado classifica-se como pesquisa quantitativa pois:

> Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as mostras geralmente são grandes e consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade sópode ser compreendida com base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente. (GERHARDT e SILVEIRA, 2009, p.33)

Quanto à natureza, podemos objetivar como sendo pesquisa aplicada, pois tem-se o intuito de gerar conhecimento para aplicação prática, à solução de problemas específicos, envolvendo interesses locais que serpenteiam a pesquisa.

Tem-se como característica: medições numéricas, consideradas mais ricas que descrições verbais. Em relação a coleta dos dados terá como base fundamental um levantamento bibliográfico sobre o tema escolhido, em seguida, um mapeamento com imagem via satélite contendo fragmentações de florestal situada dentro da área delimitada na Cidade Universitária da Universidade do Estado do Amazonas. Depois de feito o levantamento de tais imagens, em seguida, será selecionado aquelas que melhor satisfazem os objetivos da pesquisa a fim de calcular a dimensão fractal. Além de imagens, serão coletadas informações do tipo: perímetro e área da localidade. O cálculo dimensional (Df) terá como base no trabalho de Olsen et al. (1993). Para isso, fora utilizado o fato de que: $P \propto A^{Df/2}$ (0) onde:

- A = área do objeto de interesse,
- P = perímetro do objeto de interesse
- D_f = dimensão fractal.

Com base em (0), precisamos agora encontrar uma constante k, de tal forma que (0) transforma-se em:

$$P = k \cdot A^{Df/2} \quad (1)$$

em que (pelo trabalho original, sendo aqui facilmente adaptáveis), temos:

- K = constante de proporcionalidade para a célula
- A = 1 (área da célula)
- P = 4 (perímetro da célula)
- $D\,f$ = 1 (dimensão da célula individual)

Donde obtemos $k = 4$, após substituir os valos A, P e Df dados anteriormente na função (1). Assim, isolando Df encontramos:

$$D_f = 2 \cdot \frac{\ln\left(\frac{P}{4}\right)}{\ln A} \quad , (2)$$

sendo nossa função trabalhada aqui.

Uma vez determinada a dimensão fractal, será analisada os dados a fim de determinar se a Df apresentara maior ou menor grau, apontando se aquela dada região terá maior ou menor complexidade, se é compatível com a determinação de uma real geometria fractal, seguindo outros textos sobre o assunto, respondendo portanto, se for possível, as perguntas da problematização.

A análise dos resultados será feito após os dados serem quantificados, por meio da função (2), e colocados em tabelas e gráficos (com auxílio do programa Excel 2013); com base nisso, estes serão comparados entre si e com a imagem do satélite (obtido por meio do Google Maps, por intermédio do site www.mapsdirections.info/pt/) para verifica a veridicidade dos números com o que é observado na natureza.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1 Método de coleta de dados

Como já dito o cálculo dimensional (D_f) será feita da seguinte maneira:

$Perímetro = k \cdot Área^{Df/2}$ (1)

em que:

K = constante de proporcionalidade para a célula

A = 1 (área da célula)

P = 4 (perímetro da célula)

D_f = 1 (dimensão da célula individual)

Onde encontramos $k = 4$. Dessa maneira a função (1) toma a forma:

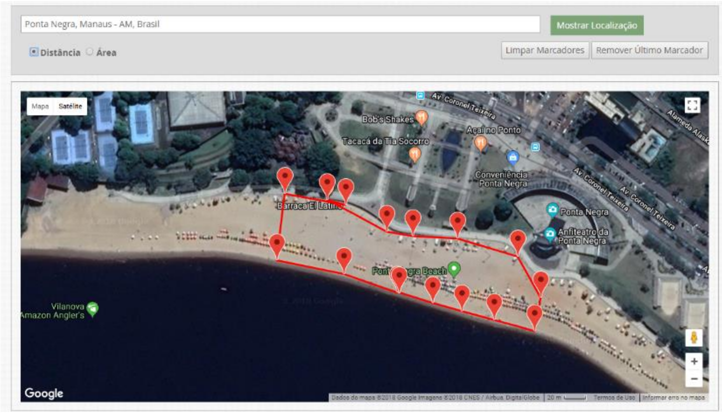
$$D_f = 2 \cdot \frac{\ln\left(\frac{P}{4}\right)}{\ln A} \quad (2)$$

sendo nossa função trabalhada aqui.

As imagens serão coletadas com base no Google Maps, e, portanto, serão imagens via satélite. Afim de delimitar e calcular perímetro e área, utilizar-se-á o Maps & Directions (MD), disponível em https://www.mapsdirections.info/pt/. Maps & Directions, é um serviço online gratuito que utiliza o Google Maps para cálculo de perímetro e área, tendo como outras funções traçar rotas e distâncias / tempos de viagens.

