UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

ESCOLA NORMAL SUPERIOR

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tina Steffany Sousa de Barros

IDENTIDADES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES

MANAUS, 2018

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IDENTIDADES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES

Tina Steffany Sousa de Barros

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto à disciplina TCC II do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.
Orientador: Me. Alessandro Monteiro de Menezes.

MANAUS, 2018

GOVERNO DO ESTADO DO
AMAZONAS

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de **TINA STEFFANY SOUSA**.

Aos 23 dias do mês de novembro de 2018, às 16:30 horas, em sessão pública na Sala Mercedes Ponce de Leão da Escola Normal Superior na presença da Banca Examinadora presidida pela professora da disciplina de Trabalho de Conclusão do Curso Helisângela Ramos da Costa e composta pelos examinadores: **Me. ALESSANDRO MONTEIRO DE MENEZES, Me. ALEXANDRA SALERNO PINHEIRO** e **Me. FABIO DE SOUZA COSTA** a aluna **TINA STEFFANY SOUSA** apresentou o Trabalho: **"IDENTIDADES ALGÉBRICAS E APLICAÇÕES"** como requisito curricular indispensável para a integralização do Curso de Licenciatura em Matemática. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,0 à monografia divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.

Helisangela Ramos da Costa
Presidente da Banca Examinadora

Alessandro Monteiro de Menezes
Orientador (a)

Alexandra Salerno Pinheiro
Avaliador 1

Fabio de Souza Costa
Avaliador 2

Tina Steffany Sousa de Barros
Aluno

(Fazer em duas vias, uma deve ser digitalizada para ser anexada ao TCC entregue em CD e outra deve ser entregue na Sec. Coordenação do Curso)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu pai, irmãos e em especial a minha mãe, por todo incentivo que sempre me deram para que eu tivesse o melhor desempenho em meus estudos.

AGRADECIMENTO

Agradeço em primeiro lugar a Deus por proporcionar a sabedoria, conhecimento e me fazer sempre continuar. E, principalmente ao meu professor orientador Me. Alessandro Monteiro de Menezes por todo apoio, incentivo e conhecimento transferido desde o início da proposta desse trabalho e também a professora Me. Helisângela Ramos da Costa pelo auxílio dado tanto em suas aulas, quanto fora delas, nos ajudou muito.

NOTAÇÕES E ABREVIAÇÕES

I. Abreviações

IMO	International Mathematical Olympiad
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
MEC	Ministério da Educação
MCT	Ministério da Ciência e Tecnologia
AIME	American Invitational Mathematics Exam
CN	Colégio Naval
IME	Instituto Militar de Engenharia

II. Notações

$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$=$	Igual
$\neq$	Diferente
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor igual que
$\geq$	Maior igual que
$\Leftrightarrow$	Se e somente se
$\Rightarrow$	Implica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos capítulos 1 e 2 são explorados respectivamente a fundamentação teórica e a metodologia da pesquisa. Onde, na fundamentação teórica tem-se uma abordagem histórica da álgebra, e também dos matemáticos que influenciaram as identidades algébricas e suas origens, por fim a respeito do tipo de problemas utilizados nas aplicações, destacando a importância desses problemas. Já na metodologia é traçado o caminho e tipo de pesquisa que foi realizado neste trabalho, onde são colocados os procedimentos e as técnicas que tornaram possível a investigação das identidades algébricas: a pesquisa realizada foi qualitativa e o instrumento de coleta de dados foi a pesquisa bibliográfica.

Além disso, são abordadas várias identidades algébricas existentes nos capítulos 3 e 4, no qual logo no início tem uma breve abordagem sobre expressões algébricas e identidades algébricas com conceitos importantes para entender o conteúdo. Depois é tratado de produtos notáveis e fatorações, mais comuns, quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, a diferença de dois quadrados, quadrado da soma de três termos, cubo da soma de dois termos, cubo da diferença de dois termos, soma de dois cubos, diferença de dois cubos, cubo da soma de três termos, e também importantes identidades envolvendo frações. Por fim discorre sobre aquelas identidades menos conhecidas como a Identidade de Sophie- Germain, Produto de Stevin, Fórmula de Viète, Identidade de Lagrange, Identidade de Bramagupta, Identidade de Catalan, Identidade de Platão, Identidade de Cauchy e uma Identidade Especial.

Pretende-se aplicar algumas dessas identidades estudadas em uma série de problemas matemáticos, cerca de 30, cujo graus de dificuldades são distintos, no entanto logo após o enunciado de cada questão é descrito quais foram as identidades utilizadas para a solução e elas podem ser encontradas no capítulo 5.

O diferencial deste trabalho são as aplicações das identidades através de problemas envolvendo números racionais, irracionais, desigualdades matemáticas, radical duplo e racionalização de denominadores como os utilizados em instrumentos de avaliação de matemática. Outra importância da escolha dessa área do conhecimento matemático é a sua ampla aplicabilidade aos números e símbolos que de certa forma necessitam de uma manipulação algébrica, assim como Laier (2014, p.42) afirma:

> É diferente de definir aspectos da Álgebra, que podem facilmente ser identificados em atividades tais como simplificar expressões, resolver equações, aplicar regras para operar tanto com números quanto com símbolos. Essa manipulação de símbolos e a reprodução de técnicas operatórias, aplicadas mecanicamente, são características claras da Álgebra[...]

O público alvo deste trabalho são todos os níveis de ensino que trabalham com essas identidades, no entanto é evidente sua maior contribuição para o ensino superior já que possui um grau de dificuldades maior.

O objetivo geral deste trabalho é aprofundar o estudo sobre as identidades algébricas com as suas características, as suas particularidades, os seus aspectos históricos e por meio de resolução de problemas.

Para tal fim, nos objetivos específicos buscou-se:

- Descrever aspectos históricos relevantes da álgebra, em especial, dos matemáticos que contribuíram para as identidades algébricas estudadas;
- Definir as identidades algébricas a serem expostas com suas características e particularidades;
- Resolver questões de instrumentos de avaliação como de olimpíadas nacionais e internacionais sobre as identidades algébricas.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. ABORDAGEM HISTÓRICA

A história das identidades algébricas está intimamente ligada com a história da Álgebra em si, pois foi buscando o aprimoramento na resolução das expressões algébricas em geral que foram sendo desenvolvidas técnicas para facilitar os cálculos através da utilização das identidades.

A Álgebra recebeu contribuições de vários povos e matemáticos de toda parte do mundo e foi originada pela necessidade do homem de resolver problemas comuns ao nosso dia-a-dia. No entanto, destacou-se alguns deles que tornaram possível o desenvolvimento mais evidente dessa área do conhecimento matemático.

O povo egípcio com seus papiros, em evidência está o papiro Rhind, ou também conhecido como papiro Ahmes propôs muitos problemas de origem algébrica. O povo babilônico, por sua vez, é uma civilização antiga da Mesopotâmia como narra Boyer (1996), que não tinha dificuldades, por exemplo, em achar a solução de uma equação quadrática completa, pois já haviam desenvolvido operações algébricas flexíveis para isso, transportando termos, somando iguais a iguais, e multiplicando ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$ podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares.

O desenvolvimento da Álgebra não se deu de forma linear, pois houve estágios no decorrer do tempo que estão associados à evolução da linguagem algébrica: o primeiro estágio não se usava símbolos ou abreviações para expressar o pensamento algébrico, já o segundo introduziu alguns símbolos para representarem incógnitas e por fim o terceiro estágio em que as ideias algébricas passaram a ser expressas apenas por meio de símbolos, sem recorrer o uso de palavras. Segundo Boyer (1996, p. 123):

> Considera-se em geral que podem ser reconhecidos três estágios no desenvolvimento da álgebra: 1) o primitivo, ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; 2) um estágio intermediário, sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e 3) um estágio simbólico ou final.

Um matemático importante a citar é Diofanto, que em sua principal obra *Arithmetica* buscou resoluções exatas de equações tanto determinadas quanto indeterminadas, e foi chamado de pai da álgebra, o que não é tão conveniente, pois em seu trabalho é mais tratado sobre conteúdo relacionado as operações numéricas, embora a generalização fosse utilizada por ele , atualmente a álgebra é usada com abreviações e não mais com palavras como na sua primeira fase com os povos antigos, e foi Diofante que introduziu algumas abreviações, essa foi uma de suas principais contribuições para álgebra. Segundo Flood e Wilson (2013, p.34):

> Diofanto de Alexandria, conhecido como o "Pai da Álgebra", viveu provavelmente no século III d.C. Pouco sabemos sobre sua vida. A sua principal contribuição para a matemática foram os 13 livros que constituem a *Aritmética*, nenhum dos quais sobreviveu. Ao contrário dos textos da maioria dos matemáticos gregos, essa obra era uma coletânea de problemas algébricos propostos e resolvidos. Diofanto também foi primeiro matemático a imaginar e empregar símbolos algébricos. [...]

Já aquele que introduziu a álgebra simbólica foi François Viète, para Gil (2001), antigamente não existiam fórmulas redigidas de maneira a generalizar os problemas, para isso acontecer deveria ser criada uma nova álgebra e um dos primeiros matemáticos que tentaram fazer essa introdução da álgebra simbólica foi o matemático francês Viète.

Na matemática hindu, o mais relevante matemático do século VII foi Brahmagupta (598-665), trazendo grandes contribuições para a álgebra, para Alcântara e Oliveira (2006), o matemático Brahmagupta denotava a incógnita por *yā* (de *yāvattāvat,* "tanto quanto"), os inteiros conhecidos eram antecedidos por *rū* (de *rūpa* , "número puro"), as incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. Assim sendo, uma segunda incógnita poderia ser denotada por *kā* (de *kālaka* , "preto"). Nota-se que esse matemático já trabalhava com incógnitas também, dando continuidade a generalização tal qual conhecemos atualmente.

Outro colaborador da álgebra foi Al- Khowarizmi com seu livro: *Al-jabr Wa'l muqabalah* mesmo não utilizando letras para expressar as variáveis, nem símbolos para representar os números, e pelos seus problemas propostos elementares, não utilizou sincopação ou números negativos**.** Com tudo isso, ele ainda superou Diofanto e Brahmagupta, pois em seu livro continha o foco da álgebra atualmente: resoluções diretas de equações.

Logo, quem realmente merece o título de pai da álgebra é o Al- Khowarizmi. Segundo Flood e Wilson (2013), a *álgebra* de Al-Khowarizmi começa com uma descrição prolongada da solução de equações lineares e quadráticas. Como os números negativos ainda não eram considerados significativos, ele dividiu as equações nos seguintes seis tipos: Raizes iguais a números, quadrados iguais a números, quadrados iguais a raízes, quadrados e raízes iguais a números, quadrados e números iguais a raízes e raízes e números iguais a quadrados. Em seguida, ele passou a resolver casos de cada tipo, usando uma forma geométrica de "completar quadrados".

Apesar das técnicas algébricas serem conhecidas pelos matemáticos e povos antigos, para Grenier, Santos e Pereira (2010) foi somente com René Descartes (1596-1650) que a geometria e a álgebra se tornaram ramos da matemática que se trabalhavam juntos, pois ele mostrou como traduzir problemas de geometria para a álgebra, abordando esses problemas através de um sistema de coordenadas que hoje leva seu nome.

Percebe-se então que Descartes foi de fundamental importância para a matemática, e o sistema de coordenadas citado é o famoso plano cartesiano que tem a função de representar planos, retas e curvas através de equações matemáticas, ou seja, é realmente a fusão entre a geometria e a álgebra. E é por esse motivo que os estudos iniciais da Geometria Analítica surgiram com o auxílio das teorias de René Descartes.