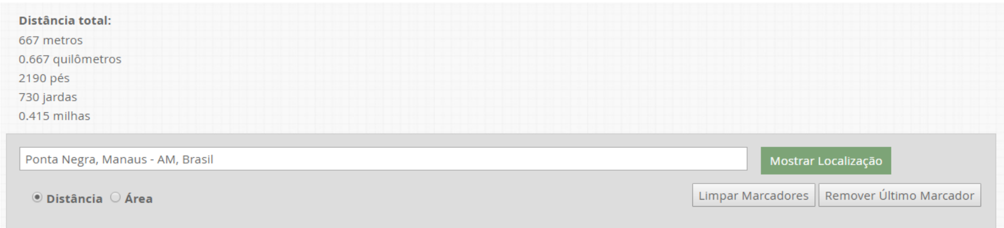
Seu funcionamento é bastante simples: basta selecionar um local clicando no mapa ou usando a caixa de pesquisa. Feito isso, definirá o primeiro marcador. Ao clicar novamente no mapa, (ou inserir outra pesquisa) definirá o segundo marcador. Sendo necessário no mínimo dois marcadores para medir a distância e um mínimo de três marcadores para medir área. A partir disso, será calculado automaticamente o que se deseja (aqui área ou perímetro) sendo mostrado na tela, figura 5.

Figura 5- Imagem do Maps & Directions, Ponta Negra, Manaus – AM



.
Fonte: Autor (2018).

Figura 6 - Resultados já calculados pelo MD.



Fonte: Autor (2018).

Na imagem (Figura 6), temos “Distância total:” o cálculo feito pelo MD, dado em metros, quilômetros, pés, jardas e milhas. Para a área, bastava clicar em “Área” situada logo abaixo destinada a pesquisa do local. Caso haja erro da localização, podemos ainda clicar em “Limpas Marcadores”, apagando todos os pontos do mapa ou remover a última localização (ponto) feito no mapa.

3.2 Coleta dos dados: área e perímetro

Figura 7 – Imagens de via satélite da região onde será a Cidade Universitária da UEA Imagem não está em proporção.

Fonte: Autor (2018).

Temos as medições das regiões A1, A2,...,A6 e o tabelamento desses dados:

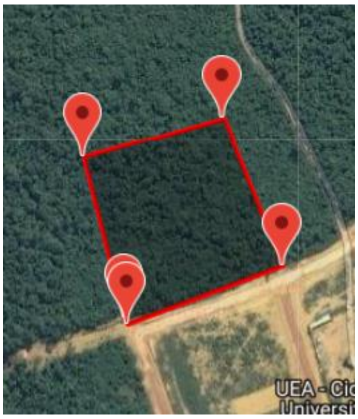
Figura 8 - Região A1.

Fonte: Autor (2018).

Figura 9 - Região A2.

Fonte: Autor (2018).

Figura 10 - Região A3.

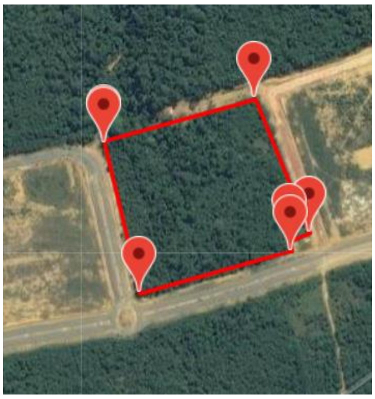


Fonte: Autor (2018).

Figura 11 - Região A4.

Fonte: Autor (2018).

Figura 12 - Região A5.



Fonte: Autor (2018).

Figura 13 - Região A6.

Fonte: Autor (2018).

Após feito a delimitação e medição, foram colocados os dados medidos pelo MD na Tabela 01:

Tabela 1 – Dados de perímetro e área.

Região	Perímetro em metros (m)	Área em metros ao quadrado (m^2)
A1	1226	93779
A2	1197	74117
A3	1036	68537
A4	1343	37397
A5	1182	88317
A6	1291	42855

Fonte: Autor (2018).

3.3 Cálculo da dimensão fractal

$$D_f = 2\ x\ \frac{\ln\left(\frac{P}{4}\right)}{\ln A} \qquad (2)$$

Tendo os dados (tabela 1), podemos calcular D_f (dimensão fractal) das áreas escolhidas para a pesquisa por meio de (2), sendo que P é o perímetro e A a área, logo:

Tabela 2 – Cálculo final de D_f,com aproximações de quatro casas decimais.

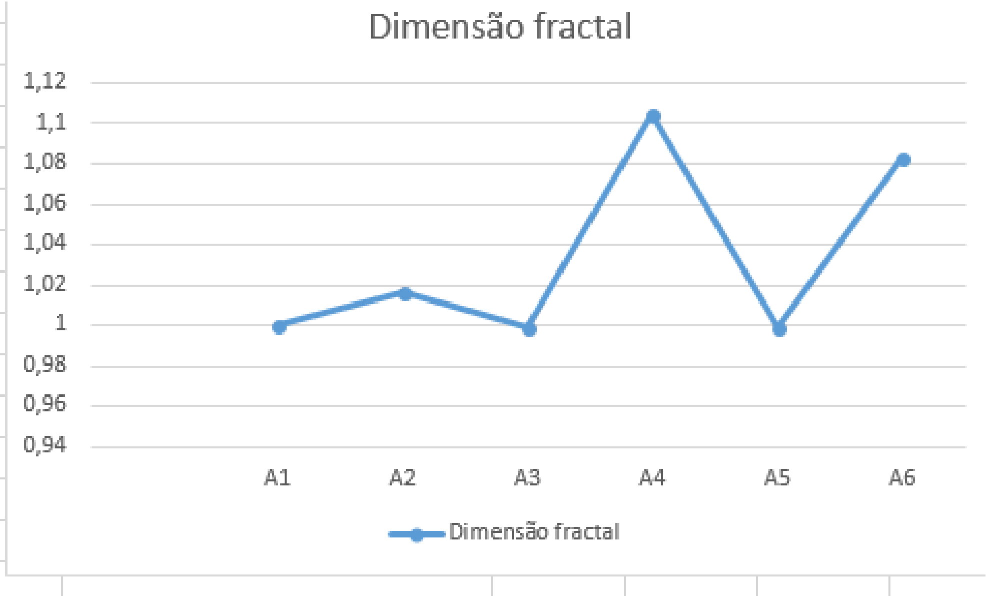
Região	Perímetro em metros (m)	Área em metros ao quadrado (m^2)	Dimensão fractal (D_f)
A1	1226	93779	1,000
A2	1197	74117	1,0169
A3	1036	68537	0,9991
A4	1343	37397	1,1048
A5	1182	88317	0,9990
A6	1291	42855	1,0833

Fonte: Autor (2018).

3.4 Análise dos Resultados

Comparando os dados num gráfico, notamos uma dimensão fractal maior na Região A4. Observamos que o intervalo é de 0,9999 até um pouco acima de 1,1.

Figura 14 – Gráfico: Dimensões Fractais de regiões estudas.



Fonte: Autor (2018).

Partindo de uma análise quantitativa, por meio da função (2), assim como sua representação gráfica acima, observamos que as dimensões nas regiões A1, A2, A3 e A5 tendem para o inteiro 1 (as quatros regiões apresentam-se numericamente numa mesma faixa, intervalo, o gráfico deixa bem visível essa observação), aproximando da dimensão Euclidiana, logo, temos uma área onde mais se aproxima da considerada figura clássica, indicando mais regularidade de vegetação, portanto menos complexidade. O fato de termos regiões indo para um inteiro, significa que o desmatamento está sendo feita de maneira planejada e uniforme. Encontramos um grau de complexidade nas regiões A4 e A6 maior, representadas pelas dimensões fracionadas (números reais) na Tabela 2, e ao analisar o gráfico acima vemo-las dando um “salto” se comparada as outras regiões, significando uma dimensão fractal grande, portanto, nessas áreas tem-se uma desordem vegetal considerável, desordem no sentindo de espalhamento de vegetação, o que sugere uma desmatamento desorganizado.

Tendo uma perspectiva de análise qualitativa, de fato, quando olhar-se as imagens via satélite do Google Maps, vemos uma coerência com os dados apresentado anteriormente, apesar da diferença ser de poucos algarismos entre as regiões a qual foram submetidos os cálculos dimensionais, tem-se na realidade a notória discrepância das áreas aqui delimitadas, e a princípio, se desconsiderarmos pequenas variações numéricas, teremos como resultado grande mudanças na interpretação real.

Tais resultados mantem uma fidelidade com as observações, imagens coletadas; portanto, se compararmos as imagens com as dimensões, veremos que onde há maior complexidade (A4 e A6), dimensão fractal maior, correspondem as áreas de fragmentações de florestas menos densas em termos de espécies vegetais, enquanto que onde a dimensão fractal é pequena (A1, A2, A3 e A5), correspondem as imagens cujas densidades de espécimes é maior. Então, a análise qualitativa corrobora com os resultados da análise quantitativa, dando a este último maior confiabilidade.