Em relação a origem das identidades algébricas, Eves (2004) diz que os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas e atribui-se aos pitagóricos parte considerável dessa álgebra geométrica, encontrada em vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Assim, o Livro II dos *Elementos* contém várias proposições que em realidade são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica, através de métodos de decomposição.

Ainda segundo Eves (2004) a resolução de equação cúbica $x^3 + mx = n$ dada por Cardano em sua obra *Ars Magna* é demonstrada através da identidade cubo da diferença de dois termos: $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$. Onde, escolhe-se *a* e *b* de modo que $3ab = m, a^3 - b^3 = n,$ então *x* é dado por *a* - *b*. Resolvendo para a e b o sistema formado pelas duas últimas equações obtemos:

$a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$, $b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$, e assim x fica determinado.

As primeiras identidades tratadas neste trabalho são sobre as identidades notáveis tanto de 2° grau quanto do 3° grau, para Guabiraba (2014), as identidades acima citadas utilizam a propriedade distributiva para suas demonstrações e para se poupar tempo e não ter de multiplicar termo a termo sempre, se utilizam elas.

Já a identidade algébrica de Lagrange e Bramagupta costumam ser usadas em problemas mais difíceis. Segundo Silveira (2017, p.3):

> Temos aqui duas identidades que costumam ser usadas em problemas mais difíceis, apropriados para alunos mais adiantados. A primeira pode ser encontrada nos livros associada aos nomes de Diophantos (c. 250 dC, o primeiro que mostrou conhecê-la e aplicá-la), Fibonacci (c. 1200 dC, a demonstração mais antiga conhecida), Lagrange (c. 1800, deu uma versão mais geral), ou Brahmagupta (c. 650 dC que, em verdade, descobriu a segunda identidade e a aplicou em vários problemas difíceis).

Outra identidade importante que será estudada é a fórmula de Viéte, para Muniz (2017) a fatoração é chamada de fórmula de Viète em homenagem ao francês matemático François Viète (1540-1603).

Segundo Hall (2004), muitas mulheres fizeram parte da história da matemática, um exemplo clássico foi Sophie Germain (1776-1831), que apesar da resistência familiar inicial e da sociedade estruturada onde uma mulher era impossibilitada de manter uma carreira fez contribuições fundamentais na matemática pura e aplicada, obrigada a estar em casa desde cedo aprendeu a ler latim e grego na biblioteca de seu pai e um dos livros que a fascinava era *Essais Historiques sur la Mathématique* de Montucla, principalmente a secção onde descrevia a morte de Arquimedes pelo seu interesse em um diagrama geométrico.

Não é muito comum encontrarmos mulheres no decorrer da história da matemática comparando-se a quantidade de matemáticos, mas Sophie Germain ultrapassou essa barreira e fez grande diferença, mesmo fazendo parte de uma sociedade que não aceitava isso, assim sendo, uma das identidades que será abordada nesse trabalho recebe o nome dela.

Ainda, vale a pena aprender sobre contribuições do elaborador do produto de Stevin, Simon Stevin (1548-1620), o produto foi chamado assim em homenagem a seu nome, Dias (2016, p. 5) aborda:

> Simon Stevin morreu deixando um legado com inúmeras participações no ramo da matemática, como: em 1583 relatou construções relacionadas com polígonos e poliedros utilizando o conceito de similaridade, de poliedro regular e semi-regular; em 1585 apresentou um tratado unificado para a resolução de equações do segundo grau e um método para encontrar soluções aproximadas de equações algébricas de todos os graus; em 1586 Stevin substitui o método indireto de exaustão, usado por Arquimedes, por um método direto que representa um passo importante para o conceito matemático de limite.[...]

Cauchy foi outro matemático importante para as identidades algébricas, tanto é que uma das identidades recebeu o seu nome, Segundo Eves (2004, p.531):

> Cauchy escreveu extensiva e profundamente tanto sobre matemática pura como matemática aplicada, e provavelmente se ombreia com Euler em volume de produção. Suas obras reunidas contêm, além de vários livros, 789 artigos, alguns dos quais são trabalhos longos, preenchendo trinta e quatro alentados volumes. A qualidade desse trabalho é irregular; por isso Cauchy (muito contrário de Gauss) tem sido criticado por sua produção excessiva e por sua redação apressada. [...] Cauchy teve de procurar outros escoadouros para seus longos artigos, alguns excedendo cem páginas.

Além dessas identidades e os influenciadores para seus respectivos nomes, tem-se ainda a identidade de Platão, sobre Platão, Bicudo (1998, p.3) afirma:

> A tradição, bem como alguns modernos historiadores, consideram decisiva sua colaboração ao desenvolvimento da matemática, mormente no que respeita a método, à sistematização e aos fundamentos da mesma, bem como a sua emancipação da experiência.

Mediante a isso, pode-se perceber na história da matemática que foram muitos os matemáticos influenciadores no avanço da álgebra em todos os seus estágios, até chegar um ponto, enfim, de encontrar-se formas de resolver expressões algébricas de maneira mais simples, as identidades algébricas, mas foi por meio de todo esse processo histórico que chegamos a essas identidades que conhecemos atualmente.

Para as aplicações abordadas buscou-se tirar algumas questões de olimpíadas de matemática internacionais e a respeito dessas competições, Bragança (2013) conta que em 1804, a Hungria realizou a 1° Olimpíada de matemática para alunos do último ano da escola secundária. Com o passar dos anos, competições como essa se espalharam pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da *1° Olimpíada Internacional de Matemática* (*International Mathematical Olympiad*- IMO), na Romênia, com países daquela região. Há também a *Olimpíada Ibero Americana de Matemática* com alunos de mais de 20 países da América Latina, além de Espanha e Portugal. A última iniciativa internacional nesse tipo de competição foi a *Olimpíada de Matemática as Lusofonia*, realizada pela primeira vez em 2011.

Já em relação as olimpíadas de matemática nacionais que também foram colocadas, Bragança (2013) diz, no Brasil, a Academia Paulista de Ciências criou em 1977 a *Olimpíada Paulista de Matemática* e dois anos mais tarde, surgiu a *Olimpíada Brasileira de Matemática* (OBM), organizada pela *Sociedade Brasileira de Matemática* (SBM). A OBM, em conjunto com as Olimpíadas Regionais de Matemática, envolve anualmente a participação de cerca de 200 mil estudantes no Brasil. Todavia, para promover o ensino da Matemática nas escolas públicas, em 2005, a SBM, em parceria com o *Instituto de Matemática Pura e Aplicada* (IMPA), criou a *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas* (OBMEP), um projeto do *Ministério da Educação* (MEC) e *do Ministério da Ciência e Tecnologia* (MCT).

1.2. ABORDAGEM SOBRE AS APLICAÇÕES UTILIZADAS

São inúmeros os problemas e exercícios de um nível de dificuldade maior, inclusive de olimpíadas, que se aplicam as identidades algébricas, pois elas são a base das principais técnicas de fatoração. Portanto, será esse o foco principal: mostrar essas aplicações que utilizam as identidades algébricas, envolvendo: números racionais, irracionais, desigualdades, entre outros.

Primeiramente, no MEC (2006) orienta que a matemática deve ser usada para resolver problemas práticos do quotidiano, para modelar fenômenos em outras áreas de conhecimento, além disso, para entender que ela é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações. Ela é um conhecimento social e historicamente construído e tem grande importância no desenvolvimento cientifico e tecnológico.

Buscou-se através das aplicações abordadas trazer a maior parte dessas características matemáticas citadas pelo MEC, para que se torne ainda mais rico e fundamentado a pesquisa realizada ao decorrer do trabalho, e desta forma, as demonstrações e as próprias definições foram interligadas a questões.

As aplicações que foram abordadas estão inclusas nos problemas do tipo “aberto”, como MEC (2006) afirma que eles trazem a aquisição de procedimentos para a resolução de problemas e o conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para os resolver.

E é esse o objetivo com as questões, pois elas requerem um pouco mais de conhecimento para se solucionar, desenvolvendo o raciocínio lógico e como já mencionado, as identidades estão ligadas a outros assuntos matemáticos, o que torna as aplicações de um nível mais difícil.

São colocadas algumas aplicações que envolvam a resolução de problemas e há vários tipos de resoluções, um autor que apresenta um quadro dos tipos de problemas matemáticos apresentados por Polya foi Laier (2014, p.57):

Quadro 1: Tipos de problemas Matemáticos apresentados por Polya

Tipo	**Significação**
Problema Auxiliar	É resolvido para que auxilie a resolver outro.
Problema rotineiro	Que exigem somente o desempenho mecânico das operações matemáticas.
Problema de determinação	Tem como objetivo que encontremos certo objeto, tal como uma incógnita; e podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos.
Problemas de demonstração	Objetiva mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então é falsa.
Problemas Práticos	São diferentes dos problemas puramente matemáticos, pois são aplicados para alguma área específica, como engenharia, mas que exigem o desenvolvimento de operações matemáticas.

Fonte: Polya (1975)

Desta forma, olhando o quadro apresentado por Polya, nota-se que a maioria das aplicações que foram escolhidas, estão encaixadas no tipo de problema rotineiro, onde será utilizado o desempenho mecânico das identidades que serão definidas e demonstradas no decorrer da pesquisa realizada. Mas tem também presente os problemas de determinação, onde se chegará a encontrar o valor de uma variável e os problemas de demonstração onde se alcança a conclusão de que o enunciado da questão é realmente verdadeiro.

Ainda, segundo Laier (2014, p.57):

> Essa classificação apresenta as diferentes naturezas que problemas matemáticos podem apresentar, mas que mesmo assim, podem ter um padrão a seguir em todas as resoluções. É basicamente o que chama de raciocínio heurístico, que leva em consideração certos padrões lógicos que são importantes para a resolução de problemas, e tem a ver com aspectos psicológicos de quem resolve o problema. Desta forma, todos os tipos de problemas situam-se no campo da heurística, que diante das considerações acima, pode ser entendida basicamente como algo o qual "trata do comportamento humano em face de problemas"

O trabalho contém, a maioria, questões de olimpíadas, tanto nacionais quanto internacionais, elas serão empregadas por conta da exigência de mais conhecimento para resolvê-las. Segundo Bragança (2013) essas competições têm por objetivo promover a matemática, desenvolver a habilidade lógica, criativa e social, bem como utilização de métodos adequados de pensamento e trabalho, nos quais os alunos colocam em prática o conteúdo aprendido através de situações problemas, além disso, forma futuros líderes de sociedades de matemática, causa melhoria de capacidade científica através de motivação e competitividade regional, nacional e internacional que contribuem para o desenvolvimento dessas regiões, estados e países participantes, entre outros motivos.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1. A ABORDAGEM METODOLÓGICA

> Partindo da concepção de que método é um procedimento ou caminho para alcançar determinado fim e que a finalidade da ciência é a busca do conhecimento, podemos dizer que o método científico é um conjunto de procedimentos adotados com o propósito de atingir o conhecimento. (PRODANOV e FREITAS, 2013, p.24)

Em concordância, buscou-se identificar os procedimentos intelectuais e as técnicas que tornaram possível a investigação das identidades algébricas, portanto foi empregada uma linha de raciocínio no processo da pesquisa. Mas, para isso o que determinou o objeto investigado e o seu estudo, foi a pesquisa qualitativa.

No entanto, antes disso, primeiramente vale a pena entender o que é a pesquisa e como foi aplicada para assim seguir essa linha de raciocínio proposta, pois não foram colocadas cópias de informações desordenadas ou opiniões avulsas sobre o assunto, pelo contrário, as informações foram dadas com referências corretas e confiáveis, e assim, ampliou-se os conhecimentos sobre o assunto escolhido. Conforme Prodanov e Freitas (2013, p.43):

> A pesquisa científica é a realização de um estudo planejado, sendo o método de abordagem do problema o que caracteriza o aspecto científico da investigação. Sua finalidade é descobrir respostas para questões mediante a aplicação do método científico. A pesquisa sempre parte de um problema, de uma interrogação, uma situação para a qual o repertório de conhecimento disponível não gera resposta adequada.

Para Machado (2010) o pesquisador ao fazer o seu trajeto em busca de suas pesquisas e investigações é imprescindível que ele já tenha seus procedimentos metodológicos bem estruturados e definidos, assim por meio desses eixos norteadores ele venha ser auxiliado no seu estudo de pesquisa. Assim sendo já traçado o procedimento metodológico que foi percorrido, a pesquisa qualitativa, se constituirá a importância dela.

Como narra Prodanov e Freitas (2013): A Pesquisa qualitativa considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números, ela não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. Tal pesquisa é descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

Desse modo, a pesquisa foi realizada no ambiente bibliográfico e o objeto de estudo foram as identidades algébricas e elas necessitam de um trabalho mais intensivo de campo, não havendo manipulação do pesquisador. As identidades são definidas e demonstradas através de investigações em livros, artigos científicos e outros meios confiáveis sobre o conteúdo.

2.2. TÉCNICA DE COLETA DE DADOS

Com a finalidade de obter os dados necessários na elaboração dessa pesquisa, foi traçado um modelo conhecido como delineamento, uma vez que expressa ideias de padrão, organização e planejamento. Conforme Prodanov e Freitas (2013, p.54):

> O delineamento refere-se ao planejamento da pesquisa em sua dimensão mais ampla, envolvendo diagramação, previsão de análise e interpretação de coleta de dados, considerando o ambiente em que são coletados e as formas de controle das variáveis envolvidas. O elemento mais importante para a identificação de um delineamento é o procedimento adotado para a coleta de dados.

O delineamento seguido é a pesquisa bibliográfica que terá como base materiais já elaborados sobre o conteúdo e os instrumentos utilizados são as fontes bibliográficas. Como narra Prodanov e Freitas (2013): A Pesquisa bibliográfica é elaborada a partir de material já publicado, constituído principalmente de: livros, revistas, publicações em periódicos e artigos científicos, jornais, boletins, monografias, dissertações, teses, material cartográfico, internet, assim sendo o pesquisador ficará em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa. No entanto, em relação aos dados coletados na internet, verificou-se a confiabilidade e fidelidade das fontes consultadas.

Por fim, são apresentadas e demonstradas as identidades algébricas: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, a diferença de dois quadrados, quadrado da soma de três termos, cubo da soma de dois termos, cubo da diferença de dois termos, soma de dois cubos, diferença de dois cubos, cubo da soma de três termos, algumas identidades envolvendo frações, Identidade de Sophie-Germain, Produto de Stevin, Fórmula de Viète, Identidade de Lagrange, Identidade de

Bramagupta, Identidade de Catalan, Identidade de Platão, Identidade de Cauchy, e uma Identidade Especial. Depois foram aplicadas essas identidades em problemas matemáticos, mas tudo embasado em uma pesquisa bibliográfica confiável.

E sobre as aplicações, como exposto na introdução foram selecionados cerca de 30 problemas matemáticos relacionando algumas das identidades algébricas estudadas com o conjunto dos números racionais e irracionais, radical duplo, racionalização de denominadores e desigualdades matemáticas em questões de instrumentos de avaliação tais como de olimpíadas nacionais e internacionais.

CAPÍTULO 3: INÍCIO DOS ESTUDOS SOBRE AS IDENTIDADES ALGÉBRICAS

3.1. AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E IDENTIDADES ALGÉBRICAS

Nas expressões aritméticas sempre são trabalhados termos numéricos. Como na expressão:1+2, percebe-se ser uma operação bem simples envolvendo apenas dois números, no entanto, chega até as expressões mais complexas e em todas envolvem apenas números.

Todavia, o intuito desse trabalho é utilizar as expressões algébricas, já que as identidades são desse tipo, logo precisa-se antes ter uma breve definição de termos algébricos e expressões algébricas.

O termo algébrico é uma multiplicação de números e letras. As letras também representam números que são a princípio desconhecidos, ou seja, podem assumir qualquer valor real. É possível calcular o valor de uma expressão algébrica, desde que sejam dados os valores dessas letras. Além disso, quando há equações que envolvem essas expressões, dar para descobrir os valores dessas letras, que podem ser chamadas de incógnitas.

Uma expressão algébrica é uma combinação de operações matemáticas nas quais estão envolvidos termos algébricos. Utiliza-se várias letras, e cada uma com potências diferentes, e combinam-se elas por adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências e raízes. Sendo assim, formam-se expressões algébricas, das mais simples às mais complicadas. Na maior parte da álgebra é mais comum a ocorrência de expressões algébricas simples. Porém, é necessário classificá-las, ou seja, identificar certas características importantes.

Toda expressão algébrica pode ser classificada em racional ou irracional. Expressão algébrica racional é aquela em que suas variáveis aparecem somente elevadas a potências inteiras. Expressão algébrica irracional é aquela em que existem variáveis elevadas a potências que não sejam números inteiros, por exemplo, raízes.

Se a expressão for racional, é possível ainda classificá-la em inteira ou fracionária. Expressão algébrica racional inteira é aquela que é racional e não possui variáveis em denominadores. Expressão algébrica racional fracionária é aquela que é racional e possui variáveis em denominadores.

Uma expressão algébrica racional inteira é chamada de polinômio. Se a expressão tiver apenas um termo, é chamada de monômio. As expressões com 2 e com 3 termos são chamados de polinômios, mas seus nomes respectivamente são: binômios e trinômios. É correto dizer que o monômio, o binômio e o trinômio são polinômios com respectivamente 1, 2 e 3 termos.

Aliás, é importante definir a igualdade algébrica que nada mais é que o resultado de juntar com o sinal de igual duas expressões algébricas. Toda igualdade algébrica tem o formato:

Expressão algébrica 1= Expressão algébrica 2

O foco maior desse trabalho são as identidades algébricas, elas são a base das principais técnicas de fatoração, por isso vale a pena relembrar sua definição:

Identidade algébrica é toda igualdade algébrica, que é verdadeira se, e somente se, a igualdade é verdadeira para quaisquer valores que se atribua às variáveis envolvidas.

3.2. IDENTIDADES ALGÉBRICAS NOTÁVEIS

São ditas notáveis por serem as identidades algébricas que merecem ser destacadas por conta da grande frequência com que aparecem quando operamos com expressões algébricas.

3.2.1. Identidades Algébricas Notáveis do Segundo grau

3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos

Definição:

É uma expressão algébrica em que a soma de dois monômios está elevada ao quadrado. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, elevando ao quadrado a soma desses dois termos alcança o resultado: o quadrado do primeiro termo mais o dobro do produto entre o primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Demonstração:

Utilizando-se as propriedades comutativa e associativa da adição e multiplicação de números reais, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, temos:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a(a+b)+b(a+b) \\
&= (a^2+ab)+(ba+b^2) \\
&= a^2+\left(ab+ab\right)+b^2. \\
&= a^2+2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos

Definição:

É uma expressão algébrica em que a diferença de dois monômios está elevada ao quadrado. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$, elevando ao quadrado a diferença desses dois termos alcança o resultado: o quadrado do primeiro termo menos o dobro do produto entre o primeiro termo pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2.$$

Demonstração:

Utilizando-se a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, fica assim:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= [a+(-b)]^2 \\
&= a^2+2a.(-b)+(-b)^2 \\
&= a^2-2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

3.2.1.3. A diferença de dois quadrados

Definição:

É uma expressão algébrica que possui dois monômios e ambos devem estar elevados ao quadrado cuja operação entre os mesmos é de subtração. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$. O quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo é igual ao produto da soma pela diferença desses dois termos.

$$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b).$$

Demonstração:

Iniciando-se com o produto da soma pela diferença e utilizando novamente as propriedades das operações aritméticas de números reais, obtemos:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 \cancel{-ab} + \cancel{ab} - b^2\\ &= (a^2 - b^2).\end{aligned}$$

3.2.1.4. Quadrado da soma de três termos

Definição:

É uma expressão algébrica em que a soma de três monômios está elevada ao quadrado. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$. Elevando-se ao quadrado a soma desses três termos, então o resultado é igual ao somatório entre o quadrado do primeiro termo, o quadrado do segundo termo, o quadrado do terceiro termo, o dobro do produto entre o primeiro termo pelo segundo termo, o dobro do produto entre o primeiro termo pelo terceiro termo e o dobro do produto entre o segundo termo pelo terceiro termo.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Ou equivalente:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).$$

Demonstração:

Utilizando-se duas vezes a fórmula para o quadrado da soma de dois termos, alcançamos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \left[(a+b)+c\right]^2 \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (2ac + 2bc) + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).\end{aligned}$$

3.2.2. Identidades Algébricas Notáveis do Terceiro grau

3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos

Definição:

É uma expressão algébrica em que a soma de dois monômios está elevada ao cubo. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Elevando-se ao cubo a soma desses dois termos alcançamos o seguinte resultado: o cubo do primeiro termo mais o triplo do produto entre o quadrado do primeiro termo pelo segundo termo mais o triplo do produto entre o primeiro termo pelo quadrado do segundo termo mais o cubo do segundo termo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Ou equivalente:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3.$$

Demonstração:

Mais uma vez utilizando as propriedades da adição e multiplicação dos números reais citadas anteriormente, além da fórmula para o quadrado da soma de dois termos, encontramos:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a.a^2+a.2ab+a.b^2+b.a^2+b.2ab+b.b^2\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &= a^3+3ab(a+b)+b^3.\end{aligned}$$

3.2.2.2. Cubo da diferença de dois termos

Definição:

É uma expressão algébrica em que a diferença de dois monômios está elevada ao cubo. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$. Elevando-se ao cubo a diferença desses dois termos alcançamos o seguinte resultado: o cubo do primeiro termo menos o triplo do produto entre o quadrado do primeiro termo pelo segundo termo mais o triplo do produto entre o primeiro termo pelo quadrado do segundo termo menos o cubo do segundo termo.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ou equivalente:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3.$$

Demonstração:

Aplicando-se a fórmula para o cubo da soma de dois termos em $(a-b)^3 = [a+(-b)]^3$, temos:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.\end{aligned}$$

3.2.2.3. Soma de dois cubos

Definição:

É uma expressão algébrica que possui dois monômios e ambos devem estar elevados ao cubo cuja operação entre os mesmos é de adição. Sejam $a,b \in \mathbb{R}$, o cubo do primeiro termo mais o cubo do segundo termo gera como resultado: o produto entre a soma dos dois termos pela seguinte expressão algébrica montada com os dois termos: o quadrado do primeiro termo menos o produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Demonstração:

Utilizando-se a fórmula do cubo da soma de dois termos, temos as expressões:

$$(a+b)^3 = a^3+3ab\left(a+b\right)+b^3 \ (I)$$
$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \ \ (II).$$

Agora, fazendo *(I)=(II)*, temos:

$$a^3+3ab(a+b)+b^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)-3ab(a+b).$$

Por fim, por meio de agrupamento chegamos a identidade:

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

3.2.2.4. Diferença de dois cubos

<u>Definição:</u>

É uma expressão algébrica que possui dois monômios e ambos devem estar elevados ao cubo cuja operação entre os mesmos é de subtração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, o cubo do primeiro termo menos o cubo do segundo termo gera como resultado: o produto entre a diferença dos dois termos pela seguinte expressão algébrica montada com os dois termos: o quadrado do primeiro termo mais o produto entre o primeiro e o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

<u>Demonstração:</u>

Utilizando-se a fórmula do cubo da diferença de dois termos, temos as expressões:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab\left(a - b\right) + b^3 \ (I)$$
$$(a - b)^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \ (II).$$

Agora, fazendo *(I)=(II)*, temos:

$$a^3 - 3ab(a - b) + b^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) + 3ab(a - b).$$

Por fim, por meio de agrupamento chegamos a identidade:

$$a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$
$$a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

3.2.2.5. Cubo da soma de três termos

<u>Definição:</u>

É uma expressão algébrica em que a soma de três monômios está elevada ao cubo. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Elevando-se ao cubo a soma desses três termos, então o resultado é igual o somatório entre o cubo do primeiro termo, o cubo do segundo termo, o cubo do terceiro termo, o triplo do produto entre a soma do primeiro com o segundo termo, a soma do segundo pelo terceiro termo e a soma do primeiro com o terceiro termo:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

Demonstração:

Aplicando-se a fórmula para o cubo da soma de dois termos duas vezes e utilizando as propriedades usuais das operações aritméticas, obtemos:

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= [(a+b)+c]^3 \\
&= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + c^3 + 3(a+b)[(a+b)c + c^2] \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)[ab + ac + bc + c^2] \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)[(b+c)(a+c)] \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).
\end{aligned}$$

3.3. IDENTIDADES IMPORTANTES ENVOLVENDO FRAÇÕES

3.3.1. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$

Definição:

A soma dos inversos de dois números reais não nulos *a e b* resulta no quociente entre a soma e o produto desses dois.

Demonstração:

Realizando-se o m.m.c. entre os denominadores a e b chega-se facilmente ao resultado:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}$$
$$=\frac{b+a}{ab}.$$

3.3.2. $\mathbf{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}}$

Definição:

A subtração dos inversos de dois números reais não nulos *a e b* resulta no quociente entre a diferença e o produto desses dois.

Demonstração:

Analogamente a demonstração 3.3.1 chega-se a:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}$$
$$=\frac{b-a}{ab}.$$

3.3.3. $\mathbf{\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{2a+1}{a(a+1)}}$

Definição:

Seja $a\in\mathbb{R}^*$ e $a\neq 1.$ Essa identidade afirma que a soma dos inversos entre um número e seu sucessor resulta no quociente entre o dobro do número mais um, e o produto dos dois.

Demonstração:

Temos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{a(a+1)}+\frac{a}{a(a+1)}$$
$$=\frac{2a+1}{a(a+1)}.$$

3.3.4. $\mathbf{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}}$

Definição:

Seja $a \in \mathbb{R}^*$ e $a \neq 1.$ Essa identidade afirma que a diferença entre os inversos de um número e de seu sucessor é igual ao inverso do produto entre eles.

Demonstração:

Analogamente a demonstração 3.3.3, chegamos a:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{a(a+1)}-\frac{a}{a(a+1)}$$
$$=\frac{\cancel{a}+1\cancel{-a}}{a(a+1)}$$
$$=\frac{1}{a(a+1)}.$$

3.3.5. $\mathbf{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}}$

<u>Definição:</u>

Seja $a \in \mathbb{R}^{*}$ e $a \neq 1$. O somatório entre o inverso do seu sucessor e o inverso do produto entre ele e seu sucessor resulta no seu inverso.

<u>Demonstração:</u>

Utilizando-se o m.m.c entre os denominadores e também colocando em evidência os termos semelhantes no numerador, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)} &= \frac{a(a+1)}{(a+1).a.(a+1)}+\frac{a+1}{(a+1).a.(a+1)}\\ &= \frac{\cancel{(a+1)}\,\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a+1)}.a.\cancel{(a+1)}}\\ &= \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

CÁPITULO 4: OUTRAS IDENTIDADES

4.1. FÓRMULA DE VIÉTE

Definição:

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, o produto entre a diferença do primeiro com o segundo termo pela diferença entre o primeiro e terceiro termo é igual um trinômio de segundo grau em *a*, frequentemente útil que é dado pela igualdade:

$$(a-b)(a-c)=a^2-(b+c)a+bc. (I)$$

Observe que, no lado direito da expressão *(I)*, tanto na soma $S=b+c$ quanto no produto $P=bc$, percebe-se que *b e c* aparecem. Uma expressão da forma em que *S e P* representam respectivamente a soma e o produto de dois números ou expressões, é chamado de trinômio de segundo grau e nesse caso é um trinômio de segundo grau em *a*. Portanto, escrevendo *(I)* como essa nova identidade, também podemos ver como uma fatorização de um trinômio de segundo grau: a^2-Sa+P, onde $S=b+c$ e $P=bc$:

$$a^2-Sa+P=(a-b)(a-c) \ (II)$$

A fatoração acima é chamada de fórmula de Viète.

Uma variante útil da fórmula de Viète é a fatoração para a expressão a^2+Sa+P, onde como antes, $S=b+c$ e $P=bc$:

$$a^2+Sa+P=(a+b)(a+c) \ (III)$$

Se mudarmos *S, b e c* na equação *(II)* respectivamente por *-S,-b, e -c*, imediatamente vemos que *(III)* é equivalente a essa fatoração.

Demonstração:

Tomando-se primeiramente o lado esquerdo da expressão *(I),* e fazendo as operações necessárias, chega-se a prova:

$$\begin{aligned}(a-b)(a-c) &= a(a-c)-b(a-c)\\ &= a^2-ac-ba+bc\\ &= a^2-(ac+ba)+bc\\ &= a^2-a(c+b)+bc\end{aligned}$$

ou

$$= a^2-Sa+P.$$

Agora, para provar a variante útil da fórmula de Viète *(III)* também se seguirá o mesmo caminho:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= a(a+c)+b(a+c)\\ &= a^2+ac+ba+bc\\ &= a^2+(ac+ba)+bc\\ &= a^2+a(c+b)+bc\end{aligned}$$

ou

$$= a^2+Sa+P.$$

4.2. IDENTIDADE DE CATALAN

Definição:

É uma relação curiosa e um tanto inesperada entre os recíprocos dos 2n primeiros inteiros positivos:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Demonstração:

Para provar isso defina:

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

Logo, escrevendo-se de outra forma e fazendo as operações necessárias chegamos a:

$$S = 1 - \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \left(2\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots. + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$
$$= \cancel{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots. + \frac{1}{2n} - \cancel{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots. + \frac{1}{2n}.$$

Portanto,

$$S = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots. + \frac{1}{2n}.$$

4.3. IDENTIDADE DE BRAMAGUPTA

Definição:

Sejam, *a, b, e* $n \in \mathbb{R}$. Então:

$$(a^2 + nb^2).(c^2 + nd^2) = (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2.$$

Isso mostra que para qualquer *n* fixo, o conjunto de todos os números na forma $x^2 + ny^2$ é fechado na multiplicação.

Demonstração:

Aplicando-se o quadrado da soma e o quadrado da diferença no lado direito da equação e depois fazendo-se agrupamento, obtemos:

$$\begin{aligned}(ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2 &= (a^2c^2 + 2abcdn + n^2b^2d^2) + n(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 \cancel{+2abcdn} + n^2b^2d^2 + na^2d^2 \cancel{-2abcdn} + nb^2c^2 \\ &= a^2c^2 + na^2d^2 + n^2b^2d^2 + nb^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + nd^2) + b^2(n^2d^2 + nc^2) \\ &= a^2(c^2 + nd^2) + nb^2(nd^2 + c^2) \\ &= (a^2 + nb^2).(c^2 + nd^2).\end{aligned}$$

4.4. IDENTIDADE DE SOPHIE-GERMAIN

Definição:

É uma técnica de fatoração em que se completa quadrados. Sejam os dois quadrados: $a^4, 4b^4 \in \mathbb{R}$, ao somá-los obtemos como resultado a seguinte igualdade:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

Demonstração:

É notório ver que:

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2.$$

Pois aplicando o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$\left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 = a^4 + 2.a^2.2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2$$

$$\left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2$$

$$a^4 + 4b^4 = a^4 \cancel{+4a^2b^2} + 4b^4 \cancel{-4a^2b^2}.$$

Ora, podemos escrever o termo $4a^2b^2$ assim: $\left(2ab\right)^2$. Desta maneira teremos:

$$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - \left(2ab\right)^2.$$

Aplicando a fórmula da diferença de dois quadrados, obtemos:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$

Ou equivalente:

$$a^4 + 4b^4 = \left[\left(a + b\right)^2 + b^2\right]\left[\left(a - b\right)^2 + b^2\right].$$

4.5. IDENTIDADE DE CAUCHY

Definição:

Sejam $a,b \in \mathbb{R}$. A identidade de Cauchy resulta da diferença entre a n-ésima potência da soma entre esses dois termos, a n-ésima potência do primeiro termo, e a n-ésima potência do segundo termo.

Para n=3, obtemos:

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a+b).$$

Para n=5, obtemos:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Demonstração:

Primeiramente, para *n=3,* aplicando-se o cubo da soma de dois termos, encontramos:

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = \cancel{a^3} + 3a^2b + 3ab^2 \cancel{+b^3} \cancel{-a^3} \cancel{-b^3}.$$

Assim,

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2.$$

Agora, isolando-se os termos semelhantes, encontra-se:

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a+b).$$

Provando assim a identidade de Cauchy para 3 termos.

Por fim*, para n=5*, aplicando-se a quinta potência da soma de dois termos demonstrada abaixo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= (a+b)^2(a+b)^2(a+b) \\
&= \left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) \\
&= \left(a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4\right)(a+b) \\
&= \left(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\right)(a+b) \\
&= \left(a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\right).$$

No lado direito da equação, obtemos:

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = \cancel{a^5} + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 \cancel{+b^5} \cancel{-a^5} \cancel{-b^5}.$$

Logo,

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4.$$

Agora, isolando-se os termos semelhantes, fazendo as devidas manipulações, e também a soma de dois cubos e ainda o agrupamento, encontra-se:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 - a^5 - b^5 &= 5ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right)\\ &= 5ab\left[a^3 + 2ab(a+b) + b^3\right]\\ &= 5ab\left[2ab(a+b) + a^3 + b^3\right]\\ &= 5ab\left[2ab(a+b) + (a+b)(a^2 - ab + b^2)\right]\\ &= 5ab\left[(a+b)(a^2 \cancel{-ab} + b^2 + \cancel{2ab})\right]\\ &= 5ab\left[(a+b)(a^2 + ab + b^2)\right].\end{aligned}$$

Provando assim a identidade de Cauchy para 5 termos.

4.6. IDENTIDADE DE LAGRANGE

Definição:

Sejam *a,b,c e d* $\in \mathbb{R}$. Então

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2.$$

Demonstração:

Distribuindo-se a multiplicação e fazendo o quadrado da soma de dois termos do lado esquerdo da equação, temos:

$$\begin{aligned}\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) - (ac + bd)^2 &= \left(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2\right) - \left(a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2\right)\\ &= \cancel{a^2c^2} + a^2d^2 + b^2c^2 \cancel{+b^2d^2} \cancel{-a^2c^2} - 2acbd \cancel{-b^2d^2}\\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd.\end{aligned}$$

Observa-se que no lado direito da equação temos o quadrado da diferença de dois termos. Logo

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)-\left(ac+bd\right)^2=\left(ad-bc\right)^2.$$

Provando-se assim, a Identidade de Lagrange.