Quando comparamos os resultados encontrados nessa pesquisa, com aqueles no item 1.4, vemos uma certa semelhança nos dados, tanto nas tabelas, quanto na análise dos resultados. Essa igualdade, está associada na dimensão fractal e fragmentação florestal, em ambos os trabalhos quando lidos, observa-se uma comparação quase que evidente, tornando os dados aqui apresentados mais sólidos.

Em relação as questões norteadoras:

- Tem-se na natureza padrões que ramificam sua estrutura?

Infelizmente, devido as imagens do Google Maps ser de pouca resolução, não foram o bastante para concluir a existência dessa estrutura, lembrando-se que o fractal é uma ferramenta tanto qualitativa quanto quantitativa. E quando tratamos de autossimilaridade, necessita-se de uma ferramenta, imagem, de alta qualidade, a fim de verificar se de fato enxerga-se a ramificação estrutural. O que não exclui a conclusão da análise feita anteriormente. A diferença primordial é que: a análise qualitativa feita para comparar imagens e resultados numéricos, não nos exigiu grande resolução das imagens, porém, a análise qualitativa direta da autossimilaridade, necessita de uma alta resolução, o que até o presente momento é inviável com os dados coletados até aqui.

- Tais padrões, se existirem, são realmente verificáveis nos chamados fragmentos de florestas na Cidade Universidade da Universidade do Estado do Amazonas?

Como a resposta da primeira fora negativa, por conseguinte, este objetivo não pode ser alcançado, ficando em aberto.

- Esses padrões, podem ser resumidos em fractais?

Ainda que os padrões na estrutura não fora observado, isso não significa que o trabalho do cálculo dimensional-fractal seja inviável. De fato, a autossimilaridade é uma das características principais do fractal, porém, por meio dos trabalhos citados no item 1.4 e em outras pesquisas semelhantes, tem-se a grande possibilidade de padrões serem realmente encontrados na área submetida pelo estudo, ainda que as imagens, com pouca resolução, não seja o suficiente para concluir isso, até porque, padrões em fractais, necessita de alta resolução, como já dito, ficando em aberto tal conclusão. Ademais, o cálculo do fractal, por ser uma análise quantitativa, pode ocorrer perfeitamente, chegando como resultado valores próximos de outros trabalhos (item 1.4) semelhantes (metodologia, área de trabalho, campo e objetivos) a pesquisa feita nesse TCC, donde, torna-se os resultados mais confiáveis e verossímeis.

Um dos principais motivos para o não alcance de respostas para algumas das questões norteadoras, fora o pouco tempo disponibilizado para a pesquisa, o que tornou inviável a coleta de dados mais precisos. Soma-se a isto a qualidade das imagens de baixa resolução oferecidas pelo banco de dados do Google Maps, o que dificultou a adequação de algumas das propostas aventadas na pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vemos que a Geometria Fractal, com o devido suporte e condições para a sua aplicação, é uma ferramenta viável para o estudo e compreensão de fenômenos relacionados à ecologia de paisagem. Nessa pequena pesquisa, fora mostrado o quão a dimensão fractal satisfaz o estudo da fragmentação florestal, conexão esta, contida nos gráficos e nas tabulações apresentadas anteriormente.

Sobre futuros trabalhos, apresentando-nos uma ampla dimensão em todas as áreas, particularmente, aquelas onde a matemática aplicada atua, sendo o fractal uma ferramenta que poderá ser usada no acompanhamento de células do câncer, crescimento populacional, em aparelhos tecnológicos, como as micro antenas de computadores de mesa, e etc.

Na área da medicina, o artigo intitulado *Análise fractal da vasculatura retínica: métodos de segmentação e de cálculo dimensional,* mostra de maneira incrível como os fractal estão na estrutura da retina humana. Nesse artigo, que poderá ser encontrado na bibliografia, nos é apresentado imagens em alta resolução de retinas de pacientes que foram submetidos a pesquisa. A conclusão a que chegara os autores, fora a comparação dos métodos de cálculos fractais e a viabilidade desta ferramenta. O artigo conclui que a Geometria Fractal poderá ser um método de diagnóstico automatizado das doenças retínicas, desde que patronizem o cálculo da dimensão fractal, tendo um impacto grande no campo da prevenção da cegueira humana, deixando por fim, um caminho aberto para trabalhos futuros.