4.7. IDENTIDADE DE PLATÃO

Definição:

Sejam $a,b\in\mathbb{R}$. Então

$$\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2.$$

Demonstração:

Aplicando-se o quadrado da diferença de dois termos e também a propriedade da potência de potência no lado direito da equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2&=\left(a^2\right)^2-2a^2b^2+\left(b^2\right)^2+4a^2b^2\\&=\left(a^2\right)^2+2a^2b^2+\left(b^2\right)^2.\end{aligned}$$

Percebe-se a identidade do quadrado da soma de dois termos no lado direito da equação, assim:

$$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(2ab\right)^2=\left(a^2+b^2\right)^2.$$

Provando, por fim, a Identidade de Platão.

4.8. PRODUTO DE STEVIN

Definição:

É o produto de qualquer número de binômios do 1º grau, da forma *(x + a)*, onde *a* é um número real ou complexo.

Para dois binômios, teremos:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

Para três binômios, teremos:

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

Demonstração:

Obtemos as fórmulas acima, simplesmente multiplicando os binômios, vejamos:

No primeiro caso, temos a multiplicação de dois binômios. Assim, aplicando-se a distributiva, temos:

$$(x+a)(x+b)=x.x+x.b+a.x+a.b.$$

Logo, utilizando-se o agrupamento, encontra-se:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

No segundo caso, temos a multiplicação de três binômios. Com isso, aplicando-se a distributiva, temos:

$$(x+a)(x+b)(x+c)=\left[x^2+(a+b)x+ab\right].(x+c)$$
$$=x^2.x+x^2.c+(a+b)x.x+(a+b)x.c+ab.x+abc.$$

Assim, utilizando-se o agrupamento, encontra-se:

$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

4.9. UMA IDENTIDADE ESPECIAL

Definição:

Sejam a,b e $c \in \mathbb{R}$. Então:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Demonstração:

Será demonstrada de duas formas:

1° Forma (Algébrica):

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc \\
&= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc \\
&= (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b)-3abc \\
&= (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(a+b)c-3ab\right] \\
&= (a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3ac-3bc-3ab\right] \\
&= (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab\right).
\end{aligned}$$

2° Forma (Usando determinante):

Pelo teorema de Jacobi, um determinante não se altera se substituímos uma linha com sua soma por duas outras. Então:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b+c) & (a+b+c) & (a+b+c) \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Logo, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right).$

Note que esta identidade também pode ser escrita como:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

CAPÍTULO 5: APLICAÇÕES

Aplicação 1. Gomes, (2010).

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.3. A diferença de dois quadrados, 3.2.2.4. Diferença de dois cubos e a 3.2.2.5. Cubo da soma de três termos.*

a) Se $a+b+c=0$ mostre que $a^3+b^3+c^3=3abc.$

Da equação: $a+b+c=0,$ tem-se:

$$\begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a. \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula para o cubo da soma de três termos, obtemos:

$$(a+b+c)^3=0$$
$$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)=0.$$

Substituindo $\begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$ na equação acima, teremos:

$$a^3+b^3+c^3+3(-c)(-b)(-a)=0$$
$$;$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Assim, conclui-se que $a^3+b^3+c^3=3abc.$

b) Qual o valor de $\dfrac{4011^3-2006^3-2005^3}{(4011).(2006).(2005)}$?

Faça *a=2006 e b=2005*, então: *a+b=4011*. Substituindo fica:

$$\frac{(a+b)^3-a^3-b^3}{(a+b).a.b}=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-a^3-b^3}{(a+b).a.b}=\frac{3\,ab\cancel{(a+b)}}{ab\cancel{(a+b)}}=3.$$

Portanto, o valor da expressão dada é 3.

Aplicação 2. Se $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$, determine $x-\frac{1}{x}$. Gomes, (2010).

Foi utilizada a identidade *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos.*

Solução:

Elevando os dois lados da equação $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ ao quadrado, tem-se:

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=3^2$, aplicando o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$x+2+\frac{1}{x}=9$$
$$x+\frac{1}{x}=7.$$

E novamente elevando ao quadrado os dois lados da equação e aplicando o quadrado da soma de dois termos do lado esquerdo, obtemos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=7^2$$
$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=49$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=47.\,(I)$$

Por fim, se chamarmos a equação $x-\frac{1}{x}$ de *p* e elevarmos ambos os lados da equação ao quadrado e aplicarmos o quadrado da diferença de dois termos, encontramos:

$$p=x-\frac{1}{x}$$
$$p^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$$
$$p^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2.$$

Substituindo a equação *(I)* encontrada anteriormente nessa equação de p^2 teremos:

$$p^2 = 47 - 2$$
$$p^2 = 45$$
$$p = \sqrt{45}$$
$$p = 3\sqrt{5}.$$

Logo, $x - \dfrac{1}{x} = 3\sqrt{5}$.

Aplicação 3. Sabendo que $a + b = 6$, encontre o valor de: Gomes, (2010).

$$\frac{a^{32} - b^{32}}{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)\left(a^8 + b^8\right)\left(a^{16} + b^{16}\right)} + 12b.$$

Foi utilizada a identidade *3.2.1.3. A diferença de quadrados.*

Solução:

Aplicando-se a diferença de quadrados no numerador sucessivamente, teremos:

$$= \frac{\cancel{\left(a^{16} + b^{16}\right)}\left(a^{16} - b^{16}\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)\left(a^8 + b^8\right)\cancel{\left(a^{16} + b^{16}\right)}} + 12b$$

$$= \frac{\left(a^{16} - b^{16}\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)\left(a^8 + b^8\right)} + 12b$$

$$= \frac{\cancel{\left(a^8 + b^8\right)}\left(a^8 - b^8\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)\cancel{\left(a^8 + b^8\right)}} + 12b$$

$$= \frac{\left(a^8 - b^8\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)} + 12b$$

$$= \frac{\cancel{\left(a^4 + b^4\right)}\left(a^4 - b^4\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\cancel{\left(a^4 + b^4\right)}} + 12b$$

$$= \frac{\left(a^4 - b^4\right)}{\left(a^2 + b^2\right)} + 12b$$

$$=\frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}\left(a^2-b^2\right)}{\cancel{\left(a^2+b^2\right)}}+12b$$

$$=\left(a^2-b^2\right)+12b$$

$$=(a+b)(a-b)+12b.$$

Substituindo-se o valor de $a+b=6$, encontramos:

$$=6(a-b)+12b$$

$$=6a-6b+12b$$

$$=6a+6b.$$

Por fim, novamente substituindo o valor de $a+b=6$ chegamos ao resultado:

$$=6(a+b)$$

$$=6.6=36.$$

Aplicação 4. Determinando o valor de $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$ obtemos: Vasconcelos, (2016).

a) 1

b) $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

c) 2

d) $2\sqrt{2}$

e) $3\sqrt{2}$

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Chamando essa equação de *p*, elevando ambos os lados ao quadrado e aplicando o quadrado da diferença de dois termos, tem-se:

$$p=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

$$p^2=\left(\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt[4]{8}\cancel{+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-2.\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}+\sqrt[4]{8}\cancel{-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

Fazendo a diferença de dois quadrados dentro da raiz, tem-se:

$$=\frac{2.\sqrt[4]{8}-2.\sqrt{\sqrt{8}-\left(\sqrt{2}-1\right)}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{2.\sqrt[4]{8}-2.\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

$$=\frac{2.\cancel{\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)}}{\cancel{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}$$

$$=2.$$

Portanto, $p^2=2$, logo, $p=\sqrt{2}.$

Aplicação 5. O valor da expressão $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ é:

Vasconcelos, (2016).

a) 1

b) 9

c) 99

d)100

e)109

Foi utilizada a identidade *3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Fazendo a racionalização pela identidade diferença de dois quadrados em cada uma das frações dessa expressão obteremos como resultado denominadores igual a um e numeradores com a segunda raiz menos a primeira, veja:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}{2-1}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}{1}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\cdot\frac{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}{4-3}=\frac{\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)}{1}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\cdot\frac{\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}{\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}=\frac{\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}{100-99}=\frac{\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}{1}=\sqrt{100}-\sqrt{99}.$$

Portanto, a expressão do enunciado fica assim:

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{100}-\sqrt{99}.$$

Separando as raízes positivas das negativas, temos:

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{100}\right)-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{99}\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)-\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}...+\sqrt{99}\right).$$

Chamando $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}...+\sqrt{99}\right)$ de x, também temos:

$$=\left(x+\sqrt{100}\right)-\left(\sqrt{1}+x\right)$$
$$=\cancel{x}+\sqrt{100}-\sqrt{1}\cancel{-x}$$
$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}$$
$$=10-1=9.$$

Portanto, o valor da expressão é 9.

Aplicação 6. Seja $x=\frac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$. O valor de $(x+1)^{48}$ é igual a: Santos, (2006).

a) 5

b) 25

c) 125

d) 625

e) 125

Foi utilizada a identidade *3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Primeiramente, deve-se notar que $4=\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$. Assim,

$$x=\frac{\cancel{\left(\sqrt{5}+1\right)}\left(\sqrt{5}-1\right)}{\cancel{\left(\sqrt{5}+1\right)}\left(\sqrt[4]{5}+1\right)\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{5}+1\right)\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}.$$

Pela diferença de dois quadrados, o fator racionalizante será $\left(\sqrt[4]{5}-1\right)$, pois $\left(\sqrt[4]{5}-1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)=\left(\sqrt{5}-1\right)$. Logo,

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{5}+1\right)\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)\cancel{\left(\sqrt{5}-1\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{5}-1\right)}\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}.$$

Agora, o fator racionalizante será $\left(\sqrt[8]{5}-1\right)$, pois $\left(\sqrt[8]{5}-1\right)\left(\sqrt[8]{5}+1\right)=\left(\sqrt[4]{5}-1\right)$. Assim,

$$=\frac{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[8]{5}+1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)\cancel{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}}{\cancel{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)}\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}.$$

Por fim, o fator racionalizante será $\left(\sqrt[16]{5}-1\right)$, pois $\left(\sqrt[16]{5}-1\right)\left(\sqrt[16]{5}+1\right)=\left(\sqrt[8]{5}-1\right)$. Dessa forma,

$$=\frac{\left(\sqrt[16]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[16]{5}-1\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}{\left(\sqrt[16]{5}+1\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[16]{5}-1\right)\cancel{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}}{\cancel{\left(\sqrt[8]{5}-1\right)}}$$

$$=\sqrt[16]{5}-1.$$

Chegamos então ao resultado:

$$\left(x+1\right)^{48}=\left(\sqrt[16]{5}\cancel{-1}\cancel{+1}\right)^{48}$$

$$=\left(\sqrt[16]{5}\right)^{48}$$

$$=5^{3}=125.$$

Aplicação 7. A soma $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{9.10}$ é igual a:

a) $\boldsymbol{\frac{9}{10}}$

b) $\frac{8}{10}$

c) $\frac{7}{10}$

d) $\frac{6}{10}$

e) $\frac{5}{10}$

Foi utilizada a identidade *3.3.4.* $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$.

Solução:

Aplicando a identidade $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$ na expressão do enunciado temos:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{9.10} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}.$$

E agora fazendo a soma dos simétricos obtemos:

$$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{10}.$$

Conclui-se que: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{9.10} = \frac{9}{10}$.

Aplicação 8. Transforme $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ numa diferença de radicais simples. Silva (2017)

Foi utilizada a identidade *3.2.2.2. Cubo da diferença de dois termos.*

Solução:

As expressões do tipo $\sqrt[3]{a \pm c\sqrt{b}}$ poderão ser transformadas usando a relação de radical duplo: $\sqrt[3]{a \pm c\sqrt{b}} = x \pm \sqrt{y}$.