Espera-se que a geometria fractal seja mais trabalhada, não somente no contexto da matemática, quanto da tecnologia e da pesquisa científica, como no campo da física dos materiais, onde o crescimento de estruturas sejam elas cristais ou a penetração de um fluido noutro material, assumem, com frequência, estruturas ramificadas com a propriedade de autossimilaridade (Baptista).

Este trabalho de conclusão de curso, apesar de sua simplicidade, mostrou-nos a utilização do fractal na aplicação prática em biologia, ademais, não deverá, pois, finalizar por si só. Essas seriam apenas um dos inúmeros setores onde pesquisas futuros poderão ser feitos com a Geometria Fractal.

REFERÊNCIAS

ALBERTO, L. B. J.; PAUSTEIN, M. M. **PADRÕES DA FRAGMENTAÇÃO DO HABITAT NA CUESTA DE BOTUCATU (SP**). Ciência Florestal, Santa Maria, v.10, n.1, p.141-157. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1980-50982000000100141&script=sci_abstract&tlng=pt> Acesso em: 15/10/2018.

AZEVEDO, T.S. **Análise Espaço Temporal da Dimensão Fractal de Matas Ciliares na Alta Bacia do Rio Passa Cinco – Centro Leste do Estado de São Paulo**. 2003. 161f. Dissertação (Mestrado em Geografia). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro. Rio Claro (SP), 2003. Diposnível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/86525/azevedo_ts_me_rcla.pdf?sequence=1> Acesso em: 14/10/2018.

BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. **Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores De Matemática**. 2011. 200f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/91046>. Acesso: 10/05/2018.

BEZERRA., M. M. M; Carlos ALEXANDRE, C. A. G; ALBUQUERQUE, R. N.; MARCELO; N. A. F. G; MORAIS, M. V; ORÉFICE; F. **Análise fractal da vasculatura retínica: métodos de segmentação e de cálculo dimensional**. Revista de Oftalmologia de São Paulo. 2007. V. 70, n. 3, p. 413-422. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/abo/v70n3/06.pdf>. Acesso em: 14/10/2018).

BAPTISTA, Tiago Roberto Ferreira**. Fractais: Aplicações em Engenharia**. 2013. 76f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores Área de Especialização de Automação e Sistemas) - Departamento de Engenharia Electrotécnica. Instituto Superior de Engenharia do Porto. Disponível em: <http://recipp.ipp.pt/browse?type=advisor&value=Pinto%2C+Carla+Manuela+Alves>. Acesso: 15/06/2018

CICARINI, M. H.; PAULO, V S.; ANTÔNIO C. A.; RIBEIRO, S; JACKSON, J. G. **Análise fractal aplicada à fragmentação florestal no município de Viçosa – MG.** Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Florianópolis, Brasil, 21-26 abril 2007, INPE, p. 5831-5838. Disponível em: < http://marte.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/sbsr@80/2006/10.26.18.10/doc/5831-5838.pdf>. Acesso em: 26/05/2018.

ELIANA, Einsfeld Krindges. **Geometria Fractal no Ensino Fundamental: Inserindo Matemática Contemporânea nos Conteúdos do Currículo Escolar.** 2012. 86f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Regional de Blumenau, Blumenau. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/FURB_b56ea73ce54ac9720db17292221b9dbc/Details>. Acesso: 02/04/2018.

GARCIA, L. S.; SANTOS, A. M.; FOTOPOULOS, I. G.; Furtado, R. S. **Fragmentação florestal e sua influência sobre a fauna: Estudo de Caso na Província Ocidental da Amazônia, Município de Urupá, Estado de Rondônia**. In. XVI Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto – SBSR. Foz do Iguaçu, PR, 2013, INPE, 3163 – 3170. Disponível em: <http://marte2.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/marte2/2013/05.29.00.08.35/doc/p0
pdf>. Acesso em: 19/06/2018.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 75f. Tese (Mestre em Ensino da Matemática) - Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso: 18/05/2018.

Olsen, E. R., RAMSEY, R. D., WINN, D. S. **A Modified fractal dimension as a measure of landscape diversity**. **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing,** 59(10):1517-1520, 1993. Disponível em: https://www.asprs.org/wp-content/uploads/pers/1993journal/oct/1993_oct_1517-1520.pdf. Acesso: 26/05/2018.

VIANA, V. M.; PINHEIRO, L.A. F. V. **Conservação da biodiversidade em fragmentos florestais**. Série Técnica IPEF. v. 12, n. 32, p. 25-42, 1998. Disponível em: <http://www.ipef.br/publicacoes/stecnica/nr32/cap03.pdf>. Acesso: 24/06/2018.