Assim sendo, $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = x - \sqrt{y}$, elevando ao cubo ambos os membros, e aplicando o cubo da diferença de dois termos no lado direito da equação, temos:

$$26 - 15\sqrt{3} = x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3x\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^3$$
$$= x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y}$$
$$= \left(x^3 + 3xy\right) - \left(3x^2 + y\right)\sqrt{y}.$$

Por identidade de polinômios obtemos:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy = 26 \\ 3x^2 + y = 15 \\ \sqrt{y} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Observa-se que na 3ª equação que $y=3$.

Aplicando o valor 3 na 2ª equação encontramos, $x = \pm 2,$ entretanto apenas x=2 satisfaz a 1ª equação.

Portanto, $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

Aplicação 9. Sejam x,y,z números reais, todos diferentes de zero, de tal forma que $x + y + z = 0$. Explicar o por que $xy + xz + yz \neq 0$ e, então calcular todos os valores possiveis da expressão $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}.$ Muniz, (2017).

Foi utilizada a identidade algébrica *3.2.1.4. Quadrado da soma de três termos.*

Solução:

Se elevarmos ao quadrado ambos os lados da equação $x + y + z = 0$, temos:

$$(x + y + z)^2 = 0^2.$$

Aplicando-se o quadrado da soma de três termos obtém-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz).$$

Assim, se $xy + xz + yz = 0,$ então:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \text{ logo, } x=0, y=0 \text{ e } z=0.$$

Isso é uma contradição a hipótese, assim sendo, substituindo $x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz)$ na expressão $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$ encontraremos o valor possível para essa expressão que será: $\dfrac{-2\cancel{(xy + xz + yz)}}{\cancel{xy + yz + zx}} = -2.$

Aplicação 10. (Canadá) Para cada número natural *n*, prove que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ nunca é um quadrado perfeito. Fonte: Muniz, (2017).

Foi utilizada a identidade algébrica *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos.*

Solução:

Chamando essa equação de *p*, temos:

$$p=n(n+1)(n+2)(n+3).$$

O que é equivalente a

$$p=n(n+3)\left[(n+1)(n+2)\right].$$

Aplicando a distributiva, também temos:

$$p=\left(n^2+3n\right)\left[\left(n^2+2n+n+2\right)\right]$$

$$p=\left(n^2+3n\right)\left[\left(n^2+3n\right)+2\right]$$

$$p=\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right).$$

Isto é,

$$p=\left[\left(n^2+3n\right)^2+2\left(n^2+3n\right)+1\right]-1.$$

Aplicando-se o quadrado da soma de dois termos, toda a expressão dentro do colchete é igual a: $\left[\left(n^2+3n\right)+1\right]^2$.

Logo, a equação fica assim:

$$p=\left[\left(n^2+3n\right)+1\right]^2-1.$$

Definindo-se

$$n^2+3n+1=m.$$

Nota-se que $m>1$, já que $n\in\mathbb{N}$.

Portanto,

$$p=m^2-1.$$

Mas se observarmos:

$$p=m^2-1<m^2.$$

$$p = m^2 - 1 > m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Essas desigualdades são verdadeiras para $m>1$.

Como p situa-se entre os quadrados perfeitos consecutivos $(m-1)^2$ e m^2 então não poderá ser um quadrado perfeito.

Aplicação 11. (Áustria) Sejam a e b números racionais positivos, tais que $\sqrt{ab}$ é irracional. Mostre que a diferença $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ também é irracional. Muniz, (2017).

Foi utilizada a identidade algébrica *3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos.*

Solução:

Supondo que $r = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ é um número racional, então: $r^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$ que é o mesmo que $r^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ também seria um número racional. No entanto, reescrevendo essa equação, tem-se:

$$\sqrt{ab} = \frac{-r^2 + a + b}{2}.$$

Então $\sqrt{ab}$ seria racional, pois tanto o numerador quanto o denominador do lado direito da equação são racionais. Mas isso é uma contradição a hipótese de que $\sqrt{ab}$ é irracional, logo, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ também é irracional.

Aplicação 12. (Polônia) Para dados a e b positivos, prove que $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3$. Muniz, (2017).

Foram utilizadas as indentidades *3.2.1.3. A diferença de dois quadrados* e a *3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos.*

Solução:

Expandindo-se o lado direito da desigualdade com o auxílio do cubo da soma de dois termos, é imediato ver que $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

Logo, substituindo na desigualdade, temos:

$$4\left(a^3 + b^3\right) \geq a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2.$$

Aplicando-se a distributiva da multiplicação em relação a adição, tem-se:

$$4a^3 + 4b^3 \geq a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$
$$4a^3 + 4b^3 - a^3 - b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2$$
$$3a^3 + 3b^3 \geq 3a^2b + 3ab^2.$$

Dividindo-se ambos os lados da desigualdade por três, encontrar-se-á uma desigualdade equivalente a desigualdade inicial que queremos provar:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2.$$

Agora é suficiente ver que:

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = a^2(a-b) - b^2(a-b) = \left(a^2 - b^2\right)(a-b).$$

Aplicando a diferença de dois quadrados:

$$\left(a^2 - b^2\right)(a-b) = (a+b)(a-b)(a-b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Para $(a+b) \geq 0$ e $(a-b)^2 \geq 0.$

Aplicação 13. (União Sovietica) Sejam *a, b e c* números pares distinguidos reais. Mostre que $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$ são todos diferentes de zero. Muniz, (2017).

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.3. A diferença de dois quadrados e a 4.1. Fórmula de Viète.*

Solução:

Chamando de *S* a equação $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$ tem-se:

$$S = a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a).$$

Aplicando a distributiva e algumas manipulações, obtemos:

$$= a^2(c-b) + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a$$
$$= a^2(c-b) + \left(b^2a - c^2a\right) + \left(c^2b - b^2c\right).$$

Agora, colocando em evidência os termos semelhantes:

$$= a^2(c-b) + a\left(b^2 - c^2\right) + bc(c-b).$$

Aplicando a diferença de dois quadrados:

$$= a^2(c-b) + a(b+c)(b-c) + bc(c-b)$$
$$= a^2(c-b) - a(b+c)(c-b) + bc(c-b).$$

Colocando em evidencia o termo *(c - b)*, teremos:

$$= (c-b)\left[a^2 - a(b+c) + bc\right].$$

Por fim, observe que podemos aplicar a fórmula de Viète no trinômio de segundo grau em *a* dentro do colchete, $\left[a^2 - a(b+c) + bc\right] = (a-b)(a-c)$. Logo,

$$S = (c-b)(a-b)(a-c).$$

Agora, como *a, b e c* são números pares distinguidos reais, ou seja, $a \neq b, b \neq c, c \neq a,$ segue que $(a-b) \neq 0, (c-b) \neq 0 \; e \; (a-c) \neq 0.$ Portanto, $S \neq 0$.

Aplicação 14. Para todos *a, b e c* $\in \mathbb{R}$, nós temos:
$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$. Muniz, (2017).

Foram utilizadas as identidades *3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos e 4.1. Fórmula de Viète.*

Solução:

Aplicando o cubo da soma de dois termos duas vezes no lado esquerdo da equação, obter-se-á:

$$\left[(a+b)+c\right]^3 = (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)c\left[(a+b)+c\right]$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + c^3 + 3(a+b)\left[(a+b)c + c^2\right]$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3(a+b)\left[(a+b)c + c^2\right].$$

Colocando em evidência o termo $3(a+b)$ teremos:

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)\left[ab + (a+b)c + c^2\right].$$

Observe o trinômio do segundo grau em *c* dentro do colchete, aplicando a fórmula de Viète, $\left[ab+(a+b)c+c^2\right] = (b+c)(a+c)$. Ficará assim:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c).$$

Aplicação 15. (Harvard) Simplifique $\sqrt[2003]{2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}}.\sqrt[4006]{89+12\sqrt{55}}.$ Gomes, (2010).

Utilizou-se as identidades *3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos e a 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Chamando essa equação de *x*, temos:

$$x = \sqrt[2003]{2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}}.\sqrt[4006]{89+12\sqrt{55}}.$$

Deve-se notar que $89+12\sqrt{55} = \left(2\sqrt{11}+3\sqrt{5}\right)^2$.

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[2003]{2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}}.\sqrt[4006]{\left(2\sqrt{11}+3\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \sqrt[2003]{2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}}.\sqrt[2003]{2\sqrt{11}+3\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[2003]{\left(2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}\right).\left(2\sqrt{11}+3\sqrt{5}\right)}. \end{aligned}$$

Por fim, fazendo a diferença de dois quadrados, temos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[2003]{(4.11-9.5)} \\ &= \sqrt[2003]{44-45} \\ &= \sqrt[2003]{-1}. \end{aligned}$$

Portanto*, x= -1.*

Aplicação 16. (Harvard) Mostre que $-1-\sqrt[3]{6}$ é uma raiz da equação $x^3+3x^2+3x+7=0$. Gomes, (2010).

Foi utilizada a identidade *3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos.*

Solução:

Pode-se ver esta equação da seguinte forma:

$$\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+6=0.$$

É notório o cubo da soma de dois termos dentro dos parênteses, então:

$$(x+1)^3+6=0$$
$$(x+1)^3=-6.$$

Aplicando a raiz cúbica em ambos os lados da equação, temos:

$$(x+1)=\sqrt[3]{-6}$$
$$(x+1)=-\sqrt[3]{6}.$$

Portanto, $x=-1-\sqrt[3]{6}.$

Aplicação 17. (Romênia) Sejam *x, y, z*, números reais distintos. Prove que:

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0.$$

Foi utilizada a identidade *4.9 Uma identidade especial.*

Solução:

A solução é baseada na identidade:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Vamos assumir o contrário e definir $\sqrt[3]{x-y}=a, \sqrt[3]{y-z}=b, \sqrt[3]{z-x}=c.$ Por suposição, $a+b+c=0$, e assim $a^3+b^3+c^3=3abc.$ Mas, isso implica que:

$$0=(x-y)+(y-z)+(z-x)=3\sqrt[3]{x-y}\sqrt[3]{y-z}\sqrt[3]{z-x}\neq 0,$$

desde que os números são distintos. A contradição que chegamos prova que nossa suposição é falsa e, portanto, a soma é diferente de zero.

Aplicação 18. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0.$

Foi utilizada a identidade *4.9 Uma identidade especial.*

Solução:

Usando a identidade $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$

Faça $a=\sqrt[3]{x-1}, b=\sqrt[3]{x}, c=\sqrt[3]{x+1}.$

Então como $a+b+c=0$ temos que

$$\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3=3.\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+1}$$

$$x-1+x+x+1=3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)x}$$

$$x=\sqrt[3]{x^3-x}$$

$$x^3=x^3-x$$

$$x=0.$$

Portanto, $S=\{0\}.$

Aplicação 19. Racionalize:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}.$$

Foi utilizada a *3.2.2.4. Diferença de dois cubos e 4.9 Uma identidade especial.*

Solução:

Primeiramente, usaremos a identidade especial:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right).$$

Façamos: $a=\sqrt[3]{2}, b=\sqrt[3]{3}$ e $c=\sqrt[3]{5}.$

Como já temos a soma $(a+b+c)=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}\right)$ no denominador, o fator racionalizante será: $\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)$.

Portanto, a fração dada fica assim:

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)}{2+3+5-3\sqrt[3]{30}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)}{10-3\sqrt[3]{30}}.$$

Agora, utilizaremos a identidade da diferença de dois cubos:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Façamos: $a=10$ e $b=3\sqrt[3]{30}$.

Como já temos a diferença $(a-b)=\left(10-3\sqrt[3]{30}\right)$ no denominador, o fator racionalizante será: $\left(a^2+ab+b^2\right)=\left(100+30\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900}\right)$. Assim, a fração dada também é igual a:

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)}{\left(10-3\sqrt[3]{30}\right)}\cdot\frac{\left(100+30\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900}\right)}{\left(100+30\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900}\right)}.$$

Por fim, fazendo-se:

$m=\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{15}\right)$ e $n=\left(100+30\sqrt[3]{30}+9\sqrt[3]{900}\right)$, teremos:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}=\frac{m.n}{1000-810}=\frac{m.n}{190}.$$

Aplicação 20. Sejam *m e n* inteiros positivos distintos. Represente m^6+n^6 como uma soma de dois quadrados perfeitos diferentes de m^6 e n^6.

Foi utilizada *a 3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos, 3.2.2.3. Soma de dois cubos e 4.6. Identidade de Lagrange.*

Solução:

Sabe-se que pela propriedade de potência de potência podemos escrever essa soma assim:

$$m^6+n^6=\left(m^2\right)^3+\left(n^2\right)^3.$$

Aplicando a soma de dois cubos no lado direito da equação, teremos:

$$=\left(m^2+n^2\right)\left(m^4-m^2n^2+n^4\right).$$

Que também pode ser escrito dessa forma utilizando o quadrado da diferença de dois termos:

$$m^6+n^6=\left(m^2+n^2\right)\left[\left(n^2-m^2\right)^2+(mn)^2\right].$$

Agora, utilizando a identidade de Lagrange:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Fazendo $a=m$, $b=n$, $c=n^2-m^2$ e $d=mn$. O lado direito da equação fica assim:

$$\left(m^2+n^2\right)\left[\left(n^2-m^2\right)^2+(mn)^2\right]=\left[m\left(n^2-m^2\right)+n(mn)\right]^2+\left[m(mn)-n\left(n^2-m^2\right)\right]^2$$

$$=\left(mn^2-m^3+mn^2\right)^2+\left(m^2n-n^3+nm^2\right)^2.$$

$$=\left(2mn^2-m^3\right)^2+\left(2m^2n-n^3\right)^2.$$

Logo, $m^6+n^6=\left(2mn^2-m^3\right)^2+\left(2m^2n-n^3\right)^2.$

Aplicação 21. Seja $n\in\mathbb{N}$. Prove que n^4+4^n é primo se, e somente se, $n=1$.

Foi utilizada a identidade: *4.4 Identidade de Sophie-Germain.*

Solução:

$(\Leftarrow)$ Se $n=1$, então $n^4+4^n=1^4+4^1=5.$

Logo, n^4+4^n é primo.

$(\Rightarrow)$ Se n^4+4^n é primo, então n não pode ser par pois neste caso $n^4+4^n\neq 2$ seria divisível por 2. Então n é ímpar. Tomando-se $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, temos:

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2k+1}$$
$$= n^4 + 4\left(2^k\right)^4.$$

Em que segundo a identidade de Sophie-Germain será:

$$= \left(n^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}.n\right)\left(n^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}.n\right).$$

>1 $=1$

Assim, deve ocorrer:

$$= n^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}.n = 1$$
$$\Rightarrow \left(n - 2^k\right)^2 + \left(2^k\right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow k = 0$$
$$\Rightarrow n = 1.$$

Aplicação 22. (AIME) Simplifique: Gomes, (2010).

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right).$$

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos e a 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Observe que podemos arrumar a equação exposta no enunciado assim:

$$= \left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{7}\right]\left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{7}\right]\left[\sqrt{7}+\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right]\left[\sqrt{7}-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\right].$$

Aplicando a diferença de dois quadrados, teremos:

$$= \left[\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)^2\right].$$

Aplicando o quadrado da soma de dois termos e depois fazendo a diferença de dois quadrados, teremos:

$$= \left[5+2\sqrt{30}+6-7\right]\left[7-5+2\sqrt{30}-6\right]$$
$$= \left[2\sqrt{30}+4\right]\left[2\sqrt{30}-4\right]$$
$$= 120-16$$
$$= 104.$$

Portanto, o valor da expressão dada é 104.

Aplicação 23. (CN-08) O valor de $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número: Santos, (2006).

a) múltiplo de onze.

b) múltiplo de sete.

c) múltiplo de cinco.

d) múltiplo de três.

e) primo.

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos e 3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos.*

Solução:

Basta notar que, $3+2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ e $5\sqrt{2}+7=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$, pelo quadrado da soma de dois termos e pelo cubo da soma de dois termos, temos:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$$
$$\left(\sqrt{2}+1\right)^3=2\sqrt{2}+3.2.1+3.\sqrt{2}+1=7+5\sqrt{2}.$$

Então o valor da equação procurada é:

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right]^{2008}}{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^3\right]^{1338}}+3-2\sqrt{2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4016}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{4014}}+3-2\sqrt{2}$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^{4016-4014}+3-2\sqrt{2}$$
$$=\left(\sqrt{2}+1\right)^2+3-2\sqrt{2}.$$

Aplicando o quadrado da soma de dois termos, encontramos como resultado:

$$=2\cancel{+2\sqrt{2}}+1+3\cancel{-2\sqrt{2}}=6.$$

Portanto, o valor da expressão é um múltiplo de 3.

Aplicação 24. (OBMEP 2015- FASE 1- NÍVEL 3) A soma de dois números é *3* e a soma de seus cubos é *25*. Qual é a soma de seus quadrados?

a) $\mathbf{\frac{77}{9}}$

b) $\frac{99}{7}$

c) 7

d) 9

e) $\frac{7}{9}$

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos e 3.2.2.1. Cubo da soma de dois termos.*

Solução:

Sejam *x e y* os dois números. Vamos usar as conhecidas identidades do quadrado da soma de dois termos $(x+y)^2$ e do cubo da soma de dois termos $(x+y)^3$ para encontrar uma identidade para a soma dos quadrados x^2+y^2:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Do quadrado da soma de dois termos podemos encontrar:

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy.$$

E do cubo da soma de dois termos temos:

$$3x^2y+3xy^2 = (x+y)^3 - (x^3+y^3).$$

Evidenciando o produto *3xy* no lado esquerdo da identidade acima, resulta que:

$$3xy(x+y) = (x+y)^3 - (x^3+y^3).$$

E isolando o produto *xy*, temos:

$$xy = \frac{(x+y)^3 - (x^3+y^3)}{3(x+y)}.$$

Substituindo esse produto na identidade da soma dos quadrados temos

$$x^2+y^2=(x+y)^2-\frac{2}{3}\frac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{(x+y)}.$$

Agora, como $x+y=3$ e $x^3+y^3=25$, concluímos que:

$$=(3)^2-\frac{2}{3}.\left[\frac{(3)^3-(25)}{(3)}\right]$$
$$=9-\frac{2}{3}.\left(\frac{27-25}{3}\right)$$
$$=9-\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$$
$$=\frac{81-4}{9}$$
$$x^2+y^2=\frac{77}{9}.$$

Aplicação 25. (OBMEP 2009- FASE 1- NÍVEL 2) Na expressão $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{29}{30}$ as letras *a, b, c e d* representam números inteiros de *1 a 9*. Qual é o valor de *a*+*b*+*c*+*d*?

a) 14

b) 16

c) 19

d) 21

e) 23

Foi utilizada a identidade *3.3.1* $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{b+a}{ba}$.

Solução:

Temos $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{29}{30}$. Como a fração $\frac{29}{30}$ é irredutível, segue que *bd* é um múltiplo de *30*. Por outro lado, o único múltiplo de *30* que é o produto de dois fatores entre *1 e 9* é o próprio *30*, que é igual a *5x6*. Podemos então supor que *b=5 e d=6*; voltando a expressão, obtemos *6a+5b=29*. A única solução desta equação em inteiros entre *1 e 9* é *a=4 e b=1*, e temos *a+b+c+d=4+5+1+6= 16*.

Aplicação 26. (IME-2016-2017-1° Fase) Sejam *x,y e z* números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2=25 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

O valor da soma $x^3+y^3+z^3$ é:

a) 210

b) 235

c) 250

d) 320

e) 325

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.4. Quadrado da soma de três termos, 3.2.2.3. Soma de dois cubos.*

Solução:

Serão enumeradas as equações:

$$\begin{cases} x+y+z=7\,(I) \\ x^2+y^2+z^2=25\,(II) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}.\ (III) \end{cases}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados da equação *(I)* e aplicando-se o quadrado da soma de três termos, temos:

$$x+y+z=7$$
$$(x+y+z)^2=7^2$$
$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=49.$$

Sabendo que $x^2+y^2+z^2=25$, faz-se as seguintes operações chegando a:

$$25+2(xy+xz+yz)=49$$
$$(xy+xz+yz)=\frac{24}{2}$$
$$xy+xz+yz=12.$$

Trabalhando-se com a equação *(III)* tem-se:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{4}.$$

Sabendo que $xy+xz+yz=12.$ Chegamos a:

$$\frac{12}{xyz}=\frac{1}{4}$$

$$xyz=48.$$

Agora, utilizando-se a identidade da soma de dois cubos:

$$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right).$$

Isola-se nas equações *(I) e (II)* os termos *x e y*, e substitui na equação acima:

$$\begin{aligned}
&(I):\ x+y=7-z\\
&(II):\ x^2+y^2=25-z^2\\
&x^3+y^3=(7-z)\left(25-z^2-xy\right)\\
&\qquad\quad =175-7z^2-7xy-25z+z^3+xyz\\
&x^3+y^3-z^3=175-7z^2-7xy-25z+48\\
&\qquad\qquad\quad =175-7z^2-7xy-25z+48\\
&\qquad\qquad\quad =223-7z^2-7xy-25z.\ (IV)
\end{aligned}$$

De modo análogo:

$$\begin{aligned}
&x^3+z^3-y^3=223-7y^2-7xz-25y\ (V)\\
&y^3+z^3-x^3=223-7x^2-7yz-25x.\ (VI)
\end{aligned}$$

Por fim, somando-se as equações *(IV), (V) e (VI),* chegamos a:

$$\begin{cases}
x^3+y^3-z^3=223-7z^2-7xy-25z\\
x^3+z^3-y^3=223-7y^2-7xz-25y\\
y^3+z^3-x^3=223-7x^2-7yz-25x
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3&=669-7\left(x^2+y^2+z^2\right)-7(xy+yz+xz)-25(x+y+z)\\
&=669-7.25-7.12-25.7\\
&=669-175-84-175\\
&=235.
\end{aligned}$$

Portanto, $x^3+y^3+z^3=235.$

Aplicação 27. (IME 2015-2° fase) Encontre as soluções reais da equação:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}=\sqrt{x+3}$$

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos, 3.2.1.2. Quadrado da diferença de dois termos e a 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado e aplicando o quadrado da soma de dois termos no lado esquerda da equação, encontramos:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{4x-4}}+\sqrt{x-\sqrt{4x-4}}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}\right)^2$$

$$x\cancel{+\sqrt{4x-4}}+2\left(\sqrt{\left(x+\sqrt{4x-4}\right)\left(x-\sqrt{4x-4}\right)}\right)+x\cancel{-\sqrt{4x-4}}=x+3.$$

Fazendo as devidas operações e a diferença de dois quadrados dentro da raiz, obtemos:

$$x+2\left(\sqrt{x^2-(4x-4)}\right)=3$$

$$2\sqrt{x^2-4x+4}=3-x.$$

Agora, elevando novamente ambos os lados da equação ao quadrado e fazendo o quadrado da diferença de dois termos no lado direito da equação, chegamos a:

$$\left(2\sqrt{x^2-4x+4}\right)^2=(3-x)^2$$

$$4\left(x^2-4x+4\right)=9-6x+x^2$$

$$4x^2-16x+16=9-6x+x^2$$

$$3x^2-10x+7=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{7}{3}.$$

Portanto, a solução é: $S=\left\{1,\frac{7}{3}\right\}$.

Aplicação 28. (CN- 2003) Se $a=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ *e* $b=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então *a+b* é igual a:

a) $\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}+2$

d)4

e) $\boldsymbol{\sqrt{5}+1}$

Foram utilizadas as identidades *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos, 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados.*

Solução:

Fazendo *a+b=x*, temos:

$$x=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, e aplicando o quadrado da soma de dois termos, temos:

$$x^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2$$
$$=\left[\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)+2\sqrt{\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}+\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\right].$$

Agora, realizando as devidas operações e aplicando a diferença de dois quadrados dentro da raiz, obtemos:

$$=4\cancel{-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}+4\cancel{+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$
$$=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}.$$

Observe que $6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$, logo, temos que:

$$x^2=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}.$$

Fazendo as devidas operações chegamos a:

$$= 8 + 2\sqrt[\cancel{2}]{\left(\sqrt{5} - 1\right)^{\cancel{2}}}$$
$$= 8 + 2\left(\sqrt{5} - 1\right)$$
$$= 6 + 2\sqrt{5}.$$

Da mesma forma, $6 + 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5} + 1\right)^2$. Então, operando com raízes quadradas de ambos os lados da equação, encontramos que:

$$x^2 = \left(\sqrt{5} + 1\right)^2$$
$$\sqrt[\cancel{2}]{x^{\cancel{2}}} = \sqrt[\cancel{2}]{\left(\sqrt{5} - 1\right)^{\cancel{2}}}$$
$$x = \sqrt{5} + 1.$$

Aplicação 29. (AIME-87) Calcule:

$$\frac{\left(10^4 + 324\right)\left(22^4 + 324\right)\left(34^4 + 324\right)\left(46^4 + 324\right)\left(58^4 + 324\right)}{\left(4^4 + 324\right)\left(16^4 + 324\right)\left(28^4 + 324\right)\left(40^4 + 324\right)\left(52^4 + 324\right)}.$$

Foi utilizada a *3.2.1.1. Quadrado da soma de dois termos, 3.2.1.3. A diferença de dois quadrados e 4.4 Identidade de Sophie-Germain.*

Solução:

Como $324 = 4.3^4$ todos os fatores da expressão acima podem ser escritos na forma $x^4 + 4y^4$, que segundo a identidade de Sophie-Germain será igual a:

$$x^4 + 4y^4 = \left[\left(x - y\right)^2 + y^2\right]\left[\left(x + y\right)^2 + y^2\right].$$

Assim, $x^4 + 324 = x^4 + 4.3^4 = \left[\left(x - 3\right)^2 + 9\right]\left[\left(x + 3\right)^2 + 9\right].$

Fazendo essa substituição em cada termo da fração

$$\frac{\left(10^4 + 324\right)\left(22^4 + 324\right)\left(34^4 + 324\right)\left(46^4 + 324\right)\left(58^4 + 324\right)}{\left(4^4 + 324\right)\left(16^4 + 324\right)\left(28^4 + 324\right)\left(40^4 + 324\right)\left(52^4 + 324\right)}.$$

Obtemos:

$$=\frac{\left[(10-3)^2+9\right]\left[(10+3)^2+9\right]\left[(22-3)^2+9\right]\ldots\left[(58-3)^2+9\right]\left[(58+3)^2+9\right]}{\left[(4-3)^2+9\right]\left[(4+3)^2+9\right]\left[(16-3)^2+9\right]\ldots\left[(52-3)^2+9\right]\left[(52+3)^2+9\right]}=$$

$$=\frac{(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)(25^2+9)\ldots(55^2+9)(61^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)(13^2+9)(19^2+9)\ldots(49^2+9)(55^2+9)}=$$

$$=\frac{61^2+9}{1^2+9}=\frac{3730}{10}=373.$$

Aplicação 30. (IMO-1979) Sejam *m e n* números inteiros positivos tais que:

$$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Prove que m é divisível por 1979.

Foi utilizada a *4.2. Identidade de Catalan.*

Solução:

Pela Identidade de Catalan:

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)+\frac{1}{1319}$$

$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$=\frac{1979}{660.1319}+\frac{1979}{661.1318}+\ldots+\frac{1979}{989.990}.$$

Adicionando os termos na última soma, descobrimos que:

$$\frac{m}{n}=\frac{1979.k}{660.661.\ \ldots\ .1318.1319}$$

para algum inteiro k (muito grande).

Como 1979 é um número primo e todos os fatores do denominador são menores que ele, concluímos que m é divisível por 1979.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi possível contemplar os aspectos históricos, algumas definições e demonstrações matemáticas para as identidades algébricas presentes e aplicações com questões de instrumentos de avaliação nacionais e internacionais, que continham grande parte delas, sendo que todas foram resolvidas.

No entanto, por esse tema ser amplo e com grau de dificuldades diferentes, a escolha das aplicações se manteve na linha de utilizar algumas dessas identidades, não todas, com outras áreas da matemática, tais como o conjunto dos números racionais, irracionais, envolvendo radical duplo, racionalização de denominadores e por fim também com desigualdades matemáticas.

Portanto, houve uma contribuição para os diversos níveis de ensino, que atuam com essas identidades, pois pouco é elaborado sobre o conteúdo, e geralmente as aplicações encontradas na maioria das biografias é de um nível mais fácil que os apresentados nesse trabalho.

Assim sendo, trabalhos futuros devem ser elaborados ampliando-se ainda mais a quantidade de identidades contidas, pois isso irá enriquecer o estudo de uma área que não é muito visada profundamente e também que faz total diferença na hora de se resolver questões em concursos e outras provas de instrumentos de avaliação expostos aqui.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Rev. por Uta C. Merzbach; Trad. Elza F. Gomide. 2° ed. São Paulo: Bucher, 1996.

FLOOD, R; WILSON, R. **Os Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos.** São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2013.

GIL, P. D. B. **François Viète: o despontar da álgebra simbólica**. Dissertação de mestrado em matemática pura. Universidade do Porto. 2001. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/9979/3/3596_TM_01_P.pdf>. Acessado em: 18/04/2018.

ALCÂNTARA, J. F.; OLIVEIRA, S. S. de. **Geometria e álgebra: uma conexão possível**. Universidade do Estado do Amazonas. Manaus, 2006. Apostila.

GRENIER, S.; SANTOS, A.; PEREIRA, J. **Reflexões sobre a vida de descartes e o plano cartesiano**. In: II Simpósio Nacional de Educação. Anfiteatro Campus de Cascavel, 13 a 15 de outubro de 2010. Disponível em: <http://cac-php.unioeste.br/eventos/iisimposioeducacao/anais/trabalhos/280.pdf>. Acessado em: 19/04/2018.

GUABIRABA, D. **Produtos notáveis**. Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Notas de aula. Disponível em: <http://www.campusdosertao.ufal.br/pet/petengenharias/cime/files/aulas/Produtos_Notaveis.pdf>. Acessado em: 16/04/2018.

SILVEIRA, F.P. **Identidades Algébricas**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/cursoalg-licao5.pdf>. Acessado em: 25/03/2018. (Apostila).

MUNIZ, A. C. N. **Uma excursão pela Matemática Elementar, Volume 1.** Springer International Publishing AG, 2017.

HALL, N.; JONES, M.; JONES, G. **Vida e o Trabalho de Sophie Germain**. GAZETA MATEMÁTICA. Janeiro, 2004, n° 146. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=89>. Acessado em: 21/04/2018.

DIAS, S. da C. **Simon Stevin e os números decimais.** In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 13 a 16 de julho de 2016. ISSN 2178-034X. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6717_2854_ID.pdf>. Acessado em: 10/05/2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

BICUDO, I. **Platão e a Matemática**. LETRAS CLÁSSICAS, Rio Claro, n. 2, p. 301-315, 1998. Disponível em: < www.revistas.usp.br/letrasclassicas/article/download/73741/77407/>. Acessado em: 16/04/2018.

BRAGANÇA, B. **Olímpiada de matemática para a matemática avançar**. Programa de pós-graduação em Matemática. Universidade Federal de Virçosa. 2013. Disponível em: < http://alexandria.cpd.ufv.br:8000/teses/matematica/2013/250986f.pdf>. Acessado em: 11/05/2018.

BRASIL. **Orientações Curriculares do Ensino Médio, volume 2.** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília; 2006.

LAIER, S. S. dos S. **Álgebra e aspectos do pensamento Algébrico: Um estudo com resolução de problemas na Licenciatura em Ciências Naturais em**

Matemática. Dissertação de mestrado em Educação. Universidade Federal do Mato Grosso. Cuiabá, 2014. Disponível em: <http://ri.ufmt.br/bitstream/1/318/1/DISS_2014_Simone%20Simionato%20dos%20Santos%20Laier.pdf >. Acessado em: 03/05/2018.

LUGO, A. E. ***A Brief Introduction to Inequalities***. Material Educativo. Department of Mathematical Sciences,University of Puerto Rico, Mayaguez Campus. 2012. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/255471687/A-Brief-Introduction-to-Inequalities>. Acessado em: 26/03/2018.

PRODANOV, C.; FREITAS, E. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2° ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. Disponível em: <http://www.feevale.br/Comum/midias/8807f05a-14d0-4d5b-b1ad-1538f3aef538/E-book%20Metodologia%20do%20Trabalho%20Cientifico.pdf>. Acessado em: 13/04/2018.

GANASSIM, P. **A importância das Olimpíadas do Conhecimento**. In: Educa Week +Sday. 7ª ed. Portugal, 2017. Disponível em: <http://educaweek.com.br/wp-content/uploads/2017/09/Educa-Week-Pablo-Ganassim.pdf>. Acessado em: 11/05/2018.

MACHADO, M.C. **Professor e tecnologia: A postura do educador de matemática, no município de São João/SC, diante dos avanços tecnológicos**. Monografia apresentada ao curso de especialização em Educação Matemática. Universidade do Sul de Santa Catarina. 2010. Disponível em: < http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2013/10/Maria-Carolina-Machado-Magnus.pdf>. Acessado em: 11/05/2018.

SILVA, D. A. F. **Ensaios sobre transformações de radicais duplos em soma ou diferença de radicais simples**. Faculdade Estácio do Amazonas. Manaus, 2017. Disponivel em: <http://www.matematicaemdados.com.br/wp-content/uploads/2017/03/Ensaio03.pdf>. Acessado em: 11/05/2018.

MENEZES, A. M. **O uso de desigualdades na resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado em Matemática Pura. Universidade Federal do Amazonas. 2014.

SAVCHEV, S.; Andreescu, T. **Mathematical miniatures, volume 43**. (Published and distributed by the matematical association of america). 1999.

VASCONCELOS, L. **O algebrista volume 1**. Rio de janeiro: LVC, 2016.

CÉSAR, P. **Álgebra para escolas técnicas e militares**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Dissonarte Editora, 2017.

GOMES, C.; GOMES, J. **Tópicos de matemática IME-ITA- Olímpiadas volume 1**. Fortaleza: Vest Seller, 2010.

SANTOS, A. L. **Problemas selecionados de matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2006.